

**И.В.САВЕЛЬЕВ**

**ЖАЛПЫ  
ФИЗИКА КУРСЫ**

**І том**

**Алматы: 2004**

И. В. САВЕЛЬЕВ

# ЖАЛПЫ ФИЗИКА КУРСЫ

I ТОМ

МЕХАНИКА, ТЕРБЕЛІСТЕР  
МЕН ТОЛҚЫНДАР  
МОЛЕКУЛАЛЫҚ ФИЗИКА

ОРЫС ТІЛІНДЕ ТӨРТІНШІ БАСЫЛУЫНА СӘПКЕС ҚАЗАҚША 1-БАСЫЛУЫ

*СССР Жоғары және арнаулы орта білім министрлігі жоғары техникалық  
оқу орындарының студенттеріне арналған оқу құралы ретінде рұқсат еткен*

АЛМАТЫ – 2004

Аударушылар:

*Р. Ыдырысова* (I—III), *М. Бәйімбетов* (IV—VII),  
*Е. Аққошқаров* (VIII—X), *М. Құсайынов* (XI—XII),  
*Т. Әбдісадықов* (XIII—XIV).

Жалпы физика курсы, I том. Механика, тербелістер мен толқындар, молекулалық физика. Савельев И. В. «Наука» баспасы, физика-математика әдебиетінің бас редакциясы, М., 1970 ж.

Кітаптың басты мақсаты — физиканың барлық негізгі идеялары мен әдістерін студенттерге таныстыру. Мұнда физикалық заңдардың мағынасын түсіндіру мен оларды саналы түрде қолдануға ерекше назар аударылған. Көлемінің біршама аздығына қарамастан, кітап келешекте теориялық физиканы және басқадай физикалық пәнді жеті меңгеру үшін қажетті дайындықты қамтамасыз ететін елеулі басшылық болып келеді.

14 таблица, 333 сурет.

С  $\frac{60602-122}{404(07)-77}$  186—75

© Издательство «Наука», 1970.

© Перевод на казахский язык, «Мектеп» 1977.

## МАЗМҰНЫ

ТӨРТІНШІ БАСЫЛУЫНА АЛҒЫ СӨЗ 8

### I БӨЛІМ

#### МЕХАНИКАНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

Кіріспе 9

#### I т а р а у. Кинематика

- § 1. Нүктенің орын ауыстыруы. Векторлар мен скалярлар 12
- § 2. Векторлар жайында кейбір мәліметтер 14
- § 3. Жылдамдық 22
- § 4. Жүріп өткен жолды есептеп шығару 25
- § 5. Бір қалыпты қозғалыс 27
- § 6. Координаталық осьтердегі жылдамдық векторының проекциялары 28
- § 7. Үдеу 29
- § 8. Түзу сызықты бір қалыпты айнымалы қозғалыс 30
- § 9. Қисық сызықты қозғалыстағы үдеу 31
- § 10. Айналмалы қозғалыстың кинематикасы 37
- § 11.  $v$  және  $\omega$  векторларының арасындағы байланыс 42

#### II т а р а у. Материялық нүктенің динамикасы

- 12. Классикалық механика. Оның қолданымдылығының шекарасы 46
- § 13. Ньютонның бірінші заңы. Инерциялық санақ системалары 47
- § 14. Ньютонның екінші заңы 49
- § 15. Физикалық шамалардың өлшемділігі және өлшеу бірліктері 53
- § 16. Ньютонның үшінші заңы 58
- § 17. Галилейдің салыстырмалылық принципі 59
- § 18. Ауырлық күші және салмақ 62
- § 19. Үйкеліс күші 65
- § 20. Қисық сызықты қозғалыс кезінде әсер ететін күштер 70
- § 21. Ньютон заңдарын іс жүзінде қолдану 71
- § 22. Импульс 73
- § 23. Импульстың сақталу заңы 75

#### III т а р а у. Жұмыс және энергия

- § 24. Жұмыс 79
- § 25. Қуат 84

§ 26. Күштердің потенциал өрісі. Консервативтік және консервативтік емес күштер	85
§ 27. Энергия. Энергияның сақталу заңы	89
§ 28. Потенциялық энергия мен күш арасындағы байланыс	99
§ 29. Механикалық системаның тепе-теңдік шарты	101
§ 30. Шарлардың центрлік соқтығуы	103
<b>IV тарау. Инерциялық емес санақ системасы</b>	
§ 31. Инерция күші	108
§ 32. Центрден тепкіш инерция күші	110
§ 33. Кориолис күші	112
<b>V тарау. Қатты дененің механикасы</b>	
§ 34. Қатты дене қозғалысы	125
§ 35. Қатты дененің инерция центрінің қозғалысы	127
§ 36. Қатты дененің айналысы. Күш моменті	128
§ 37. Материялық нүкте импульсының моменті. Импульс моментінің сақталу заңы	135
§ 38. Айналымды қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуі	140
§ 39. Инерция моменті	144
§ 40. Қатты дененің кинетикалық энергиясы	149
§ 41. Қатты дене динамикасының заңдарын қолдану	153
§ 42. Еркін осьтер. Инерциялық бас осі	163
§ 43. Қатты дененің импульс моменті	166
§ 44. Гироскоптар	169
§ 45. Қатты дененің деформациясы	174
<b>VI тарау. Бүкіл әлемдік тартылыс</b>	
§ 46. Бүкіл әлемдік тартылыс заңы	181
§ 47. Ауырлық күші үдеуінің географиялық ендікке тәуелділігі	184
§ 48. Инерциялық масса және гравитациялық масса	186
§ 49. Кеплер заңдары	188
§ 50. Космостық жылдамдықтар	190
<b>VII тарау. Сұйықтар мен газдардың статикасы</b>	
§ 51. Қысым	193
§ 52. Қысымның тыныштықтағы сұйық пен газда таралуы	196
§ 53. Ығыстырушы күш	198
<b>VIII тарау. Гидродинамика</b>	
§ 54. Ағын түтігі мен сызығы. Сорғалаудың үздіксіздігі	200
§ 55. Бернулли теңдеуі	202
§ 56. Ағып жатқан сұйықтағы қысымды өлшеу	206
§ 57. Сұйық қозғалысына импульстың сақталу заңын қолдану	208
§ 58. Ішкі үйкеліс күштері	210
§ 59. Ламинарлық және турбуленттік ағыс	214
§ 60. Сұйықтар мен газдардағы денелердің қозғалысы	215

**II БӨЛІМ**  
**ТЕРБЕЛІСТЕР МЕН ТОЛҚЫНДАР**

<b>IX т а р а у. Тербелмелі қозғалыс</b>	
§ 61. Тербелістер туралы жалпы мәліметтер	221
§ 62. Гармониялық тербелістер	222
§ 63. Гармониялық тербелістің энергиясы	228
§ 64. Гармониялық осциллятор	230
§ 65. Системаның тепе-теңдік қалпының маңындағы болымсыз тербелістері	233
§ 66. Математикалық маятник	234
§ 67. Физикалық маятник	235
§ 68. Гармониялық тербелістерді графиктік кескіндеу. Векторлық диаграмма	238
§ 69. Бағыттары бірдей тербелістерді қосу	239
§ 70. Соғу	240
§ 71. Өз ара перпендикуляр тербелістерді қосу	242
§ 72. Лиссажу фигуралары	247
§ 73. Өшетін тербелістер	248
§ 74. Автотербелістер	253
§ 75. Еріксіз тербелістер	254
§ 76. Параметрлік резонанс	261
<b>X т а р а у. Толқындар</b>	
§ 77. Толқындардың серпімді ортада таралуы	262
§ 78. Жазық және сфералық толқышның теңдеуі	265
§ 79. Кез келген бағытта таралатын жазық толқышның теңдеуі	269
§ 80. Толқындық теңдеу	270
§ 81. Серпімді толқындардың таралу жылдамдығы	272
§ 82. Серпімді толқынның энергиясы	275
§ 83. Толқынның интерференциясы мен дифракциясы	280
§ 84. Тұрғын толқындар	283
§ 85. Шектің тербелісі	285
§ 86. Допплер эффектісі	286
§ 87. Дыбыстық толқындар	288
§ 88. Газдағы дыбыс толқынының жылдамдығы	289
§ 89. Дыбыс күші деңгейінің шкаласы	294
§ 90. Ультрадыбыс	298

**III БӨЛІМ**  
**МОЛЕКУЛАЛЫҚ ФИЗИКА ЖӘНЕ ТЕРМОДИНАМИКА**

<b>XI т а р а у. Алғашқы деректер</b>	
§ 91. Молекула-кинетикалық теория (статистика) және термодинамика	301
§ 92. Молекулалардың массасы және мөлшерлері	303
§ 93. Системаның күйі. Процесс	305
§ 94. Системаның ішкі энергиясы	307
§ 95. Термодинамиканың бірінші бастамасы	308
§ 96. Көлемі өзгерген кезде дененің істейтін жұмысы	311

§ 97. Температура	314
§ 98. Идеал газ күйінің теңдеуі	315
<b>XII т а р а у. Газдардың элементар кинетикалық теориясы</b>	
§ 99. Газдардың кинетикалық теориясының қысым үшін теңдеуі	322
§ 100. Молекулалардың жылдамдықтарының әр түрлі бағыттар бойынша таралуын дәлірек есептеу	330
§ 101. Энергияның еркіндік дәрежелері бойынша біркелкі таралуы	335
§ 102. Идеал газдың ішкі энергиясы және жылу сыйымдылығы	339
§ 103. Идеал газдың адиабаталық теңдеуі	347
§ 104. Политроптық процестер	349
§ 105. Идеал газдың әр түрлі процестер кезінде істейтін жұмысы	351
§ 106. Газ молекулаларының жылдамдықтар бойынша таралуы	353
§ 107. Максвелдің таралу заңын тәжірибеде тексеру	364
§ 108. Барометрлік формула	367
§ 109. Больцманның таралуы	368
§ 110. Перреннің Авогадро санын анықтауы	371
§ 111. Еркін жүру жолының орташа ұзындығы	374
§ 112. Тасымал құбылысы. Газдардың тұтқырлығы	378
§ 113. Газдардың жылу өткізгіштігі	383
§ 114. Газдардағы диффузия	387
§ 115. Ультрасиретілген газдар	392
§ 116. Эффузия	395
<b>XIII т а р а у. Нақты газдар</b>	
§ 117. Газдардың идеалдықтан ауытқуы	399
§ 118. Ван-дер-Ваальс теңдеуі	403
§ 119. Эксперименттік изотермалар	408
§ 120. Аса қаныққан бу және асыра қыздырылған сұйық	413
§ 121. Нақты газдың ішкі энергиясы	416
§ 122. Джоуль — Томсон эффектісі	418
§ 123. Газдарды сұйылту	421
<b>XIV т а р а у. Термодинамика негіздері</b>	
§ 124. Кіріспе	424
§ 125. Жылу машинасының пайдалы әсер коэффициенті	426
§ 126. Термодинамиканың екінші бастамасы	428
§ 127. Карно циклі	429
§ 128. Қайтымды және қайтымсыз машиналардың пайдалы әсер коэффициенті	432
§ 129. Идеал газға арналған Карно циклінің п. ә. коэффициенті	436
§ 130. Температуралардың термодинамикалық шкаласы	438
§ 131. Жылудың келтірілген мөлшері. Клаузиус теңсіздігі	441
§ 132. Энтропия	444
§ 133. Энтропияның қасиеттері	448
§ 134. Нернст теоремасы	454
§ 135. Энтропия және ықтималдық	—
§ 136. Идеал газдың энтропиясы	457

## XV т а р а у. Кристалдық күй

§ 137. Кристалдық күйдің ерекше белгілері	161
§ 138. Кристалдардың классификациясы	463
§ 139. Кристалдық решеткалардың физикалық типтері	466
§ 140. Кристалдардағы жылулық қозғалыстар	469
§ 141. Кристалдардың жылу сыйымдылығы	470

## XVI т а р а у. Сұйық күй

§ 142. Сұйықтардың құрылысы	473
§ 143. Беттік керілу	475
§ 144. Сұйықтың икек бетінің астындағы қысым	479
§ 145. Сұйық пен қатты дене шекарасындағы құбылыстар	482
§ 146. Капиллярлық құбылыстар	486

## XVII т а р а у. Фазалық тепе-теңдіктер мен ауысулар

§ 147. Кіріспе	490
§ 148. Булану және конденсация	491
§ 149. Балқу және кристалдану	494
§ 150. Клапейрон — Клаузиус теңдеуі	496
§ 151. Үштік нүкте. Күй диаграммасы	499
Пәндік көрсеткіш	503



## ТӨРТІНШІ БАСЫЛУЫНА АЛҒЫ СӨЗ

Осы басылуын дайындау кезінде кітап біршама жөнделді. 7, 17, 18, 22, 27, 33, 36, 37, 38, 40, 43, 68, 88-параграфтары қайтадан (толықтырылып немесе жарым жарғылай) жазылды. Айтарлықтай қосымша немесе өзгеріс 2, 11, 81, 89, 104, 113-параграфтарға жасалған.

Бұдан бұрын, екінші және үшінші басылуын дайындау кезінде 14, 73, 75-параграфтар қайта жазылған болатын. Айтарлықтай қосымша немесе өзгерістер 109, 114, 133, 143-параграфтарға енгізілгенді.

Сонымен бірінші басылуына қарағанда бірінші томның бет бейнесі көрнеу өзгерді. Бұл өзгеріс автордың Москвадағы инженерлік-физика институтында жалпы физикадан сабақ берген соңғы он жыл ішіндегі методикалық тәжірибелерінің жиынтығын көрсетеді.

1969 ж. ноябрь.

*И. САВЕЛЬЕВ.*

# І БӨЛІМ

## МЕХАНИКАНЫҢ ФИЗИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

---

### КІРІСПЕ

Механика денелердің немесе олардың жеке бөліктерінің бір-біріне қатысты орын ауыстыруынан тұратын материя қозғалысының ең жай формасы туралы ілім болып табылады.

Денелердің орын ауыстыруын біз күнделікті тіршілігімізден көріп-бақылап жүрміз. Механикалық ұғымдардың көрнекілігі де осыдан болар. Басқаларына қарағанда барлық жаратылыс ғылымдарының ішінде механиканың алдымен өрістеп дамуы да осымен түсіндіріледі.

Бір дененің әр түрлі денелерге қатысты қозғалысы түрліше сипатта болады. Егер, мысалы, 1 дене бізбен салыстырғанда тыныштықта тұрса, ал 2 және 3 дене бір жаққа қарай бірдей жылдамдықпен қозғалса, онда 3 дене 1 денеге қатысты орын ауыстырады, бірақ 2 денеге қатысты тыныштықта болады.

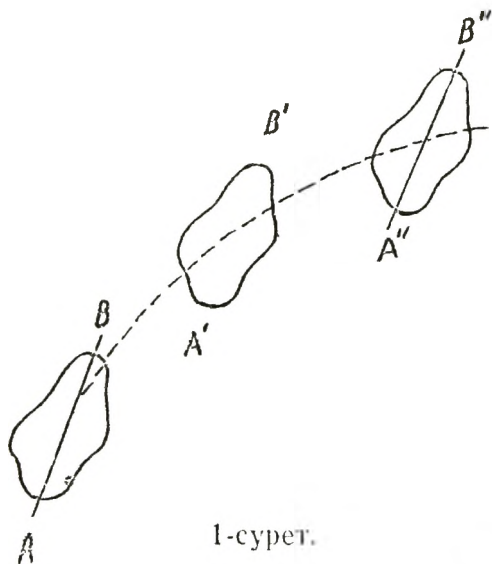
Сондықтан қозғалысты сипаттау үшін басқа денеге (немесе бір-біріне қатысты қозғалмайтын бір топ денеге) қатысты берілген дененің орын ауыстыруын қалай есептейтіндігіміз жайында келісіп алғанмыз жөн. Осы мақсатпен тандап алынған денеміз (немесе бір топ денелер) санақ системасын құрады.

Практикада қозғалысты сипаттау үшін санақ системасын құратын денелерге әйтеуір бір координата системасын, мысалы, декарт немесе тік бұрышты координаталар системасын байланыстыруға тура келеді.

Дененің координаталары оның кеңістіктегі орнын анықтауға мүмкіндік береді. Алайда қозғалыс кеңістіктегі сияқты уақыт бойынша өтеді (кеңістік пен уақыт — материя өмір сүруінің ажырамас формасы). Сондықтан

қозғалысты сипаттау үшін уақытты да есептеу қажет. Бұл сағаттың көмегімен жасалады.

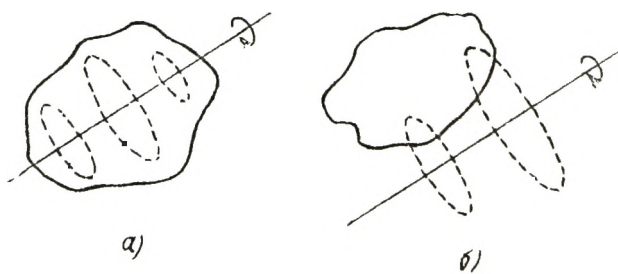
Таңдап алынған санақ системасын және сағатпен байланыстырылған координаталар системасын анықтап дене қозғалысын сипаттауға кірісеміз.



1-сурет.

Дененің қозғалысы әдетте оған күш әсер еткен жағдайларда пайда болады. Осы күштердің әсері қозғалыстың сипатын анықтаумен қатар дененің деформациясында, яғни олардың өлшемі мен формасының өзгерісін де туғызады. Көбінесе деформациясының шамалы болатындығы сондайлық, дененің қозғалысын сипаттағанда оны елемеуге де болады. Қарастырылатын мысалдың шартында деформациясын еле-

меуге болатын дене абсолют қатты денелер деп аталады. Абсолют қатты (яғни мүлде деформацияланбайтын) денелердің табиғатта жоқ екендігін есте сақтаған дұрыс. Тек дененің қозғалысы кезінде деформацияның еленбейтін азғантай ролі белгілі бір жағдайларда оны абсолют дене ретінде қарастыруға мүмкіндік береді.



2-сурет.

Кейде дене қозғалысын қарастырған кезде олардың өлшемін де елемеуге болады. Бұл, дене өлшемінің, біз істес болуға тура келетін, берілген есептің шартындағы кейбір өлшемдерден бірнеше есе кіші болатын жағдайларда болады. Мысалы, автомобильмен Ленинградтан

Москваға қарай жүріп өткен жолды анықтау кезінде автомобильдің өлшемін біржола елемеуге болады.

Берілген есептің шартында өлшемін елемеуге болатын дене материялық нүкте деп аталады. Берілген нақтылы денені материялық нүкте ретінде қарастыруға болатындығы, яғни болмайтындығы жайлы мәселе сол дененің өлшеміне емес, есептің шартына байланысты. Бір жағдайда материялық нүкте орнына саналған дене, екінші жағдайда аумақты дене ретінде қарастырылуға тиіс. Айталық, мысалы, Күнді айнала қозғалған Жердің траекториясын есептегенде Жерді материялық нүкте ретінде қарастыруға болады. Ал Жер бетіндегі дене қозғалысын қарастырған кезде ол аумақты дене ретінде қарастырылуға тиісті. \*

Қатты дененің кез келген қозғалысын негізінен екі түрге (ілгерілемелі және айналмалы қозғалысқа) жіктеуге болады.

Ілгерілемелі қозғалыс деп, қозғалыстағы денемен байланысқан кез келген түзу өзіне-өзі параллель болып қалатын қозғалысты айтады (1-сурет).

Айналмалы қозғалыс кезінде дененің барлық нүктелері шеңбер бойымен қозғалады және олардың центрлері айналыс осі деп аталатын бір түзудің бойында жатады (2-сурет) Айналыс осі денеден тыс жатуы мүмкін (2, б-сурет).

Материялық нүкте сияқты әйтеуір бір дене туралы айта отырып, біз оның аумақтылығын ескермейміз, оның осі арқылы өтетін айналмалы қозғалыс ұғымы осындай денеге қолданылмайды.

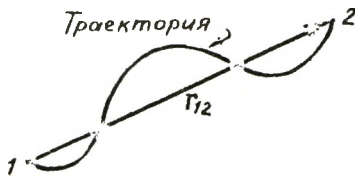
Механика үш бөлімге бөлінеді: 1) кинематика, 2) статика және 3) динамика. Кинематика дене қозғалысын қамтамасыз ететін себептерге байланыссыз қозғалысты оқып-зерттейді, статика денелердің тепе-теңдіктегі шартын оқып-зерттейді, ал соңында, динамика қозғалыстың сол немесе басқадай сипатын қамтамасыз ететін себептерге байланысты дененің қозғалысын оқып-зерттейді. Тепе-теңдік қозғалыстың, дербес жағдайы болғандықтан да статика заңы динамика заңдарының табиғи салдары болып шығады. Осы себептен де статика физика курстарында жеке оқылмайды.

# І ТАРАУ

## КИНЕМАТИКА

### § 1. Нүктенің орын ауыстыруы. Векторлар мен скалярлар

† Материялық нүкте өзінің қозғалысында қандай да бір сызық сызады. Бұл сызық траектория деп аталады. Траекторияның түріне қарай қозғалыстар түзу сызықты қозғалыс, шеңбер бойымен қозғалыс, қисық сызықты қозғалыс және т. б. болып айырылады.



3-сурет.

Материялық нүкте (алдағы уақытта оны қысқаша нүкте дейтін боламыз) 1 нүктеден 2 нүктеге қарай қандай да бір траекторияның бойында орналасқан делік (3-сурет) Траекторияның бойымен 1 нүктеден 2 нүктеге

дейін есептелінген ара қашықтық жүріп өткен жолды көрсетеді. Оны  $s$  әрпімен белгілейміз.

Түзудің 1 нүктеден 2 нүктеге жүргізілген кесіндісі орын ауыстыру деп аталынады. Оны  $r_{12}$  деп белгілейміз. Орын ауыстыру, өзінің шамасынан ( $r_{12}$  кесіндісіне тең) басқа, бағытымен де сипатталады. Шынында, шамасы бойынша бірдей екі  $r_{12}$  және  $r_{13}$  орын ауыстыруды қарастыралық (4-сурет). Бұл кесінділер ұзындықтарының теңдігіне қарамастан, олар әр түрлі орын ауыстыруларды айқын көрсетеді.

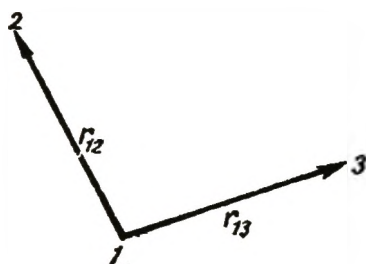
Осыған ұқсас орын ауыстырулардың шамалары мына мысалда анықталатын қосудың айрықша ережелеріне бағынады. Айталық, нүкте бірінен соң бірі келетін екі:  $r_{12}$  және  $r_{23}$  орын ауыстыруды жасайтын болсын (5-сурет) Бұл екі орын ауыстырудың қосындысы деп бірінші

екі орын ауыстыруды бірге алғандағы нәтижені көрсетіп  $r_{13}$  орын ауыстыруды айтуға болады.

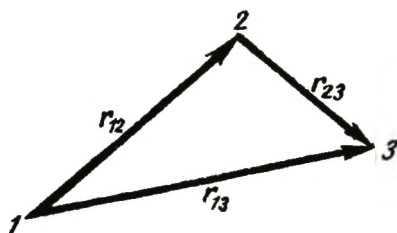
Орын ауыстыру сияқты, яғни сан мәндерімен және бағыттарымен, сондай-ақ, 5-суретте көрсетілген ереже бойынша сипатталатын шамаларды векторлар деп атаймыз. Векторларға жылдамдық, үдеу, күш және т. б. шамалар жатады.

Тек сан мәндерін ғана беру жеткілікті болатын шамаларды скалярлар деп атайды. Жол, уақыт, масса тағы басқалар скалярдың мысалы бола алады.

Векторларды жуан шрифтімен белгілеу қабылданған.



4-сурет.



5-сурет.

Мысалы, 1 нүктеден 2 нүктеге орын ауыстыру векторын  $r_{12}$  деп белгілейміз. Әдеттегі шрифтімен берілген осы әріп вектордың сан мәнін немесе сәйкес вектордың модуль<sup>1</sup> деп аталатынды білдіреді. Модульды белгілеу үшін екі вертикаль сызықшаның арасындағы вектордың символы пайдаланылады. Сонымен,

$$|A| = A = A \text{ векторының модульы,}$$

$$r_{12} = r_{12} = r_{12} \text{ векторының модульы.}$$

Вектордың модульы — скаляр, әр уақытта оң болады.

Чертеждерде векторлар ұшында стрелкасы бар түзу сызықты кесінділер түрінде кескінделеді. Кесінділердің ұзындығы қабылданған масштабта вектордың модульын, ал стрелкамен көрсетілген кесіндінің бағыты вектордың бағытын береді.

5-суретте көрсетілген векторларды қосу амалдары символдық түрде былай жазылады:

$$r_{12} + r_{23} = r_{13}.$$

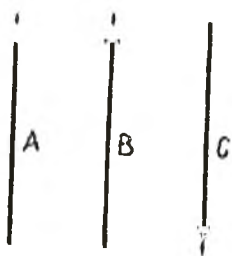
<sup>1</sup> Жазбаша түрде векторларды төбесінде стрелкасы бар әріппен (мысалы,  $\vec{r}_{12}$ ) белгілейді. Бұл жағдайда стрелкасы жоқ сол әріп вектордың модульын білдіреді.

## § 2. Векторлар жайында кейбір мәліметтер

Параллель түзудің бойымен (бір жаққа немесе қарама-қарсы жаққа) бағытталған векторларды коллинеарлы векторлар деп атайды.

Бағыттары бір жазықтыққа параллель болып келген векторларды компланарлы деп атайды.

Модулы бойынша бірдей бір жаққа бағытталған коллинеарлы векторлар бір-біріне тең деп есептелінеді<sup>1</sup>

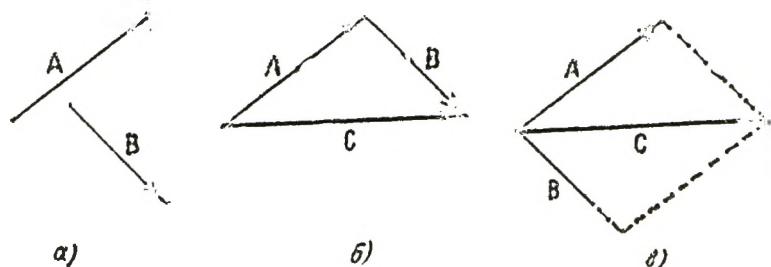


6-сурет.

Қарама-қарсы бағыттағы модулы бойынша бір-біріне тең векторлар бір-бірінен таңбасы бойынша айырылған деп есептелінеді. Мысалы, 6-суретте кескінделген векторлардың және олардың модульдарының арасында мына төмендегідей қатыс болады:

$$\begin{aligned} A &= B; \quad A = -C; \quad B = -C; \\ A &= B = C \text{ немесе } |A| = |B| = |C|. \end{aligned}$$

**Векторларды қосу.** Екі вектордың қорытқы векторға қалай қосылатындығы жайында алдыңғы параграфта айтылған. Енді осы мәселені біршама толығырақ қарас-



7-сурет.

тыралық. Бізге  $A$  және  $B$  екі векторы берілген делік (7, а-сурет). Қорытқы  $C$  векторын алу үшін,  $B$  векторын, оның басы  $A$  векторының соңында жататындай етіп, өзіне-өзін параллель көшіреміз (7 б-сурет) Сонда  $A$

<sup>1</sup> Мәселе еркін векторлар, яғни кеңістіктің кез келген нүктесінен бастап салуға болатын векторлар жайында болып отыр. Еркін векторлардан басқа, басы вектор арқылы өтетін түзудің бойымен қозғала алатын жылжымалы векторлар және белгілі нүктеге түсірілген байлаулы векторлар болады. Векторлардың соңғы екі түрі еркін векторлар арқылы өрнектелуі мүмкін; осы себептен векторлық санаудың негізіне, әдетте, жай вектор деп аталатын еркін векторлар туралы ұғым қабылданған.

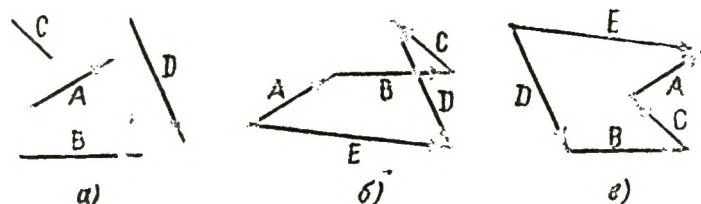
<sup>2</sup> Мұндай көшіруді  $A$  векторының соңынан басталатын  $B$  векторына тең вектормен алмастыру деп қарастыруға болады.

векторының басынан **B** векторының соңына жүргізілген **C** векторы қорытқы вектор болады:

$$C = A + B.$$

Алайда, вектор құруды басқа тәсілмен де жүзеге асыруға болады (7, в-сурет). Екі вектордың да басы бірігетіндей етіп **B** векторын (немесе **A**) көшіреміз. Осыдан кейін **A** және **B** векторына параллелограмм саламыз. Бұл параллелограммның диагоналі 7, б-суретте көрсетілген тәсіл бойынша алынған **C** векторына дәл келетіні сөзсіз. Осы себептен де кейде векторлар параллелограмм ережесі бойынша салынады деп айтады.

Қарастырылған тәсілдің екеуі де — б) және в) — бірдей нәтижені береді. Алайда екіден артық векторларды қосу жағдайында б) тәсілі анағұрлым қарапайым, әрі ыңғайлы тәсіл. **A**, **B**, **C** және **D** векторлары (8-сурет) берілген делік, векторларды, алдыңғы векторлардың басы келесі вектордың соңымен қосылатындай етіп, өз-өзіне параллель көшірелік. Осыдан сынық сызық шығады. Қорытқы вектор **A** векторының қосылғыштарының біреуі-



8-сурет.

нің басынан ең ақырғы **D**-ның соңына дейін жүргізілген **E** векторы болады. Қорытқы **E** векторы берілген вектор салынатын тізбекке байланысты болмайтынына оңай көз жеткізуге болады. 8, б-суретте  $E = A + B + C + D$  жағдайы, ал 8, в-суретте  $E = D + B + C + A$  жағдайы көрсетілген.

**Векторларды азайту.** Екі вектордың айырымы  $A - B$  деп, **B** векторымен қосылғанда **A** векторын беретін **C** векторын айтамыз.  $A - B$  айырымы мына түрде:

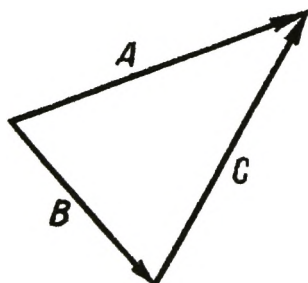
$$A - B = A + (-B)$$

берілетіндіктен,  $C = A - B$  векторын **A** векторына шамасы жағынан тең, бірақ оған қарама-қарсы бағыттағы **B** векторын қосу арқылы шығарып алуға болады.

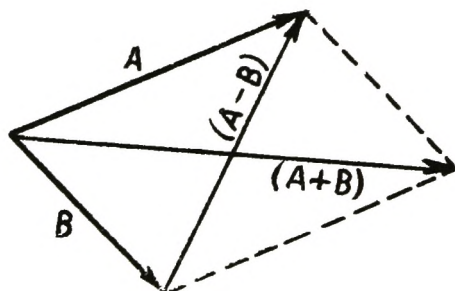


10-суретте  $A$  және  $B$  векторының қосындысы мен айырымдары келтірілген.

**Векторларды құраушыларына жіктеу.** Әрбір  $A$  векторды қосындысында  $A$  векторын беретін  $A_1$  және  $A_2$  жә-



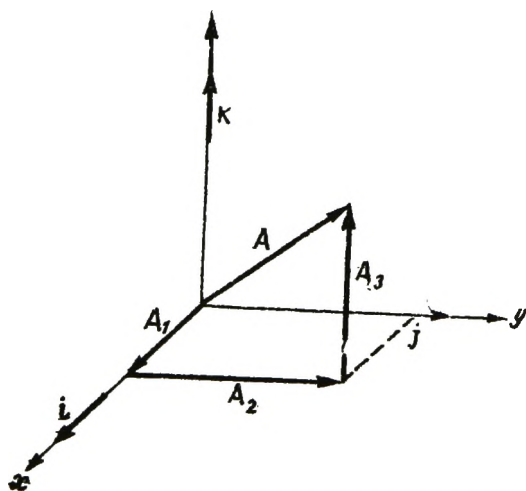
9-сурет.



10-сурет.

не т. б. деп бірнеше векторлармен алмастыруға болады. Бұл жағдайда  $A_1$  және  $A_2$  т. б.  $A$  векторының құраушылары деп аталады.  $A$  векторын бірнеше векторлармен алмастырудағы осы амалдың өзін  $A$  векторын құраушы-

ларына жіктеу деп атаймыз. 11-суретте  $A$  векторының бағыты тік бұрышты координата осьтері болатын құраушыларға жіктелуі көрсетілген.  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  символдарымен  $A$  векторының  $x$ ,  $y$  және  $z$  осьтері бойынша құраушылары белгіленген.



11-сурет.

**Векторлардың осьтегі проекциясы.** Айталық бізге  $A$  векторы және қандай да бір кеңістікте бағыт (ось) берілсін делік, біз оны  $n$  әрпімен (12-сурет) белгілейік.  $A$  векторының басы мен ұшы

арқылы  $n$  бағытына перпендикуляр жазықтық жүргізілсін. Осы жазықтықтың  $n$  осімен қиылысқандағы  $1'$  және  $2'$  нүктелері  $n$  осіндегі  $A$  векторының басы мен ұшының проекциялары деп аталады. Жазықтық арасын-

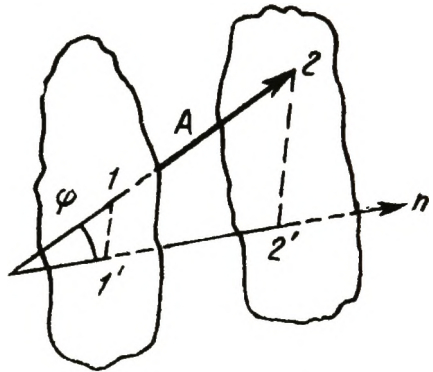
дағы ось кесіндісінің шамасы  $n$  бағытындағы (немесе осьтегі)  $A$  векторының проекциясы деп аталады. Вектор проекциясы — скаляр шама. Егер  $1'$  нүктесінен  $2'$  нүктеге дейінгі бағыт  $n$  бағытымен дәл келсе, оң проекция деп; қарама-қарсы жағдайда теріс проекция деп есептелінеді.

Проекция вектордың өзі белгіленген, қосымша индексі бар, вектор проекцияланған бағытты көрсететін әріппен беріледі. Мысалы,  $A$  векторының  $n$  бағыттағы проекциясы  $A_n$  деп белгіленеді.

$A$  векторының  $n$  осімен жасайтын  $\varphi$  бұрышын қарастыралық (12-сурет).  $A_n$  проекциясы төмендегідей есептелінетіні айқыш:

$$A_n = A \cos \varphi, \quad (2.1)$$

мұндағы  $A$  —  $A$  векторының модулы.



12-сурет.

Егер вектор берілген бағытпен сүйір бұрыш жасаса, бұл бұрыштың косинусы оң, вектордың проекциясы да оң болады. Егер вектор осьпен доғал бұрыш жасаса, бұл бұрыштың косинусы теріс, проекциясы да теріс болады. Егер вектор берілген оське перпендикуляр болса, оның проекциясы нольге тең.

13-суретте  $x$  және  $y$  координата осьтеріндегі бірнеше векторлардың проекциясы көрсетілген. Бұл проекциялар үшін төмендегідей қатыс орындалады:

$$A_x = C_x > 0, \quad B_x < 0;$$

$$A_y = B_y > 0, \quad C_y < 0.$$

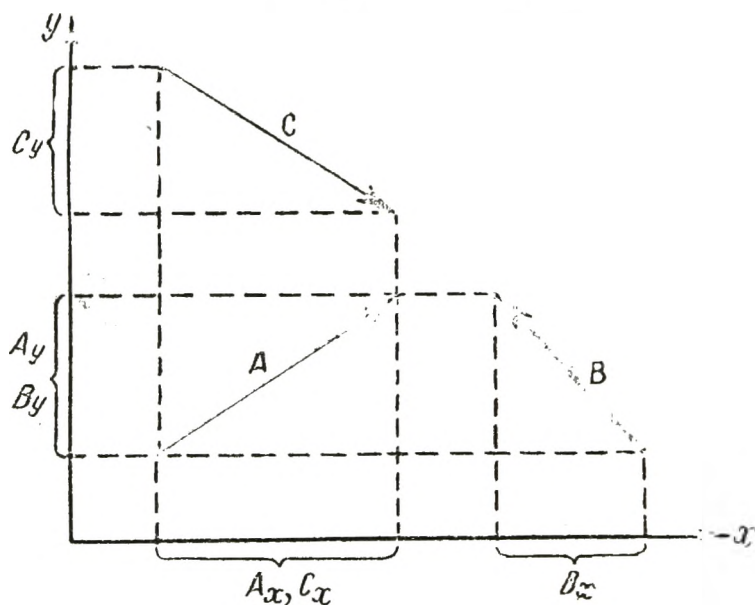
Егер  $A$  векторы  $x$ ,  $y$  және  $z$  осьтерімен  $\alpha$ ,  $\beta$  және  $\gamma$  бұрышын жасаса, оның проекциясы мынаған тең:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A \cos \alpha, \\ A_y &= A \cos \beta, \\ A_z &= A \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

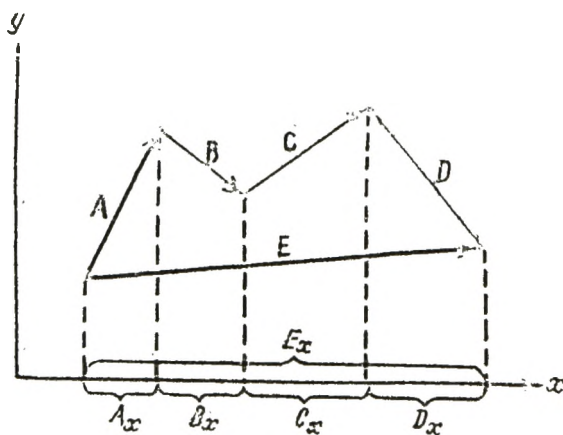
Үш координаталық осьтегі вектордың берілген проекциясы бойынша вектордың өзі салынатынын түсіну қиын емес, демек, кез келген вектор үш санмен — оның координата осіндегі проекцияларымен анықталуы мүмкін. Скаляр бір санмен берілетінін еске сала кетелік.

Бірнеше векторлардың  $E = A + B + C + D$  (14-сурет) қосындысын қарастыралық.

$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x \quad (2.3)$$



13-сурет.



14-сурет.

болатыны айқын, яғни кейбір бағыттағы векторлар қосындысының проекциялары сол бағыттағы векторлар қосылғыштарының проекциясына тең.

**Радиус-вектор.** Нүктенің радиус-векторы деп координата басынан берілген нүктеге жүргізілген векторды ай-

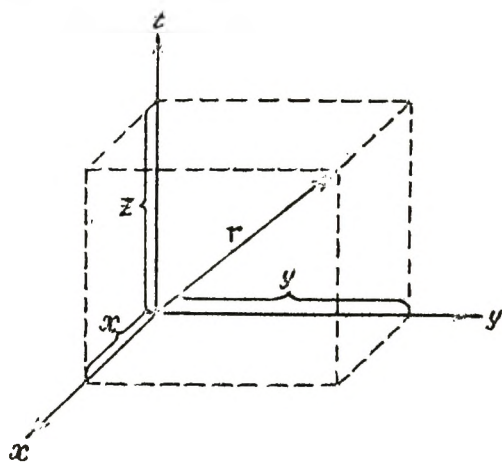
тамыз (15-сурет).  $r$  радиус-векторы кеңістіктегі нүктенің жағдайын бір мәнді анықтайды. Оның координаталық осьтегі проекциясы, суретте көрсетілгендей, нүктенің декарт координаталарына тең:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z. \quad (2.4)$$

$r$  векторының квадраты координаталар квадраттарының қосындысына тең:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.5)$$

**Векторды скалярға көбейту.**  $A$  векторын  $a$  скалярға көбейтудің нәтижесінде модуль  $A$  векторының модульынан  $|a|$  есе үлкен жаңа  $B$  вектор алынады, егер  $a$  скаляр оң болса, бұл вектордың бағыты  $A$  бағытымен дәл келеді; ал  $a$  скаляр теріс болса, оған қарама-қарсы болады. Егер  $B = aA$  болса, онда  $B = |a|A$ .



15-сурет.

Векторды  $b$  скалярға бөлу векторды  $a = 1/b$  скалярға көбейтумен пара-пар.

**Бірлік вектор.** Әрбір  $A$  векторын бағыты  $A$  векторынікіндей, ал модуль бойынша бірге тең бірлік вектормен ( $A_{\text{бірлік}}$ ) салыстыруға болады. Мынадай қатыс болатыны айқын:

$$\left. \begin{aligned} A &= A \cdot A_{\text{бірлік}}, \\ A_{\text{бірлік}} &= \frac{A}{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Бірлік вектор басқаша орт деп те аталады. Координата осьтері бойынша вектор құраушыларының модульдары  $A_x, A_y, A_z$  (11-суретті қараңыз) осы осьтердегі векторлардың проекцияларына тең:

$$\begin{aligned} |A_x| &= |A_x|, \\ |A_y| &= |A_y|, \\ |A_z| &= |A_z|. \end{aligned}$$

Координаталар осьтерінде бағыты болатын бірлік векторларды енгіземіз. Оларды төмендегіше:  $x$  осімен бағытталған бірлік вектор  $i$  символымен,  $y$  осімен —  $j$  символымен, ал  $z$  осімен —  $k$  символымен белгілеу қабылданған<sup>1</sup>.  $i$ ,  $j$  және  $k$  векторларын  $x$ ,  $y$  және  $z$  осьтеріне сәйкес орттар деп атайды.

Сонда, мысалы,  $A_x$  құраушысын төмендегі түрде беруге болады (11-суретті қараңыз):

$$A_x = A_x i. \quad (2.7)$$

Шынында да,  $A_x i$  векторының модулы мынаған тең болады:  $|A_x|$ , яғни  $|A_x|$ . Әрі қарай, егер  $A_x$  векторы  $x$  осі жаққа қарай бағытталған болса, яғни  $i$  ортаның бағытымен дәл келсе, онда 11-суреттен оңай көруге болатындай,  $A_x$  оң, егер  $A_x$  теріс  $x$  жаққа бағытталса, яғни  $i$  векторына қарама-қарсы болса,  $A_x$  теріс болады екен, өйткені  $A_x i$  векторы  $i$ -ге қарама-қарсы бағытта болады, демек,  $A_x$  векторының бағытымен сәйкес келетін бағытта болады.

Басқадай  $A_y$  және  $A_z$  құраушылары үшін (2.7)-ге ұқсас мына өрнекті жазуға болады:

$$A_y = A_y j, \quad A_z = A_z k.$$

$A$  векторы өзінің құраушыларының қосындысына тең болатындықтан, былай жазуға болады:

$$A = A_x i + A_y j + A_z k. \quad (2.8)$$

Сөйтіп, кез келген векторды координаталық осьтердегі оның проекциялары арқылы және осы осьтердің бірлік векторлары (орттар) арқылы өрнектеуге болады.

**Вектордың туындысы.** (2.8) векторын белгілі  $A(t)$  заңы бойынша уақытқа байланысты өзгереді деп ұйғаралық. Мұның өзі вектордың проекциялары координаталық осьтердегі  $t$  уақытпен алынған

$$A(t) = iA_x(t) + jA_y(t) + kA_z(t)$$

функцияны өрнектейтіндігін білдіреді (егер координаталық осьтері кеңістікте бұрылмаса, уақытқа байланысты осьтердің орттары өзгермейді)

Айталық  $\Delta t$  уақыт аралығында вектордың проекциялары  $\Delta A_x$ ,  $\Delta A_y$ ,  $\Delta A_z$  өсімше алады, осының нәтижесінде вектордың өзі де  $\Delta A = i\Delta A_x + j\Delta A_y + k\Delta A_z$  өсімшесін ала-

<sup>1</sup> Сондай-ақ,  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  белгілеулері қолданылады.

ды делік.  $\vec{A}$  векторының  $t$  уақытқа байланысты жылдамдығының өзгерісін мына қатынаспен сипаттауға болады:

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \mathbf{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

Біздің жазған өрнегіміз  $\Delta t$  уақыт аралығы ішінде  $\vec{A}$  орташа жылдамдықтың өзгерісін береді. Айталық  $\vec{A}$  уақытқа байланысты бір қалыпты үздіксіз өзгертін болсын дейік. Сонда неғұрлым  $\Delta t$  аралығы кіші болса,  $\Delta t$  аралығында жататын кез келген уақыт мезеттерінде (2.9) шамасы  $\vec{A}$  өзгерісінің жылдамдығын дәлірек сипаттайтын болады. Сөйтіп,  $t$  уақыт мезетіндегі  $\vec{A}$  векторының өзгеру жылдамдығы  $\Delta t$ -ні шектеусіз кішірейтуден алынған (2.9) өрнегінің шегіне тең болады.

Өзгеру жылдамдығы

$$\dot{\vec{A}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \mathbf{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}.$$

$\Delta f$  функциясы өсімшесінің  $\Delta t$ -ні нольге ұмтылдырудан алынған  $\Delta t$  аргументінің өсімшесіне қатынасының шегі  $t$  бойынша  $f$  функциясының туындысы деп аталады да  $\frac{df}{dt}$  символымен белгіленеді. Демек, уақытқа байланысты  $\vec{A}$  векторының өзгеру жылдамдығы мынаған тең:

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt}. \quad (2.10)$$

Алынған өрнекті (2.8) формуламен салғастыра отырып, (2.10) -да тұрған көбейткіштер орт болғанда координаталар осіндегі  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  векторының проекциясы

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\text{пр } x} &= \frac{dA_x}{dt} \\ \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\text{пр } y} &= \frac{dA_y}{dt}, \\ \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\text{пр } z} &= \frac{dA_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

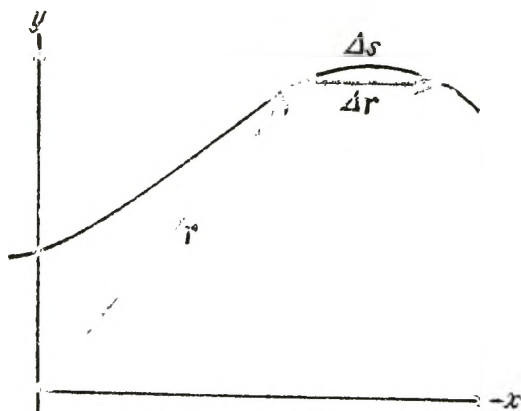
болатынын оңай көруге болады.

Белгілеулерде ұқыптылық керек. Мысалы,  $x$  осіндегі  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  векторының проекциясын  $\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_x$  символымен белгілеуге болмайды, өйткені мұндай символ  $A_x$ -пен ұқсас-

тық бойынша  $x$  осіндегі  $\frac{dA}{dt}$  векторының құраушысын білдіреді. Сондай-ақ, бұл проекцияны  $\left(\frac{dA}{dt}\right)_x$  символымен де белгілеуге болмайды ( $A$  векторының проекциясын  $A_x$  символымен белгілеген сияқты), өйткені  $\left|\frac{dA}{dt}\right|$  жалпы айтқанда,  $\left|\frac{dA}{dt}\right|$ -дан өзгеше. Сондықтан  $\left(\frac{dA}{dt}\right)_{\text{пр } x}$  деп белгілеуді пайдаланған жөн және т. б.

### § 3. Жылдамдық

Материялық нүктенің (ілгеріде ықшамдылық үшін қысқаша тек нүкте дейтін боламыз) кеңістіктегі орнын  $r$  радиус-векторы арқылы беруге болады. Нүкте қозғалған кезде  $r$  векторы,



16-сурет.

жалпы айтқанда, шамасы бойынша да, бағыты бойынша да өзгереді<sup>1</sup>.

Кейбір  $t$  уақыт мезетін белгілеп қоялық. Бұған  $r$  радиус-векторының мәні сәйкес келсін (16-сурет). Келесі  $t$  мезетке дейінгі аз уақыт аралығында (біз оны элементар уақыт деп атайтын боламыз) нүкте элементар  $\Delta s$  жол жүреді де  $\Delta t^2$  уақыты ішінде ра-

диус-вектордың өсімшесімен бірдей болатын элементар  $\Delta r$  орын ауыстыру жасайды.

<sup>1</sup> Жаттығу ретінде нүктенің радиус-векторы үшін: а) шама жағынан, б) бағыты жағынан өзгертін траекториямен көрсету ұсынылады.

<sup>2</sup>  $\Delta$  (дельта) символын екі жағдайда пайдаланамыз:

а) кез келген бір шаманың үлестерін белгілеу үшін, мысалы, қарастырылып отырған жағдайда  $\Delta t$  қозғалысқа жұмсалған барлық уақыттың бір бөлігі,  $\Delta s$  — нүктенің жүріп өтетін барлық жолының бір бөлігі;

б) кез келген бір шаманың өсімшесін белгілеу үшін. Берілген жағдайда  $\Delta r$  —  $r$  радиус-вектордың  $\Delta t$  уақыттағы өсімшесі.

Мынадай қатынасты алалық:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

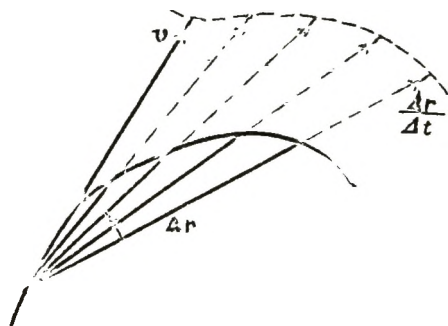
Берілген  $t$ -де (3.1) вектордың модулы мен бағыты, жалпы айтқанда,  $\Delta t$  аралығының шамасына тәуелді.  $\Delta t$ -ні азайта отырып (оған сәйкес  $\Delta s$  пен  $\Delta \mathbf{r}$ -де азаяды), (3.1) қатынастың өзгеріс-сипатын байқалық. Сөйтсе,  $\Delta t$ -ні мейлінше аз мәніне жеткізгенде (3.1) векторы іс жүзінде шамасы жағынан да бағыты жағынан да өзгеруді тоқтатады екен. Мұның өзі,  $\Delta t$  нольге ұмтылған кезде (3.1) қатынасы белгілі бір шекке ұмтылатынын көрсетеді. Бұл шек қозғалыстағы нүктенің  $t$  уақыт мезетіндегі жылдамдығы деп аталады. Жоғарыдағы айтылған символ түрінде былай жазылады:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

† Сонымен, жылдамдық деп  $\Delta t$ -нің шектелмей кемігенінде  $\Delta \mathbf{r}$ -дің  $\Delta t$ -ге қатынасының ұмтылатын шегін айтады. Олай болса, жылдамдықты қозғалыстағы нүктенің уақыт бойынша алынған радиус-векторының туындысы ретінде былай анықтауға болады:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.3)$$

Жылдамдықтың анықтамасынан оның векторлық шама екені шығады. 17-суреттен  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  векторы траектория үшін қима болып табылатынын көреміз. Шекке өту кезінде



17-сурет.

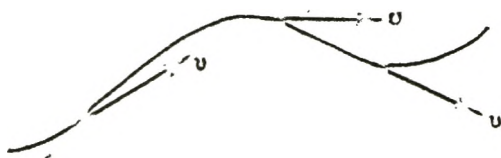
(3.2) осьі вектордың қиылысу нүктесі траекториямен тым жақындай түседі де ( $\Delta s$  нольге ұмтылады) ақырында бірігіп кетеді, осының салдарынан қиюшы жанамаға айналады. Сөйтіп, жылдамдық векторы сәйкес нүктеде (18-сурет) траекторияға жүргізілген жанама бойымен бағытталған болып шығады.



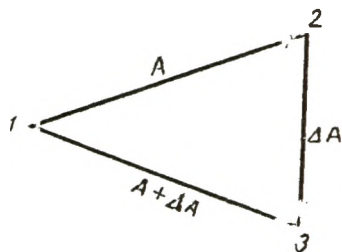
(3.2) формулаға сәйкес жылдамдық векторының модулы мына төмендегідей жазылады:

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Бұл өрнекте  $|\Delta \mathbf{r}|$ -дің орнына  $\Delta r$  деп жазуға болмайды.  $|\Delta \mathbf{r}|$  символы  $\mathbf{r}$  векторының өсімшесінің модулын



18-сурет.



19-сурет.

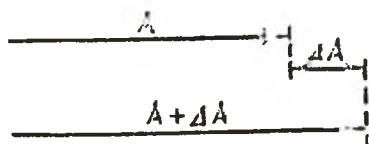
білдіреді, ал сол уақытта  $\Delta r$  —  $\mathbf{r}$  векторының модулының  $\Delta |\mathbf{r}|$  өсімшесін көрсетеді. Бұл екі шама бір-біріне тең емес:

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta |\mathbf{r}| = \Delta r$$

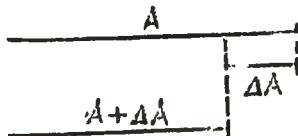
Мұны мына мысалдан көруге болады (19-сурет). Айталық, кейбір  $\mathbf{A}$  векторы, оның модулы өзгермейтіндей  $\Delta A$  өсімшесін алсын делік:

$$|\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Олай болса,  $\mathbf{A}$  векторының модулының өсімшесі нольге тең ( $\Delta |\mathbf{A}| = \Delta A = 0$ ). Сол кезде  $|\Delta \mathbf{A}|$  векторының өсімшесінің модулы нольге тең болмайды (ол 2—3 кесіндісінің ұзындығы-

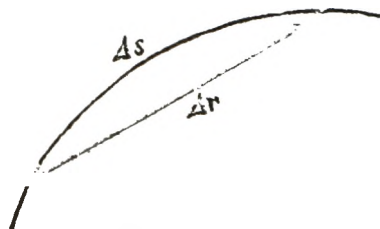


$$\Delta |\mathbf{A}| = |\Delta \mathbf{A}|$$



$$\Delta |\mathbf{A}| = -|\Delta \mathbf{A}|$$

20-сурет.



21-сурет.

на тең). 20-сурет берілген  $|\Delta \mathbf{A}|$  да  $\Delta |\mathbf{A}|$  модуль өсімшесінің —  $|\Delta \mathbf{A}|$ -дан  $+|\Delta \mathbf{A}|$ -ға дейінгі шектер мәні болатынын анықтайды.

Элементар  $\Delta s$  жолы, жалпы айтқанда, шамасы жағынан элементар өсімшенің  $|\Delta r|$  модулынан өзгеше (21-сурет). Алайда, егер  $\Delta s$  жолдың кесіндісі мен азғана  $\Delta t$  уақыт аралығына сәйкес келетін  $\Delta r$  өсімшесін алсақ, онда  $\Delta s$  пен  $|\Delta r|$ -дің айырмашылығы шамалы болады, сонымен бірге  $\Delta t$  кемігенде  $\Delta s$  үдемелі дәлдікпен  $|\Delta r|$ -мен беттесіп кетеді. Осының негізінде былай жазуға болады:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

бұдан (3.4)-ке сәйкес жылдамдық модулы үшін мына формуланы аламыз:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.5)$$

#### § 4. Жүріп өткен жолды есептеп шығару

(3.5) өрнектен  $\Delta t$  аз болған кезде

$$v \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Соңғы жуықтатылған теңдік  $\Delta t$  неғұрлым кіші болса, соғұрлым дәлірек орындалатын болады. Егер  $v$  жылдамдығының шамасы  $t$  уақыт функциясы ретінде белгілі болса, нүктенің  $t_1$  мезеттен  $t_2$  мезетке дейінгі жүріп өткен жолын есептеп шығаруға болады. Ол үшін  $t_2 - t_1$  уақыт аралығын шамасы бойынша әр түрлі  $N$  аз уақыт аралықтарға бөлеміз, яғни  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$ . Нүктенің жүріп өткен бүкіл  $s$  жолын  $\Delta t$  уақыт аралығына сәйкес жүрілген  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_N$  жолдардың қосындысы ретінде қарастыруға болады:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i^1$$

(4.1) мен сәйкес әрбір қосылғыш  $\Delta s_i$ -ді жуықтап мына түрде жазуға болады ( $i=1$ -ден  $N$ -ге дейінгі кез келген сан)

$$\Delta s_i \cong v_i \Delta t_i,$$

<sup>1</sup> Бірдей  $N$  қосылғыштардың қосындысын қысқаша осылай деп жазу қабылданған.

мұндағы  $\Delta t_i$  — жүріп өткен  $\Delta s_i$  жолға кеткен уақыт аралығы, ал  $v_i$  —  $\Delta t_i$  уақыт ішіндегі жылдамдық мәнінің бірі.

Сонымен,

$$s \cong \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (4.2)$$

Жазылған теңдік неғұрлым  $\Delta t_i$  уақыт аралығы аз болса, соғұрлым дәлірек орындалатын болады. Барлық  $\Delta t_i$  -дің нольге ұмтылғандағы шекте сол жақтағы қосынды  $s$ -ке нақтылы тең болады: (бұл жағдайда  $\Delta t_i$  аралықтарының мөлшері шектелмей өсетін болады)

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (4.3)$$

Жылдамдық дегеніміз уақыт функциясы:  $v = v(t)$ . Математикада  $a$ -дан  $b$ -ге дейінгі шекте жататын  $x$ -тің мәні үшін құрылған

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i$$

түріндегі өрнек анықталған интеграл деп аталып, мына төмендегі символмен жазылады:

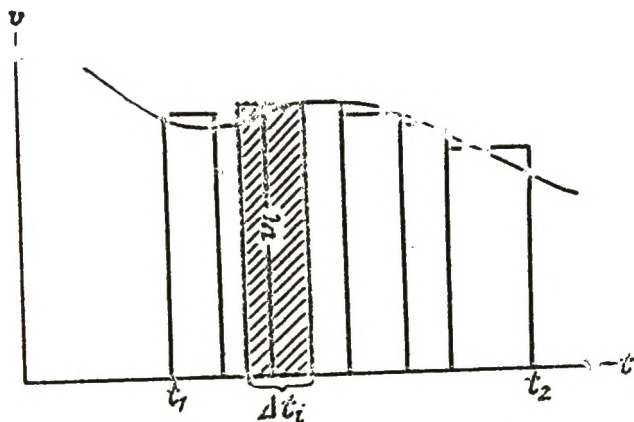
$$\int_a^b f(x) dx.$$

Демек, нүктенің  $t_1$ -ден  $t_2$ -ге дейінгі уақыт аралығында жүріп өткен жолы анықталған интегралға тең, яғни

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (4.4)$$

Жүріп өткен жолдың шамасын  $v$  жылдамдық шамасының  $t$  уақытқа тәуелділігінің қисықтығымен шектелген фигураның ауданы ретінде қарастыруға болады.  $v = v(t)$  функциясының графигін құрайық (22-сурет).  $v_i \Delta t_i$  көбейтіндісі сан мәні жағынан ( $i$ -ші) жазықтықтың штрихталған тілшенің ауданына тең. Осындай көбейтінділердің қосындысы  $t$  осімен  $t = t_1$  және  $t = t_2$  түзулерімен шектелген ауданға, сондай-ақ барлық ұқсас тілшелердің жоғарғы жағынан жасалған сынық сызықтарға тең болады.  $\Delta t_i$  нольге ұмтылған кезде барлық тілшелердің ені кемиді де (олардың саны бір мезгілде

өседі), сынық сызықтар өзінің шегінде  $v = v(t)$  қисықпен беттесіп кетеді. Сөйтіп,  $t_1$  мезеттен  $t_2$  мезетке дейінгі



22-сурет.

уақыт ішінде жүріп өткен жол  $s = v(t)$  графигімен,  $t$  уақыт осімен,  $t = t_1$  және  $t = t_2$  түзулерімен шектелген фигураның ауданына тең болады.

## § 5. Бір қалыпты қозғалыс

Жылдамдығы бағыты бойынша қалауынша өзгере отырып, шамасы жағынан тұрақты болып қалатын қозғалыс бір қалыпты деп аталады.

Бір қалыпты қозғалыста (4.3) формуладағы барлық  $v_i$  бірдей және  $v$ -ге тең болады. Жалпы көбейткіш  $v$ -ні қосындының белгісінің сыртына шығаруға болады:

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} v \sum \Delta t_i = v \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \Delta t_i.$$

Элементар уақыт аралықтарының қосындысы нүктенің  $s$  жүрген жолына<sup>1</sup> кеткен  $t$  уақытты береді. Сонымен, былай жазуға болады:

$$s = vt. \quad (5.1)$$

(5.1) формуладан бір қалыпты қозғалыс кезінде жылдамдық жүріп өткен<sup>1</sup>  $s$  жолды  $t$  уақытқа бөлгенге тең, яғни:

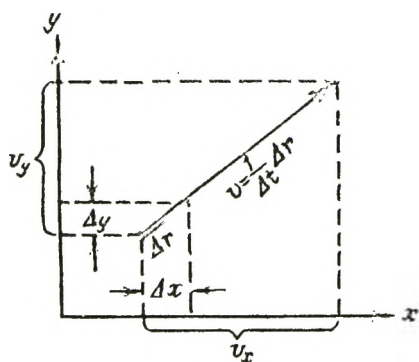
<sup>1</sup>  $t$  әрпі уақыт аралығын (берілген жағдайда жасалғандай белгілеу ретінде де, уақыт мезетін (3-параграфтың басында жасалғандай) белгілеу ретінде де қолданыла алады. Осы екі жағдайды айыра білген дұрыс.

$$v = \frac{s}{t}. \quad (5.2)$$

(5.2) бойынша жылдамдық шамасы жағынан бір қалыпты қозғалыс кезінде қозғалыстағы нүктенің бірлік уақыт ішінде жүріп өткен жолына тең. Бір қалыпсыз қозғалыс кезінде олай байымдау дұрыс емес. Мұндай жағдайда жылдамдық берілген  $t$  уақыт мезетінде шамасы жағынан нүктенің, егер ол  $t$  мезетіндегі жылдамдығының мәнін одан әрі сақтай алатын болса, бірлік уақыт ішінде жүріп өткен жолына тең болады.

### § 6. Координаталық осьтердегі жылдамдық векторының проекциялары

Жылдамдықты анықтайтын (3.2) өрнектегі шек таңбасынан кейін вектор  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  түр. (3.2) -дегі осы вектордың орнына оның кез келген бағыттағы проекциясын алып, біз сол бағыттағы  $v$  векторының проекциясын аламыз:



23-сурет.

$$\text{пр. } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{пр. } \Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (6.1)$$

23-суреттен координаталар осіндегі  $\Delta \mathbf{r}$  векторының проекциясы нүктенің координаталардағы сәйкес өсімшелеріне тең:

$$(\Delta \mathbf{r})_x = \Delta x;$$

$$(\Delta \mathbf{r})_y = \Delta y;$$

$$(\Delta \mathbf{r})_z = \Delta z.$$

Осы өрнектерді (6.1) формулаға қойып, координаталық осьтердегі жылдамдық векторының проекцияларын аламыз:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$$

Физикада  $t$  уақыты бойынша алынған шамалардың туындыларын олардың үстіне нүкте қойылған сәйкес шамалардың символымен белгілеу қабылданған, мысалы:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \text{ т. б.}$$

Осы белгілерді пайдалана отырып, координаталық осьтердегі векторының проекцияларын былай жазуға болады:

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}. \quad (6.2)$$

$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{r}}$  деп ұйғарып, (2.11) формуладан (6.2) формуланы шығарып алуымызға болатынын ескерте кетелік.

## § 7. Үдеу

2-параграфта вектордың туындысы жайында айтылғандарға сәйкес материялық нүктенің  $v$  жылдамдығының  $t$  уақыт бойынша өзгеру шапшаңдығы

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (7.1)$$

шамасымен сипатталады. Бұл шама нүктенің үдеуі деп аталады.

Егер үдеу уақыттың функциясы ретінде алынса және бастапқы мезеттегі ( $t=0$  болғанда)  $v_0$  жылдамдық белгілі болса, онда кез келген  $t$  уақыт мезетіндегі  $v$  жылдамдықты табуға болады.

Мұны

$$v = v_0 + \int_0^t w dt$$

формуласымен жүзеге асырамыз.

$w$  тұрақты болған жағдайда

$$v = v_0 + wt. \quad (7.2)$$

Жылдамдық векторын

$$v = i v_x + j v_y + k v_z = i \dot{x} + j \dot{y} + k \dot{z}$$

түрінде көрсетелік. [(6.2)-ні қараңыз.]

Бұл өрнекті  $t$  бойынша дифференциалдап, мынаны аламыз:

$$w = \frac{dv}{dt} = i \frac{d}{dt}(\dot{x}) + j \frac{d}{dt}(\dot{y}) + k \frac{d}{dt}(\dot{z}).$$

Бірақ  $\frac{d}{dt}(\dot{x})$  —  $x$ -тің  $t$  бойынша екінші туындысы, мұ-

ны  $\ddot{x}$  символымен беруге болады. Осыған ұқсас

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \ddot{y}, \quad \frac{d}{dt}(z) = \dot{z}.$$

Демек,

$$w = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\dot{z}. \quad (7.3)$$

(7.3)-ті (2.8) формуласымен салыстыра отырып, координаталық осьтердегі үдеу векторының проекциясына арналған мына өрнекке оңай көшуге болады:

$$\omega_x = \ddot{x}, \quad \omega_y = \ddot{y}, \quad \omega_z = \dot{z}. \quad (7.4)$$

## § 8. Түзу сызықты бір қалыпты айнымалы қозғалыс

Түзу сызықты қозғалыста жылдамдық векторы әр уақытта бір түзудің — траекторияның бойымен бағытталған болады, осының салдарынан  $w$  векторының бағыты  $v$  векторының бағытымен бағыттас немесе оған қарама-қарсы болады. Егер  $w$  бағыты бойынша  $v$ -мен бағыттас болса, онда жылдамдық шама жағынан артады, ал қозғалыс үдемелі болады.  $w$  бағыты бойынша  $v$ -мен қарама-қарсы болған жағдайда жылдамдық кемиді, қозғалыс баяу болады.

Тұрақты үдеуі бар түзу сызықты қозғалыс бір қалыпты айнымалы делінеді. Жылдамдықтың уақыт бойынша өзгеріс-сипатына қарай қозғалыс бір қалыпты үдемелі және бір қалыпты баяу қозғалыс болып бөлінеді.

Бір қалыпты айнымалы қозғалыс кезінде (7.2) формуласы орынды, сонымен бірге оған енетін барлық  $v$ ,  $v_0$  және  $w$  векторлар бір түзудің бойымен бағытталған болады.  $v_0$  векторының бағытымен сәйкес келетін осы векторларды  $x$  осіне проекциялай отырып, мынаны аламыз:

$$v_x = v_{0x} + \omega_x t. \quad (8.1)$$

$v_x$ ,  $v_{0x}$  және  $\omega_x$  проекциялары, егер вектордың бағыты  $x$ -тің бағытымен бағыттас болса, «+» таңбамен алынған, егер вектордың бағыты мен  $x$ -тің бағыты қарама-қарсы болса «—» таңбасымен алынған сәйкес векторлардың модульдарына тең болады.

Әдетте түзу сызықты қозғалысты қарастырған кезде (8.1) теңдеуіндегі  $x$  индекстері түсіп қалады да былай жазылады:

$$v = v_0 + \omega t, \quad (8.2)$$

сонда (8.2) теңдеудегі шыққан шамаларды векторлар-

дың проекциялары ретінде қарастыруға болады. Ол үшін  $\omega$ -ны үдеу деп атап, және  $\omega_x$ -ның таңбасына қарай үдеуді оң не теріс деп есептейтін белгіленбеген (бірақ жалпы түрде қабылданған) терминологияға жүгінеміз. (8.2) функциясын нольден қандай да болсын  $t$  уақыт мезеті шегінде интегралдап, жүріп өткен жолдың формуласын табамыз [(4.4)-ті қараңыз]:

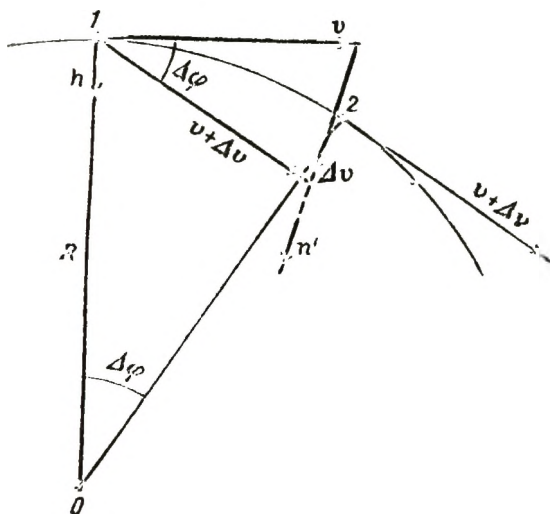
$$s = \int_0^t (v_0 + \omega t) dt = v_0 t + \frac{\omega t^2}{2}, \quad (8.3)$$

мұндағы  $\omega$  — алгебралық шама.

Бұл формуланың, егер  $t$  уақыт ішінде нүктенің қозғалыс бағыты (жылдамдық таңбасы) өзгермесе, жүріп өткен жол үшін дұрыс нәтиже беретінін атап өтелік.

### § 9. Қисық сызықты қозғалыстағы үдеу

Жалпы жағдайдағы үдеуді табуға кіріспестен бұрын, қисық сызықты қозғалыстың қарапайым түрі — шеңбер бойымен нүктенің бір қалыпты қозғалысын қарастыралық.



24-сурет.

Айталық, қарастырылғалы отырған  $t$  уақыт мезетінде нүкте  $1$  қалыпта тұрсын делік (24-сурет).  $\Delta t$  уақыт өткен соң нүкте  $1-2$  доғасына тең  $\Delta s$  жол жүре отырып,  $2$  қалыпқа келеді. Осы кезде нүктенің  $v$  жылдамдығы  $\Delta v$  өсімшесін алады, осының нәтижесінде жылдамдық



векторы шамасы жағынан (бір қалыпты  $|v| = \text{const}$  қозғалыста) тұрақты болып қалады да ұзындығы  $\Delta s$  доғаға тіреліп тұрған шамасы жағынан орталық бұрышпен сәйкес келетін  $\Delta\varphi$  бұрышына бұрылады:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (9.1)$$

мұндағы  $R$  — нүкте қозғалатын шеңбердің радиусы.

Жылдамдық векторының  $\Delta v$  өсімшесін табалық. Ол үшін  $(v + \Delta v)$  векторының басын  $v$  векторының басымен дәл келетіндей етіп ауыстырамыз. Сонда  $\Delta v$  векторы  $v$  векторының ұшынан  $(v + \Delta v)$  векторының ұшына жүргізілген кесіндімен кескінделеді. Бұл кесінді қабырғасы  $v$  және  $(v + \Delta v)$ , төбе бұрышы  $\Delta\varphi$  тең бүйірлі үшбұрыштың табаны болады. Егер  $\Delta\varphi$  бұрышы аса үлкен болмаса ( $\Delta t$  үшін орындалатын болса), бұл үшбұрыштың қабырғалары үшін жуықтап, былай жазуға болады:

$$|\Delta v| \cong v \Delta\varphi^1$$

$\Delta v$  векторын  $\Delta v$  сияқты, оның модулының бағыты осындай бірлік векторға көбейтіндісі түрінде өрнектеуге болады. Бұл бірлік векторды  $n'$  деп белгілейміз. Сонда

$$\Delta v = |\Delta v| n' \cong v \Delta\varphi n'$$

Осыған (9.1)-тен  $\Delta\varphi$ -ді қойып, мынаны аламыз:

$$\Delta v \cong v \frac{\Delta s}{R} n' \quad (9.2)$$

$\Delta v$ -ні  $\Delta t$ -ге бөліп және шекке көшіп, үдеуді аламыз:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} n'$$

Бұл өрнектегі  $v$  және  $R$  тұрақты;  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  қатынасы шекте  $v$  жылдамдығының модулын береді; ал  $n'$  векторы шекте  $l$  нүктесінде шеңберге және центрге бағытталған нормаль  $n$  бірлік векторымен беттесіп кетеді.

Сөйтіп,

$$w_n = \frac{v^2}{R} n. \quad (9.3)$$

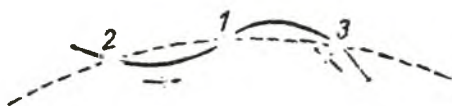
---

<sup>1</sup>  $\Delta v$  деп жазуға болмайды. Бұл жағдайда  $\Delta v = 0$ .

Біздің тапқан үдеуіміз нормаль бойымен траекторияға бағытталған; оны нормаль үдеу деп атап  $w_n$  [(9.3) өрнекте көрсеткеніміздей] деп белгілейміз. Нормаль үдеудің модулы

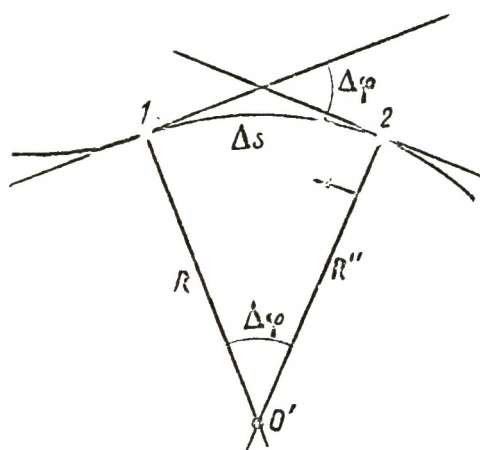
$$w_n = \frac{v^2}{R} \quad (9.4)$$

Траекторияның қисаюы неғұрлым көп болса, (шеңбердің радиусы неғұрлым кіші болса), соғұрлым  $v$  жылдамдықтың сол шамасындағы  $w_n$  де көп болады. Қисықтың өлшеміне шеңбердің қисықтығы деп аталатын  $1/R$  шамасы қабылданған.



25-сурет.

Қалауымызша алған қисық бойымен қозғалған нүктенің үдеуі де әр түрлі нүктелерде түрліше болатын траектория қисықтығына байланысты болады. Алдағы уақытта істі жеңілдету үшін біз тек жазық қисықтығын



26-сурет.

қарастырумен ғана шектелмекпіз. Жазық сызықтың әйтеуір бір нүктесіндегі қисықтық оның шектеусіз аз учаскесінде қисықтықпен берілген орынды беттесіп кететін шеңбер қисықтығына тең. Мұндай шеңберді берілген нүктедегі жазық сызықтың қисықтық дөңгелегі деп атайды. 1 нүктеде қисықтық дөңгелегін (25-сурет) алу үшін былай істеу керек. 1 нүктеге жақын жатқан қисықтағы 2 және 3

нүктелерін алайық. 1, 2 және 3 арқылы шеңбер жүргіземіз. 1 нүктеге 2 және 3 нүктелерін шектемей жақындатудан алынған осы шеңбердің шектік жағдайы қисықтық дөңгелегін береді. Бұл дөңгелектің радиусы 1 нүктедегі сызық қисықтығының радиусын, ал дөңгелек центрі — 1 нүктенің қисықтық центрін береді.

$C$  қисығының аналитикалық қисықтығы

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

өрнегімен анықталады, мұндағы  $\Delta\varphi$  бір-бірінен  $\Delta s$ -ке (26-сурет) қалып отыратын нүктелерден қисыққа жүргізілген жанамалар арасындағы бұрыш. Сөйтін, қисықтық қисық бағытының өзгеру жылдамдығымен, яғни қисықтың бойымен орын ауыстырғандағы жанамалардың бұрылыс жылдамдығымен сипатталады.  $C$ -ге кері шама  $R$  қисықтық радиусына тең. Осылай анықталған шеңбер жағдайында қисықтық радиусы шеңбер радиусымен дәл келетіндігіне көз жеткізу оңай.

26-суретке қайта оралайық.  $1$  және  $2$  нүктелердегі жанамаларға перпендикулярлар тұрғызалық. Бұл перпендикулярлар қандай да бір  $O'$  нүктесінде қиылысады. Сонымен қатар  $R'$  және  $R''$  аралықтары бірдей болмайды.  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$  қатынасын жасайық.  $\Delta s$  шамасын жуықтап  $R'\Delta\varphi$  арқылы ауыстыралық. Сонда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{1}{R'}$$

Соңғы жуықтатылған теңдік неғұрлым  $1$  және  $2$  нүктелері жақын болса, яғни неғұрлым  $\Delta s$  кіші болса, соғұрлым дәл болады.  $\Delta s$ -ті нольге ұмтылдырып, мынадай қисықтықты аламыз:

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R'}$$

Егер  $2$  нүктені шектеместен  $1$  нүктеге жуықтатсақ,  $O'$  перпендикулярлардың қиылысуы қисықтық центрі болатын қайсыбір нүктеге ұмтылады.  $R'$  және  $R''$  қашықтықтың екеуі де қисықтық радиусына тең бір  $R$  шекке ұмтылады.  $R$ -ге кері шама  $1$  нүктедегі сызықтың қисықтығын береді.

Енді қалауымызша алынған жазық қисығының бойымен қозғалған нүктенің үдеуін табалық.  $\Delta v$  жылдамдық өсімшесінің (нүктенің  $1$  қалпынан  $2$  қалпына ауысқанға кеткен  $\Delta t$  уақыт аралығына сәйкес келетін) векторын  $\Delta v_n$  және  $\Delta v_\tau$  екі құраушыға жіктейміз (27-сурет). Бұл құраушыларды  $1$  нүктеден  $\Delta v_n$  векторының ұшына дейінгі қашықтық алғашқы мезеттегі  $v$  жылдамдықтың модулына тең болатындай етіп таңдап аламыз. Сонда  $\Delta v_\tau$  векторының модулы жылдамдық модулының өсімшесі мынаған тең болады:

$$|\Delta v_\tau| = \Delta |v| = \Delta v.$$

$\tau'$  векторының бағытымен бірдей  $\Delta v_\tau$  бірлік векторын енгізе отырып, соңғыны мына түрде беруге болады:

$$\Delta v_{\tau} = \Delta v \tau' \quad (9.5)$$

Бізді (9.4) формулаға келтірген тұжырымды қайталай отырып, мынаны алуға болады:

$$\Delta v_n = v \frac{\Delta s}{R'} \mathbf{n}' \quad (9.6)$$

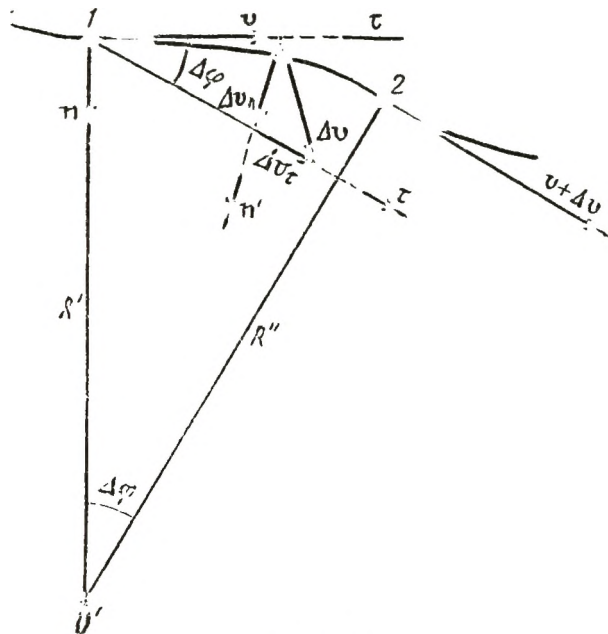
Анықтама бойынша толық үдеудің векторы мынаған тең:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n + \Delta v_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t}.$$

(9.6) -ны еске ұстап, мына теңдікті аламыз:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R'} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n}'$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$  шекте  $v$  жылдамдық модулын,  $R'$  —  $R$  қисықтық радиусын, ал  $\mathbf{n}'$  векторы —  $l$  нүктеде траекторияға жүр-



27-сурет.

гізілген нормальдың бірлік векторымен —  $\mathbf{n}$ -мен беттеседі. Осы шекті  $\mathbf{w}_n$  деп белгілейік:

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (9.7)$$

(9.5) есептеумен табылған екінші шек (оны  $\mathbf{w}_{\tau}$  деп белгілейік) мынаған тең:

$$\mathbf{w}_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tau'$$

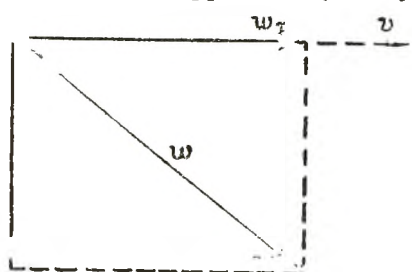
Шекке көшкенде  $\tau'$  векторы  $v$  жылдамдықтың бірлік векторына тепе-тең және  $l$  нүктесінде траекторияға жүргізілген жанама бойымен бағытталған бірлік вектормен —  $\tau$ -мен беттеседі [(2.6)-ны қараңыз]:

$$\tau = \frac{v}{v}.$$

Ең соңында,

$$w_\tau = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \tau = \frac{dv}{dt} \tau. \quad (9.8)$$

Сонымен,  $w$  векторы  $w_n$  және  $w_\tau$  екі вектордың қосындысы түрінде (28-сурет) берілуі мүмкін, оның бірі ( $w_n$ ) жылдамдық векторы  $v$ -ге перпендикуляр, әрі траекторияның қисықтық центріне бағытталған, ал екіншісі ( $w_\tau$ ) траектория жанамасының бойымен бағытталған болады. Егер жылдамдық шама бойынша  $\left( \frac{dv}{dt} \right)$  оң болғанда



артса, онда  $w_\tau$  қозғалыс бағытымен бағытталған, егер жылдамдық шама бойынша кемісе  $\left( \frac{dv}{dt} \right)$  теріс), онда  $w_\tau$  қозғалыс бағытына қарама-қарсы жаққа бағытталған болады.

$w_\tau$  векторын тангенциал үдеуі деп атайды. Ол шама бойынша жылдамдықтың өзгерісін сипаттайды. Егер жылдамдық шамасы бойынша өзгермесе, тангенциал үдеу нольге тең болады, яғни  $w = w_n$ .

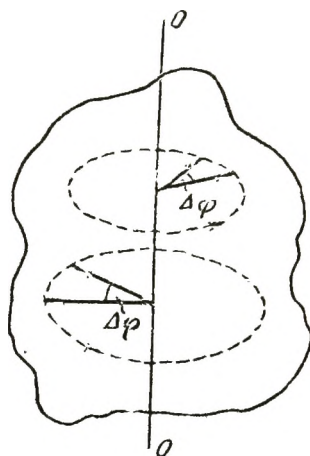
$w_n$  векторы (нормаль үдеу) жылдамдықтың бағыты бойынша өзгерісін сипаттайды. Егер жылдамдық бағыты өзгермесе, қозғалыс түзу сызықты траекториямен өтеді. Сонда түзудің қисықтығы нольге тең (қисықтық радиусы  $R$  шексіздікке сәйкес келеді), демек, нормаль үдеу нольге тең, яғни  $w = w_\tau$ .

Жалпы жағдайда толық үдеудің модулы мынаған тең (28-сурет):

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left( \frac{v}{R} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}$$

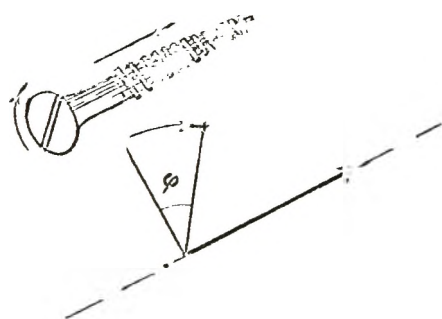
## § 10. Айналмалы қозғалыстың кинематикасы

Қандай болсын  $OO$  осінің (29-сурет) маңайында айналған абсолют қатты дененің барлық нүктелері центрі айналу осінде жатқан шеңбердің бойымен қозғалады. Әрбір нүктенің (центрден жүргізілген векторы шеңбердің берілген нүктесіне сәйкес келетін) радиус-векторы  $\Delta t$  уақыттың ішінде  $\Delta\varphi$  бұрышына — қатты дененің айналыс бұрышына бұрылады.



29-сурет.

Дененің қандай да болсын  $\varphi$  бұрышқа бұрылысын ұзындығы  $\varphi$ -ге тең кесінді түрінде беруге болады, ал оның бағыты бұрылыс жасалған осьпен сәйкес келеді. Берілген осьтің маңайындағы бұрылыстың қай жаққа қарай бұрылғанын білу үшін, бұрылу бағытын және оның кесіндісін кескіндейтін бұрғының оң ережесі деп аталатынды байланыстыруға келіселік. Бұл ереже бойынша кесіндінің бағыты былай болуға тиісті. Оның бойына қарап (30-сурет) біз сағат тілінің

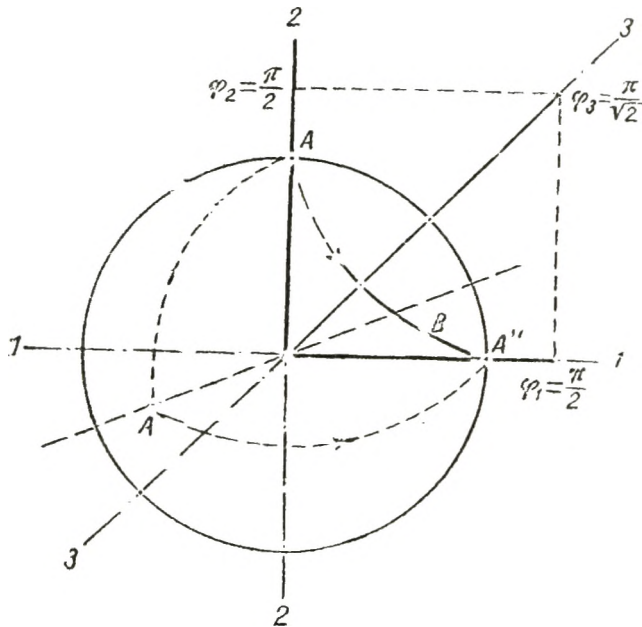


30-сурет.

бағытымен жасалатын бұрылысты көреміз (оң винттің басын сағат тілінің бағытымен айналдыра отырып, біз өзімізден алғандағы оның орын ауыстыруын тұғызамыз) Сөйтіп, дене бұрылысының сан мәнімен бағыты болады. Алайда бұрылысты вектор түрінде есептеу үшін мұның өзі жеткіліксіз — осындай тәсілмен кескінделетін бұрылыс па-

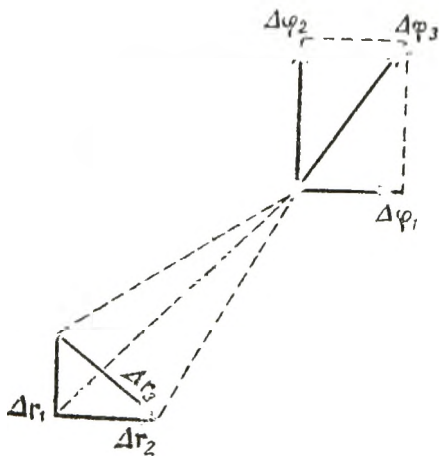
раллелограмм ережесі бойынша салынуы керек. Кез келген шамалардың бұрылыстары үшін соңғы шарт орындалмайды. Мұны сфера айналысының мысалынан көрелік (31-сурет). Сфераның  $1-1$  осьтің маңайында  $\pi/2$  бұрышқа бұрылысы (бұл бұрылыс  $\varphi_1$  кесіндісімен кескінделген) және келесі  $2-2$  осьтің маңайында  $\pi/2$  ( $\varphi_2$  кесіндісі) бұрышқа бұрылысы  $A$  сферасының нүктесінің алдымен  $A'$  қалпына, содан кейін  $A''$  қалпына орын ауыс-

тыратындығын көрсетеді. Параллелограмм ережесі бойынша  $\varphi_1$  және  $\varphi_2$  арқылы алынған  $\varphi_3$  кесіндісімен



31-сурет.

кескінделетін (бұл кесіндінің ұзындығы  $\pi/\sqrt{2}$  болады) бұрылыс  $A$  нүктесін  $A''$  нүктесімен беттеспейтін  $B$  қалпына әкеледі. Демек,  $\varphi_3$  кесіндісімен кескінделетін бұрылыс бірінен соң бірі болатын  $\varphi_1$  және  $\varphi_2$  бұрылысымен мәні жағынан тең емес, сондықтан да оның қосындысы болмайды. Сөйтіп, дененің ось маңайындағы бұрылысын бағытталған кесінді түрінде кескіндегенмен де оны вектор деп есептемейтіндігімізге көзімізді жеткіздік.



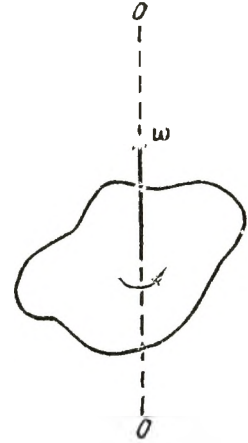
32-сурет.

Ал өте кішкентай  $\Delta\varphi$  бұрылыс бұрыштары үшін сөз басқаша. Дененің кез келген нүктесінің өте кішкентай бұрылыс кезіндегі жолын түзу сызықты деп қарау керек. Бірінен соң бірі келетін екі кішкентай  $\Delta\varphi_1$  және

$\Delta\varphi_2$  бұрылыстар, 32-суреттен байқағанымыздай, параллелограмм ережесі бойынша  $\Delta\varphi_1$  мен  $\Delta\varphi_2$ -ден алынған  $\Delta\varphi_3$  бұрылыс сияқты, дененің кез келген нүктесінің  $\Delta r_1 + \Delta r_2$  орын ауыстыруын туғызады. Осымен өте аз бұрылыстардың өзін векторлар (біз оны  $\Delta\varphi$  немесе  $d\varphi$  түрінде жазатын боламыз) сияқты қарастыруға болады.

$d\varphi$  векторының бағытын біз дененің айналу бағытымен байланыстыра отырып анықтадық.  $v$  жылдамдық,  $w$  үдеу,  $r$  радиус-вектор сияқты шамаларды қарастырғанда олардың бағытын таңдап алу жөнінде сұрақ тумаса керек: ол шамалардың өз табиғатынан алынған нәрсе. Осы сияқты векторлар полярлық векторлар деп аталады. Бағыты айналу (немесе айнала өту) бағытымен байланысқан  $d\varphi$  типтегі векторлар аксиальды векторлар деп аталады.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (10.1)$$



33-сурет.

түріндегі векторлық шама (мұндағы  $\Delta t$  —  $\Delta\varphi$  бұрылысын жасауға кеткен уақыт) дененің бұрыштық жылдамдығы делінеді<sup>1</sup>.  $\omega$  векторы маңайындағы дене бұрғы сабының оңға айналу ережесімен анықталған жаққа айналатын осьтің бойымен бағытталады да аксиальды векторды береді (33-сурет).

Бұрыштық жылдамдық векторының модулы  $\frac{d\varphi}{dt}$  -ге тең. Тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналысты бір қалыпты дейміз, бұл жағдайда  $\omega = \varphi/t$ . Сөйтіп,  $\omega$  бір қалыпты айналыс кезінде бірлік уақыттың ішінде дененің қандай бұрышқа бұрылғанын көрсетеді.

Бір қалыпты айналысты дененің бір айналым жасауына, яғни  $2\pi$  бұрышқа бұрылуына кететін уақыт деп түсінетін  $T$  айналу периодымен сипаттауға болады.

<sup>1</sup> Біздің бұрын қарастырған  $v$  жылдамдықты бұрыштық жылдамдықтан айыру үшін, оны сызықтық деп атайды. Келешекте бұл түсініспеушілікке келтірген жағдайда «сызықтық» сөзін қолданбаймыз.



$\Delta t = T$  уақыт аралығына  $\Delta\varphi = 2\pi$  бұрылыс бұрышы сәйкес келетіндіктен де:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (10.2)$$

бұдан

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.3)$$

екендігі шығады.

Бірлік уақыт ішіндегі  $\nu$  айналым саны мынаған тең болатыны айқын:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10.4)$$

(10.4) формуладан бұрыштық жылдамдық бірлік уақыттағы айналым санын  $2\pi$ -ге көбейткенге тең, яғни

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (10.5)$$

Бірлік уақыт ішіндегі айналу периоды мен айналым саны туралы ұғымды бір қалыпты емес айналыс үшін де, егер дене бұрыштық жылдамдықтың берілген лездік мәнімен бір қалыпты айналса, оның бір айналым жасауына кеткен уақытын  $T$  лездік мәні деп, ал  $\nu$ -ді осы жағдайда дененің бірлік уақыт ішінде жасалған айналым саны деп түсіне отырып сақтауға болады.

$\omega$  векторы осьтің айналасындағы дене айналысының жылдамдық өзгерісінің есебінен де, сондай-ақ кеңістікте (бұл жағдайда  $\omega$  бағыты бойынша өзгереді) айналыс осінің бұрылысы есебінен де өзгере алады.  $\Delta t$  уақыттың ішінде  $\omega$  векторы  $\Delta\omega$  өсімше алсын делік. Уақытқа байланысты бұрыштық жылдамдық векторының өзгерісі бұрыштық үдеу деп аталатын

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (10.6)$$

шамасымен сипатталады,  $\beta$  векторы  $\omega$  векторы сияқты аксиальды деп аталады.

Кеңістікте айналу осінің бағыты тұрақты болғанда, бұрыштық жылдамдық тек шама жағынан ғана өзгереді де  $|\Delta\omega| = |\Delta\omega|$  болады. Бұл жағдайда (10.6) формуладан бұрыштық үдеудің модулы үшін мына төмендегі өрнек орындалады:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \quad (10.7)$$

Егер  $\beta$  деп  $\omega$  бағытындағы  $\beta$  векторының проекциясын түсінсек, онда (10.7) формуласы төмендегідей жазылады:

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (10.8)$$

(10.8) формуладағы  $\beta$  — егер  $\omega$  уақытқа байланысты өсетін болса (бұл жағдайда  $\beta$  және  $\omega$  векторлары бірдей бағыт алса). оң, егер  $\omega$  кемитін (бұл жағдайда  $\beta$  және  $\omega$  бағыттары қарама-қарсы) болса, теріс алгебралық шама.

Айналатын дененің жеке нүктелерінің әр түрлі  $v$  сызықтық жылдамдығы болады. Әрбір нүктенің жанама бойымен сәйкес шеңберге бағытталған жылдамдығы өзінің бағытыш үздіксіз өзгертіп отырады.  $v$  жылдамдығының шамасы дененің  $\omega$  айналуы жылдамдығымен және қарастырылатын нүктенің айшулу осінен  $R$  қашықтығымен анықталады. Айталық  $\Delta t$  аз уақыт аралықта дене  $\Delta\varphi$  бұрышқа бұрылсын делік (34-сурет). Осьтен  $R$  қашықтықта тұрған нүкте бұл кезде  $\Delta s$  жол жүреді, ол мынаған тең болады:

$$\Delta s = R\Delta\varphi.$$

Нүктенің сызықтық жылдамдығы анықтама бойынша мынаған тең болады:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \\ &= R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \end{aligned}$$

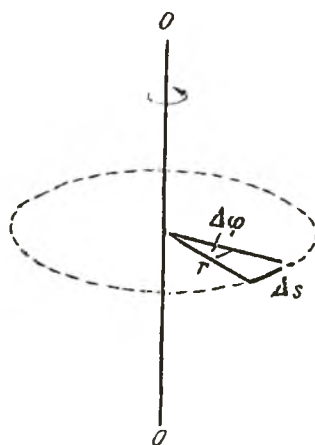
яғни

$$v = \omega R. \quad (10.9)$$

Сонымен, нүкте неғұрлым айналу осінен алыс болса, соғұрлым ол үлкен сызықтық жылдамдықпен қозғалатын болады.

Айналып тұрған дене нүктелерінің сызықтық үдеуін табалық. (9.4) формулаға сәйкес нормаль үдеу мынаған тең:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$



34-сурет.

Осы өрнекке (10.9)-ғы  $v$ -нің мәнін орнына қойып,

$$\omega_n = \omega^2 R \quad (10.10)$$

екенін табамыз.

(9.8)-ге сәйкес тапгенциал үдеудің модулы  $\left| \frac{dv}{dt} \right|$ -ге тең. Тағы да (10.9) теңдеуді пайдалана отырып, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \omega_\tau &= \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \\ &= \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\omega, \end{aligned}$$

яғни

$$\omega_\tau = \beta R. \quad (10.11)$$

Сөйтіп, нормаль үдеу сияқты тангенциал үдеу де  $R$ -мен — нүктенің айналу осінен қашықтығымен сызықтық түрде артады.

## § 11. $v$ және $\omega$ векторларының арасындағы байланыс

Бұдан бұрын қарастырылған векторларды қосу және азайту, сондай-ақ векторларды скалярға көбейту амалдарынан басқа (2-параграфты қараңыз), векторларды көбейту амалдары да бар. Екі векторды бір-біріне екі тәсілмен көбейтуге болады. Бірінші тәсілдің нәтижесінде жаңа векторды алсақ, екіншісі — скаляр шамаға келтіреді. Векторды векторға бөлу амалының болмайтынын ескерте кетелік.

Векторлардың векторлық көбейтіндісін қарастырылық. Векторлардың скаляр көбейтіндісін біз соңыра, қажет деп тапқан кезде енгіземіз.

$A$  және  $B$  екі вектордың векторлық көбейтіндісі деп төмендегі қасиетке ие болатын  $C$  векторын атаймыз:

1)  $C$  векторының модулы көбейтілетін векторлар модулын олардың арасындағы синус  $\alpha$  бұрышына көбейткенге тең (35-сурет) болады, яғни

$$C = AB \sin \alpha;$$

2)  $C$  векторы  $A$  және  $B$  векторы жатқан жазықтыққа перпендикуляр, сонымен қатар оның бағыты бұрғы сабының оңға бұрылу ережесіне сәйкес келетін  $A$  және

В бағытымен байланысты болады: егер С векторының жүрісіне қарайтын болсақ, бірінші көбейткіштен екіншісіне қарай ең қысқа жолмен жасалған бұрылыс сағат тілінің бағытымен болады.

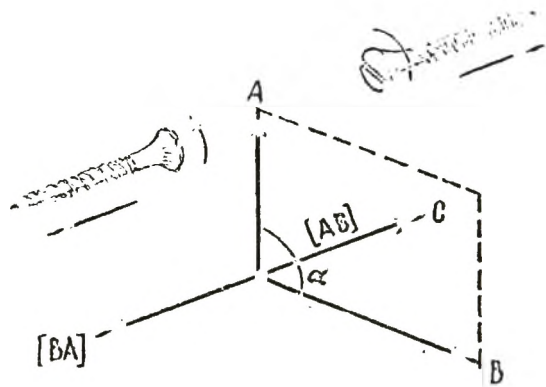
Векторлық көбейтіндіні символ түрінде мынадай екі тәсілмен жазуға болады:

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] \text{ немесе } \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Біз осы тәсілдердің біріншісін пайдаланамыз, оның үстіне формулаларды оңай оқу үшін көбейткіштердің арасына үтір қоямыз. Бір мезгілде қиғаш крест пен квадрат жақшаны  $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$  қолдануға болмайды.  $[\mathbf{A}\mathbf{B}] = AB \sin \alpha$  деп те жазуға болмайды. Мұнда сол жақта вектор, ол оң жақта осы вектордың модулы, яғни скаляр түр. Сонда теңдікті былай жазған дұрыс:

$$|[\mathbf{A}\mathbf{B}]| = AB \sin \alpha. \quad (11.1)$$

Векторлық көбейтіндінің бағыты бірінші көбейткіштен екінші көбейткішке қарай айналу бағытымен анықталатындықтан да екі вектордың векторлық көбейтіндісінің нәтижесі көбейткіш реттеріне тәуелді болады. Көбейткіш реттерінің өзгерісі құраушы вектор бағытының қарама-қарсы жаққа өзгерісін туғызады (35-сурет)



35-сурет.

$$[\mathbf{B}\mathbf{A}] = -[\mathbf{A}\mathbf{B}]$$

немесе

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

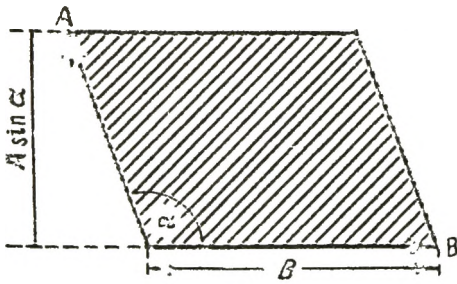
Сөйтіп, векторлық көбейтіндінің коммутативтік қасиеті болмайды.

Векторлық көбейтіндінің дистрибутивті екенін дәлелдеуге болады, яғни

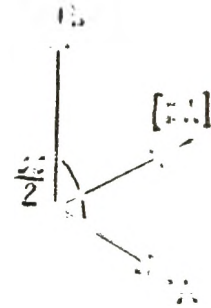
$$[\mathbf{A}, (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_N)] = [\mathbf{A}\mathbf{B}_1] + [\mathbf{A}\mathbf{B}_2] + \dots + [\mathbf{A}\mathbf{B}_N]. \quad (11.2)$$

Екі полярлық немесе екі аксиальды вектордың векторлық көбейтіндісі аксиальды вектор болады. Аксиаль-

ды вектордың полярға (немесе керісінше) векторлық көбейтіндісі, алайда, полярлық вектор болады. Аксиальды вектордың бағытын анықтайтын өзгеріс, керісінше жағдайда векторлық көбейтіндінің алдындағы және кө-



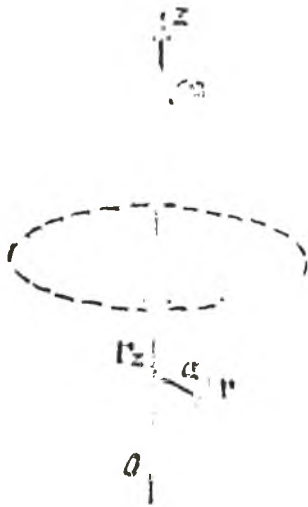
36-сурет.



37-сурет.

бейткіштердің бірінің алдындағы таңбаның өзгерісіне әкеледі. Осының нәтижесінде векторлық көбейтіндіні өрнектейтін шама өзгеріссіз қалады.

Векторлық көбейтіндінің модулына геометриялық интерпретация беруге болады:  $AB \sin \alpha$  өрнегі сан мәні жағынан  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторларымен құрылған параллелограмм ауданына тең болады (36-сурет;  $\vec{C} = [\vec{A}\vec{B}]$  векторы бұл жағдайда чертеждің жазықтығына, чертеждің сыртына перпендикуляр бағытталған)



38-сурет.

Айталық,  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторы өз ара перпендикуляр болсын делік (37-сурет) Бұл векторлардың қос векторлық көбейтіндісін жасалық

$$\vec{D} = [\vec{A}, [\vec{B}\vec{A}]],$$

яғни  $\vec{B}$ -ні векторлы  $\vec{A}$ -ға көбейтіп, соңынан бірінші көбейтіндіден шыққан векторға  $\vec{A}$ -ны векторлы көбейтеміз.  $[\vec{B}\vec{A}]$  вектордың  $BA (\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1)$ -ға тең модулы

болады және  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторымен  $\pi/2$ -ге тең бұрыш жасайды. Демек,  $\vec{D}$  векторының модулы мынаған тең:  $|\vec{A}| |[\vec{B}\vec{A}]| = A BA = A^2 B$ .  $\vec{D}$  векторының бағыты  $\vec{B}$  век-

торының бағытымен дәл келетінін 37-суреттен оңай көруге болады.

Мұның өзі келесі теңдікті жазуымызға негіз болады:

$$[A, [BA]] = A^2B. \quad (11.3)$$

(11.3) формуланы біз келешекте бірнеше қайтара пайдаланатын боламыз. Бұл  $A$  және  $B$  векторы өз ара перпендикуляр болған жағдайда дұрыс болатынын атап кетелік.

(10.9) теңдеуі  $v$  және  $w$  векторының модульдарының арасындағы байланысты орнатады. Векторлық көбейтінді арқылы векторлардың өздерінің арасындағы қатысты беретін өрнек жазылуы мүмкін. Айталық, дене  $z$  осінің маңайында  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен айналсын делік (38-сурет). Біз тапқымыз келген нүктенің  $v$  жылдамдығы ( $\omega$ -ның радиус-вектор  $r$ -ге көбейтіндісі), бағыты бойынша  $v$  векторымен бірдей және модулы  $\omega r \sin \alpha = \omega R$ -ге, яғни  $v$ -ге тең [(10.9) формуланы қараңыз] вектор екенін оңай көруге болады. Сөйтіп,  $[\omega r]$  векторлық көбейтінді бағыты бойынша және модулы бойынша  $v$  векторына тең, яғни

$$v = [\omega r]. \quad (11.4)$$

(11.4) формулаға басқаша түр беруге болады. Ол үшін  $r$  радиус-векторын екі құраушының —  $z$  осіне параллель  $r_z$  векторы мен  $z$  осіне перпендикуляр  $R$  векторының қосындысы түрінде өрнектейміз:  $r = r_z + R$  (38-суретті қараңыз). Осы өрнекті (11.4) формуласына қойып, вектор көбейтіндісінің дистрибутивтігін пайдаланып [(11.2)-ді қараңыз], мынаны аламыз:

$$[\omega r] = [\omega (r_z + R)] = [\omega r_z] + [\omega R].$$

$\omega$  және  $r_z$  векторлары коллинеарлы. Сондықтан да олардың векторлық көбейтіндісі нольге тең ( $\sin \alpha = 0$ ). Демек, былай жазуға болады.

$$v = [\omega R]. \quad (11.5)$$

Келешекте, айналмалы қозғалысты қарастырғанда,  $z$  осьтің бойындағы нүктеден жүргізілген  $r$  радиус-векторының айналыс осіне перпендикуляр құраушысын  $R$  арқылы белгілейміз. Бұл вектордың модулы осьтен алынған нүктенің  $R$  қашықтығы болады.

## II ТАРАУ МАТЕРИАЛЫҚ НҮКТЕНІҢ ДИНАМИКАСЫ

### § 12. Классикалық механика. Оның қолданымдылығының шекарасы

Кинематика дененің басқаша емес, атап айтқанда, (мысалы, шеңбер бойымен бір қалыпты немесе түзу бойымен бір қалыпты үдемелі) тап осылай қозғалатындығы жөніндегі мәселені қозғамай дене қозғалысын сипаттайды.

Динамика бірдей сипаттағы қозғалыс жағдайынан болған себептерге (денелердің өз ара әсерлері) байланысты дене қозғалысын зерттейді.

Классикалық немесе ньютон механикасы деп аталатын заңдардың негізінде 1687 жылы Ньютон тұжырымдаған динамиканың үш заңы жатыр.

Ньютон заңдары (физиканың басқа заңдары сияқты) көптеген мөлшердегі тәжірибе фактілерін жинақтаудың нәтижесінде шықты. Олардың дұрыстығы (аса кең көлемді болмаса да құбылыстың шектеулі аумағындағы) осылардан шыққан тәжірибелерге сәйкес анықталады.

Ньютон механикасы соңғы екі жүз жылдықтың ішінде тамаша жетістіктерге ие болғаны сондай, оның күдіреттілігінде XIX-ғасырдың көптеген физиктерінің көзі жетті. Кез келген физикалық құбылысты түсіндіру Ньютон заңына бағынатын механикалық процеске оны көшіру деп есептелінген. Алайда ғылымның дамуымен жаңа фактілер табылды, бұл классикалық механиканың аумағына симады. Бұл фактілер жаңа теорияларда — салыстырмалылық және кванттық механиканың арнаулы теориясында өзінің түсінігін алды.

1905 жылы Эйнштейн жасаған салыстырмалылықтың

арнаулы теориясында уақыт және кеңістік жөніндегі Ньютон ұйғарымдары түбегейлі қайта қаралды. Бұл қайта қарау «Жоғары жылдамдықтағы механиканың» немесе релятивистік деп аталатын механиканың шығуына әкеп соқты. Алайда жаңа механика ескі Ньютон механикасын толық теріске шығара алмады. Релятивистік механиканың шектегі теңдеуі (жарық жылдамдығымен салыстырғанда аз, жылдамдық үшін) классикалық механиканың теңдеуіне көшеді. Сөйтіп, классикалық механика релятивистік механиканың дербес жағдайы ретінде енді де, жарық жылдамдығынан едәуір аз жылдамдықтан туатын қозғалысты сипаттау үшін өзінің бастапқы мәнін сақтап қалды.

Атом физикасының дамуы нәтижесінде біздің ғасырымыздың 20-шы жылдарында пайда болған кванттық-механика мен классикалық механиканың арасындағы қатынас жағдайы да осы сияқты. Кванттық механиканың теңдеуін де классикалық механиканың теңдеуінің шегінде (атомдардың массаларымен салыстырғанда үлкен массалар үшін) береді. Демек, классикалық механика кванттық механикаға оның шектік жағдайы ретінде енді.

Сөйтіп, ғылымның дамуы классикалық механиканы жоққа шығарған жоқ, тек оның шектеулі қолданылатындығын ғана көрсетті. Ньютон заңына негізделген классикалық механика — аз жылдамдықпен (жарықтың жылдамдығымен салыстырғанда) қозғалатын массасы (атомның массасымен салыстырғанда) үлкен денелердің механикасы.

### § 13. Ньютонның бірінші заңы. Инерциялық санақ системалары

Ньютонның бірінші заңы төмендегіше тұжырымдалады: *кез келген дене өзінің тыныштықтағы немесе бір қалыпты, түзу сызықтағы күйін, оның осы күйін өзгертетін басқа бір денелер сырттан әсер еткенге дейін, сақтап тұрады.* Аталған екі күй дене үдеуі нольге тең болғандықтан да бір-бірінен өзгеше болады. Сондықтан бірінші заңның тұжырымына төмендегіше түр беруге болады: *кез келген дененің жылдамдығы, оның өзгерісін туғызатын басқа бір денелер жағынан әсер болғанға дейін, тұрақты (мысалы, нольге тең) болып қалады.*



Белгілі бір дәрежеде басқа бір дененің әсеріне ұшырамайтын дененің табиғатта болмайтындығын ескерте кеткен жөн. Іс жүзінде байқалатын тыныштық немесе бір қалыпты және түзу сызықты қозғалыс жағдайында да әсерлері бірін-бірі теңгеретін денелермен істес боламыз. Мысалы, стол үстінде жатқан кітапқа жердің тартуы әсер етеді, сондай-ақ, стол да оған қысым түсіреді, сонымен қатар бұл екі әсерлесу бірін-бірі теңгереді де нәтижесінде кітап тыныштықта тұрады.

Бірінші заңдағы пайымдауымыз мүлде айқын болып көрінбейді. Галилейге (1564—1842) дейін денеге әсер ету жылдамдықты өзгерту үшін емес, оның өзгеріссіз қалуын сақтауға қажет деп ұққан. Бұл ой горизонталь тегіс жолмен дөңгелеп келе жатқан арбаның қозғалысы баяулап қалмас үшін, оны үздіксіз итеріп отыру қажет сияқты күнделікті өмір фактілерінің негізінен шықты. Енді біз арбаны итере отырып, оның үйкелісінен болатын әсерлерді теңгеретінімізді білеміз. Алайда, егер жеткілікті дәрежеде мұны түсінбесек, онда әсерлесу оның өзгерісіне (яғни үдеуіне) емес, жылдамдығына жағдай жасайды.

Ньютонның бірінші заңы кез келген санақ системасында орындала бермейді. Біз жоғарыда қозғалыс сипаты санақ системасын таңдап алуға тәуелді болады деп ескертіп кеткен болатынбыз. Қандай да болсын үдеумен бір-біріне қатысты қозғалатын екі санақ системасын қарастыралық. Егер осылардың біреуіне қатысты дене тыныштықта болса, онда екіншісіне қатысты ол үдеумен қозғалатындығы айқын. Демек, Ньютонның бірінші заңы бір мезгілде екі системада орындала алмайды.

Ньютонның бірінші заңы орындалатын санақ системасы инерциялық деп аталады. Ал заңның өзі кейде инерция заңы деп те аталады. Ньютон заңы орындалмайтын санақ системасы инерциялық емес, санақ системасы деп аталады. Инерциялық системалардың шектеусіз жиыны бар. Қандай да болмасын инерциялық системаға қатысты түзу сызықты және бір қалыпты (яғни тұрақты жылдамдықпен) қозғалыстағы кез келген санақ системасы инерциялық та болады. Бұл жағдайында 17-параграфта екжеі-текжеілі айтылатын болады.

Центріне Күн орналасқан, ал осьтері белгілі бір таңдап алынған жұлдыздарға бағытталған санақ системасы инерциялық болып табылады. Бұл система гелиоцентр-

лік (гелиос — грекше Күн деген сөз) санақ системасы деп аталады. Гелиоцентрлік системаға қатысты бір қалыпты және түзу сызықты қозғалыстағы кез келген системасы инерциялық болады.

Жер Күн және жұлдыздарға қатысты эллипс формалы қысқа қисық сызықты траекторияның бойымен қозғалады. Қисық сызықты қозғалыс әрқашан да қандай да болмасын үдеумен өтеді. Сонымен қатар Жер өз осінен айналады. Осы себептерден де Жердің бетімен байланысты санақ системасы гелиоцентрлік санақ системасына қатысты үдеумен қозғалады да инерциялық болмайды. Алайда мұндай система үдеуінің аз болып келетіндігі соншалық, тіпті сансыз көп жағдайларда оны іс жүзінде инерциялық деп есептеуге болады. Бірақ кейде жермен байланысы бар санақ системасының инерциялық еместігі оған қатысты қарастырылған механикалық құбылыстардың сипатына едәуір ықпалын тигізеді. Осындай жағдайлардың қайсыбірін біз соңыра толығырақ қарастыратын боламыз.

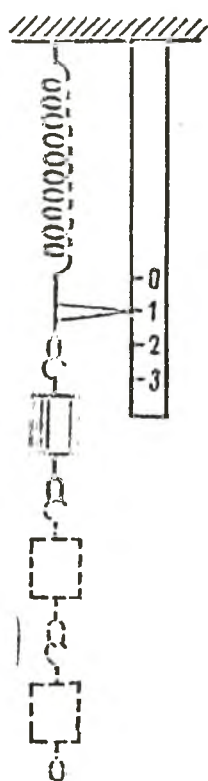
#### § 14. Ньютонның екінші заңы

Ньютонның екінші заңында жаңа екі физикалық шама: күш пен масса тұжырымдалады. Күш басқа дененің тарапынан берілген денеге тигізетін әсердің бағытын және сандық сипатын көрсетеді. Масса дененің осы әсерлерге «кері қайтарымдылығының» сандық сипаттамасын береді.

Бұрын ескерткеніміздей, қайсыбір денелерге берілетін әсер екі тектегі құбылысты: дененің жылдамдығының өзгерісін немесе оның деформациясын (яғни оның өлшемдері мен формасының өзгерісін) туғызады. Осы екі эффектiнiң екеуiн де (үдеу де, деформация да) өлшеуге болатындықтан, бұлардың кез келгені әсерлесудің сандық бағасы үшін, яғни күштерді бір-бірімен салыстыру және өлшеу үшін пайдаланылуы мүмкін.

Төмендегідей экспериментті қарастыралық. Жоғары ұшынан қозғалмайтындай етіп бекітілген пружина аламыз. Пружинаның төменгі ұшына қандай да болсын әйтеуір бір жүкті ілелік (39-сурет), осы жүктің әсерінен (және пружинаның жоғарғы ұшы бекітілген дененің әсерінен) ол бір шама созылады да нәтижесінде пружинаға бекітілген көрсеткіш қозғалмай тұрған шкаланың бойы-

мен 0 белгісінен 1 белгісіне дейін жылжып қозғалады. Жеке-жеке алғанда әрқайсысы пружинаның бірдей ұзаруын туғызатын бірнеше жүктерді таңдап алалық. Сонда пружинаға ілінетін осы жүктердің әрқайсысы оған бірдей мөлшерде әсер ететінін көреміз. Мұның өзін пружинаның ұшына әсер ететін белгілі бір шамадағы күш ретінде сипаттауға болады.

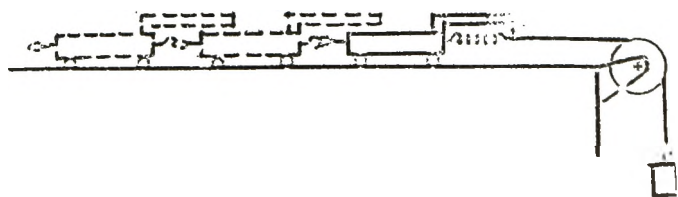


39-сурет.

Енді пружинаға бірден осындай екі жүк ілелік. Бұлардың әрқайсысы шамасы жағынан ғана емес, бағыты жағынан да бірдей әсер ететін болады. Бұл жағдайда пружинаға әсер ететін күш екі есе көп болатыны айқын. Тәжірибе көрсеткеніндей, бұл жағдайда пружинаның ұзаруы да екі есе көп болады. Бірдей үш жүктің бір мезгілдегі әсері пружинаның үш есе деформациясын туғызады және т. б.

Демек, пружинаның ұзаруы оған әсер ететін күшке пропорционал болады. Шынын айтсақ, Гук заңы деп аталатын, бұл заң шамалы ғана деформация жағдайында ғана дұрыс. Деформация шамасы әрбір нақтылы пружина үшін қандай да болсын белгілі бір шектен аспаса, күш пен деформация арасындағы пропорционалдық сақталмайды<sup>1</sup>

Сөйтіп, біз күшті сан жағынан салыстырудың тәсілін алдық: екі күш шамаларының қатынасы осы



40-сурет.

күштерден пайда болған пружинаның серпімді деформацияларының қатынасына тең болады. Күштерді өлшеудің тәсілдерін анықтай келе, дененің үдеуі оған әсер ететін күштің шамасына қалай тәуелді болатындығын зерттейміз. Бұл үшін мынадай тәжірибе жасалық (40-су-

<sup>1</sup> Гук заңына бағынатын деформация серпімді деформация деп аталады.

рет). Теп-тегіс горизонталь столдың үстіндегі арбаның блоктан асырылған жүктің әсерінен қозғалысын зертте-лік. Арба мен жіптің арасына пружина қоялық. Оның созылуына қарап әсерлесу күшің бағалауға болады. Сон-да әсер ету бағыты жіп бағытымен берілетінін аңғару оңай. Жіпке әр түрлі жүктерді іле отырып, әсерінен қоз-ғалыс пайда болатын күшті түрлендіруге болады.

Осыған ұқсас жүргізілген тәжірибелер мынадай нә-тиже береді: егер пружинаның керілуі өзгермесе, арба бір қалыпты үдемеді қозғалады да, сонымен қатар,  $\omega$  үдеуі түсірілген  $f$  күшке пропорционал болады, яғни

$$\omega \sim f. \quad (14.1)$$

Арбаның дөңгелегі мен осьтің, сондай-ақ, дөңгелек пен стол арасындағы үйкелістің шамадан тыс артуы алынған нәтижені бұзатындығын еске алған жөн. Бірақ үйкелісті шамалап кеміте отырып, біз (14.1) қатысына біртіндеп жақындай түсеміз. Тағайындалған заңдылық бізге күштерді сан жағынан салыстырудың тағы да бір тәсілін жасауға жағдай туғызады:  $f_1$  және  $f_2$  екі күштің қатынасын осы күштердің әсерінен қандай да болсын әйтеуір бір дененің алған  $\omega_1$  және  $\omega_2$  үдеуін анықтай отырып табуға болады, яғни

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (14.2)$$

Егер басқа арбаны алатын болсақ, қозғалыстың си-паты және күш пен үдеу арасындағы қатыс ол үшін сол қалпында қалғанмен де, сол  $f$  күштің шамасынан бол-ған оның үдеуі басқаша болады. Мұның өзі күштің әсе-рінен арбаның түрліше «берілмейтіндігімен» немесе, бас-қаша айтқанда, олардың түрліше инерттілігімен түсін-діріледі.

Шамасы жағынан болсын не бағыты жағынан бол-сын кез келген күште  $f$  күш шамасының одан алынған  $\omega$  үдеу шамасына қатынасы берілген дене үшін тұрақты болып қалады<sup>1</sup>. Әр түрлі денелер үшін бұл қатынас түр-ліше болып келеді. Сонда  $f/\omega$  қатынасының шамасы бер-ілген дененің инерттілігін сипаттайды. Сондықтан де-ненің инерттілігінің сандық сипаты үшін  $f/\omega$  пропорцио-

<sup>1</sup> Бұл дененің жылдамдығы бастықтағы жарық жылдамдығымен салыстырғанда аз болған жағдайда ғана орынды (22-параграфты қа-раңыз).

налдық қатынастағы дененің массасы деп аталатын физикалық шама қолданылады.

Дененің массасын  $m$  әрпімен белгілеп, былай жазуға болады:

$$m \sim \frac{f}{\omega}. \quad (14.3)$$

Осындай жолмен анықталған масса дененің инерттілігінің өлшемі болады. (14.3) қатыстан массаларды салыстыру тәсілін шығарып аламыз: екі дененің  $m_1$  және  $m_2$  массасы осы денелерге тең күштермен әсер еткеннен алынған  $\omega_1$  және  $\omega_2$  үдеуінің кері қатынасына тең:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (14.4)$$

Бірнеше арба алайық. Тең күштерден алынған үдеулер шамасының бірдей болатындығына қарай (үйкелісті аз деп алайық) бұларды да бірдей делік. Мұндай арбалардың массалары тең болады. Екі арбаны бір-бірімен жалғастыралық (40-суретті қараңыз). Тәжірибе жалғастырылған екі арбаның қандай да болсын  $f$  күштің әсерінен алынған үдеуі жеке-жеке алынған әрбір арбаның үдеуіне қарағанда екі есе кем болады. Егер үш бірдей арбаны жалғастыратын болсақ, үдеуі де үш есе кем болады екен т. т. Бұдан массаның аддитивтік қасиетінің болатындығын білеміз; бұл құрастырылған дененің массасы оның жеке бөліктерінің қосындысына тең болатындығын білдіреді<sup>1</sup>

(14.3) өрнекті

$$\omega = k \frac{f}{m} \quad (14.5)$$

(мұндағы  $k$  — пропорционалдық коэффициент) түрінде жазамыз. (14.5) қатынасы Ньютонның екінші заңының аналитикалық өрнегін білдіреді.

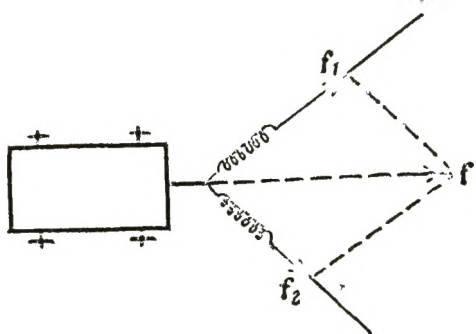
Сонымен, Ньютонның екінші заңы былай тұжырымдалады: *кез келген дененің үдеуі оған әсер ететін күшке тура пропорционал, ал дененің массасына кері пропорционал* болады. Бұл да Ньютонның бірінші заңы сияқты инерциялық санақ системаларында ғана дұрыс.

Атап айтқанда, күш нольге тең болғанда (басқа денелер тарапынан болатын әсер болмағанда), (14.5) фор-

<sup>1</sup> Массаның аддитивтігі жөніндегі бекітім Ньютон механикасы аумағында ғана тура болады. Релятивтік механикада массаның аддитивтігі орындалмайды.

муладан шыққан үдеу де нольге тең болады. Бұл Ньютонның бірінші заңындағы пікірмен бірдей. Сондықтан, бірінші заң екінші заңнан оның дербес жағдайы ретінде шығатын тәрізді. Осыған қарамастан бірінші заң екінші заңға байланыссыз тұжырымдалады, өйткені оның негізінде инерциялық санақ системаларының бар болуы жөніндегі постулат (бекітім) жасалған.

Бір денелердің екіншілеріне, әсері бағыттық сипатта болады. Демек, күш сан мәнінен басқа бағытымен сипатталатын шама болып табылады. Бірақ мұның өзі күшті векторлар категориясына жатқызу үшін әлі де жеткіліксіз нәрсе. Күшті ко-



41-сурет.

судың қай заңына бағынатындығын анықтау қажет. Бұл үшін керілген екі жіптің әсерімен тұрған арбамен тәжірибе жасалық. (41-сурет, арбаны жоғарыдан қарағандағы түрі.) Тәжірибе көрсеткендей,  $f_1$  және  $f_2$  күш әсерінен болған арбаның үдеуінің шамасы мен бағыты векторларды қосу ережесі бойынша  $f_1$  және  $f_2$  күштерден шыққан бір ғана  $f$  системасының әсер ету жағдайындағыдай болады. Демек, күш дегеніміз векторлық шама екен.

Күш — вектор болғандықтан және үдеудің бағыты осы күш бағытымен сәйкес келетіндіктен, (14.5) теңдеуді векторлық түрде былай жазуға болады:

$$w = k \frac{f}{m}. \quad (14.6)$$

Масса  $m$  мен пропорционалдық коэффициент  $k$  — скаляр шама. (14.6) теңдеу классикалық механиканың негізгі теңдеуі болып табылады.

## § 15. Физикалық шамалардың өлшемділігі және өлшеу бірліктері

Физика заңдары, жоғарыда ескерткеніміздей, физикалық шамалардың арасындағы сандық қатысты тағайындайды. Осындай қатыстарды орындау үшін әр түр-

лі физикалық шамаларды өлшей алатындай жағдай болу керек.

Әйтеуір бір физикалық шаманы (мысалы, жылдамдықты) өлшеу оны бірлік үшін қабылданған сол түрдегі (мысалда алынған жылдамдықпен) шамамен салыстыру деп білеміз.

Жалпы айтқанда, әрбір физикалық шама үшін, басқаларына тәуелсіз қалауымызша өлшеу бірлігін орнатуға болар еді. Алайда негізгі деп есептелінетін үш (принципінде кез келген) шама үшін өлшеу бірлігін қалауымызша тандап алуды шектеуге болады екен. Ал қалған шамалардың өлшеу бірліктеріне келетін болсақ, оны үш заңның негізінде құруға болады. Бұл үшін сәйкес шамаларды негізгі шамалармен немесе бірліктері алдын ала осылай құрылған шамалармен байланыстыратын физикалық заңдарды пайдалану керек.

Осы айтылғандарды төмендегідей мысалдармен түсіндірелік. Масса мен үдеу үшін біз өлшеу бірлігін тағайындап қойдық деп жорық. (14.5) қатысы белгілі бір заңдылық бойынша бұл шамаларды үшінші физикалық шама — күшпен байланыстырады. Осы теңдеудегі пропорционалдық коэффициент бірге тең болатындай етіп, күштің өлшеу бірлігін тандап аламыз. Сонда (14.5) формула мынадай жай түрге келеді:

$$\omega = \frac{f}{m}. \quad (15.1)$$

(15.1)-ден тағайындалған күш бірлігі, массасы бірге тең денеге әсер еткенде алатын үдеуі де бірге тең болатын күшті көрсетеді [(15.1)-дегі  $f=1$  және  $m=1$  деп алмастыру  $\omega=1$  болатынын көрсетеді].

Өлшеу бірлігін тандап алуда көрсетілген тәсілдердегі физикалық қатыстар неғұрлым жай түрді қабылдайды. Өлшеу бірлігінің жиынтығының өзі белгілі бір системаны туғызады.

Негізгі бірліктерден басқа өзгешелігі тандап алынуына қарай болған бірнеше системалар бар. Ұзындық, масса және уақыт бірліктері негізгі бірлік болып саналатын системаларды абсолют системалар деп атаймыз.

СССР-де 1963 жылдың 1 январынан бастап СИ символымен белгіленген Бірліктердің халықаралық системасын қолдануды тағайындаған Гост

9867-61 мемлекеттік стандарт енгізілді. Бірліктердің бұл системасы ғылымының, техниканың және халық шаруашылығының, сондай-ақ сабақ беруде артықшылығы бар система ретінде қолданылуға тиісті. СИ системасының негізгі өлшем бірліктері мыналар: ұзындық бірлігі — метр (қысқаша *m* деп белгіленеді), массасының бірлігі — килограмм (*кг*) және уақыт бірлігі — секунд (*сек*). Сөйтіп, СИ абсолют системаларының қатарына жатады, көрсетілген үш бірліктен басқа СИ системасында негізгі бірлік ретінде ток күшінің бірлігіне — амперді (*a*). термодинамикалық температура бірлігіне — Кельвин градусын ( $^{\circ}\text{K}$ ) және жарық күшінің бірлігіне — шамды (*шам*) қабылдайды. Бұл бірліктер жайында біз курстың сәйкес бөлімдерінде сөз ететін боламыз.

Метр криптон  $86^{1}$  атомынан бастықта шыққан сәулелінің (криптон  $86$ -ның қызғылт сары сызықтары)  $2p_{10}$  және  $5d_5$  деңгейлері арасынан өтуіне сәйкес  $1650763,73$ -ке тең қысқа толқынның ұзындығы ретінде анықталады.

Метр жуық түрде жер меридианының  $\frac{1}{40\,000\,000}$  үлесіне тең. Сондай-ақ еселі және үлесті бірліктері: километр ( $1000\ m$ ), сантиметр ( $1/100\ m$ ), миллиметр ( $1/1000\ m$ ), микрон ( $1/1\,000\,000\ m$ ) және т. б. қолданылады.

Килограмм Севрдегі (Париждің маңындағы) өлшеулер мен таразылардың Халықаралық бюросында сақтаулы тұрған иридийлі платинадан<sup>2</sup> істелген дененің массасы. Бұл дене килограмның халықаралық прототипі деп аталады. Прототип массасы көлемі  $1000\ \text{см}^3\ 4^{\circ}\text{C}$ -дегі таза судың массасына жақын. Грам килограмның  $1/1000$ -не тең.

Секунд 1900 жылдың 0 январы үшін сағат 12-дегі эфемерид уақытымен<sup>3</sup> алынған тропиктік жылдың  $1/31556925,9747$  бөлігі ретінде анықталады. Секунд шамамен орташа күн тәулігінің  $1/86\,400$  бөлігіне тең.

---

<sup>1</sup> Бұл белгілеулердің мағынасы «Атом физикасы» бөлімінде түсіндіріледі.

<sup>2</sup> Платинаның иридиймен қоспасы неғұрлым катты болады және коррозияға берілмейді (яғни қоршаған ортаның химиялық әсеріне аз беріледі).

<sup>3</sup> Яғни 1899 жылдың 31 декабрі сағат 12-дегі уақыт үшін. Эфемерид уақыты деп Жер өз осінен бір қалыпсыз айналғанда түзету енгізу жолымен табылған бір қалыпты өткен уақытты айтамыз. 1900 жылға сілтейтін себебіміз тропикалық жыл жүз жыл ішінде шамамен  $0,5\ \text{сек}$ -қа кемиді.



Физикада сондай-ақ СГС-системасы деп аталатын бірліктердің абсолют системасы қолданылады. Бұл системадағы негізгі бірліктер сантиметр, грамм және секунд.

Кинематикаға біз ендірген шамалардың (жылдамдық және үдеу) бірліктері — негізгі бірліктердің туындылары. Мәселен, жылдамдықтың бірлігіне бірлік уақыттың (секунд) ішінде ұзындық бірлігіне (метрге немесе сантиметрге) тең жол жүріп өткен бір қалыпты қозғалыстағы дененің жылдамдығы алынады. Бұл бірлік СИ системасында  $м/сек$ -пен, СГС-системасында  $см/сек$ -пен белгіленеді. Үдеудің бірлігіне дененің бірлік уақыт (секунд) ішінде жылдамдығы да бірге ( $м/сек$ -қа немесе  $см/сек$ -қа) өзгертін бір қалыпты айнымалы қозғалыстың үдеуі қабылданады. Бұл бірлік СИ — системасында  $м/сек^2$ -пен, СГС — системасында  $см/сек^2$ -пен белгіленеді.

СИ системасындағы күш бірлігі ньютон ( $н$ ) деп аталады. (15.1) формулаға сәйкес ньютон 1 кг массасы бар денеге әсер еткенде  $1 м/сек^2$  үдеу алатын күшке тең. СГС — системасындағы күш бірлігі дина ( $дин$ ) деп аталады. Бір дина массасы 1 г денеге  $1 см/сек^2$  үдеу беретін күшке тең. Ньютон мен дина арасында төмендегідей қатыс орындалады:

$$1 н = 1 кг \cdot 1 м/сек^2 = 10^3 г \cdot 10^2 см/сек^2 = 10^5 дин.$$

Техникада МКГСС (бірліктердің техникалық системасы деп аталатын) системасы көп қолданылады. Бұл системаның негізгі бірліктері метр, күш бірлігі — килограмм-күш ( $кгк$  немесе  $кГ$ ) және секунд болып табылады. Килограмм-күш 1 кг массаға  $9,80655 м/сек^2$ -қа тең үдеу беретін күш ретінде анықталады. Бұл анықтамадан  $1 кгк = 9,80655 н$  (шамамен  $9,81 н$ -ға тең) екендігі шығады. МКГСС системасындағы массаның бірлігіне, (15.1) формула бойынша,  $1 кгк$  — күштің әсерінен  $1 м/сек^2$  үдеу алатын дененің массасы қабылдануға тиісті. Бұл бірлік  $кгк \cdot сек^2/м$ -мен белгіленеді, оның арнайы аты болмайды. Сонда  $1 кгк \cdot сек^2/м = 9,80655 кг$  (шамамен  $9,81 кг$ ) болатыны белгілі.

Бірліктер системасын құрудағы тәсілден негізгі бірліктердің өзгерісі өздерімен бірге туынды бірліктердің өзгерісін туғызатындығы байқалады. Егер, мысалы, уақыт бірлігі үшін секунд орнына минутты алсақ, яғни

уақыт бірлігін 60 есе арттырсақ, онда жылдамдық бірлігі 60 есеге, ал үдеу бірлігі 3600 есеге кемиді.

Негізгі шамалар өзгерген кезде қандай да болсын шаманың өлшеу бірлігінің өзгерісін көрсететін қатысты осы шаманың өлшемділігі деп атаймыз. Еркімізше алған физикалық шаманың өлшемділігін белгілеу үшін квадрат жақшаға алынған оның әріп түріндегі белгілерін пайдаланамыз. Мысалы,  $[v]$  символы жылдамдықтың өлшемділігін белгілейді. Негізгі шамалардың өлшемділігі үшін арнаулы белгілеулер: ұзындық үшін  $L$ , масса үшін  $M$  және уақыт үшін  $T$  пайдаланылады. Сөйтіп, ұзындықты  $l$  әрпімен, массаны  $m$  әрпімен және уақытты  $t$  әрпімен белгілей отырып, былай жазуға болады:

$$[l] = L; \quad [m] = M; \quad [t] = T$$

Жоғарыда көрсетілген белгілеулерде еркімізше алған физикалық шамалардың өлшемділігі мына түрде болады:  $L^\alpha M^\beta T^\gamma$  ( $\alpha$ ,  $\beta$  және  $\gamma$  оң таңбалы да, теріс таңбалы да бола алады, дербес жағдайда олар нольге де тең болады). Бұлай деп жазудың өзі ұзындық бірлігін  $n_1$  есе арттырғанда берілген шаманың бірлігі  $n_1^\alpha$  есеге артады (бұл бірліктердегі шамалардың мәні сәйкес түрде  $n_1^\alpha$  есеге азаятынын өрнектейтін сан); масса бірлігі:  $n_2$  есеге арттырған кезде берілген шаманың бірлігі  $n_2^\beta$  есеге артады, ақырында уақыт бірлігін  $n_3$  есеге арттырғанда берілген шаманың бірлігі  $n_3^\gamma$  есеге артады.

Физикалық заңдар ондағы қатысқан шамалардың өлшеу бірлігіне байланысты болмайтындықтан да, осы заңдарды өрнектейтін теңдеудің екі жағындағы өлшемділігі де бірдей болуға тиісті. Бұл шарт, біріншіден, алынған физикалық қатыстардың дұрыстығын тексеру үшін, екіншіден, физикалық шамалардың өлшемділігін тағайындау үшін пайдаланылуы мүмкін. Мысалы, жылдамдық  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  ретінде анықталады.  $\Delta s$ -тің өлшемділігі  $L$ -ге тең,  $\Delta t$ -нің өлшемділігі  $T$ -ге тең. Жазылған қатыстың оң жағындағы өлшемділігі мынаған тең:  $[\Delta s]/[\Delta t] = L/T = LT^{-1}$ . Ал сол жағындағы өлшемділігі де осындай болуға тиісті. Демек,

$$[v] = LT^{-1}. \quad (15.2)$$

Жазылған қатыс өлшемділік формуласы, ал оның оң жағы — сәйкес шамалардың (берілген жағдайда жылдамдықтың) өлшемділігі делінеді.

$\omega = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  қатысының негізінде үдеудің өлшемдігін былай табуға болады:

$$[\omega] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

Күштің өлшемділігі

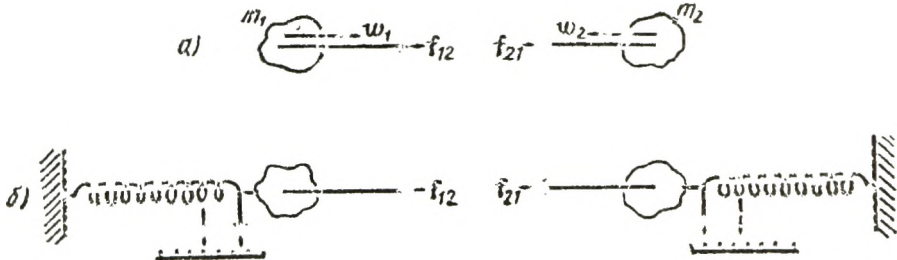
$$[f] = [m][\omega] = MLT^{-2}$$

Осыған ұқсас барлық қалған шамалардың өлшемділігі белгіленеді.

### § 16. Ньютонның үшінші заңы

Денелердің бір-біріне түрліше әсері өз ара әсерлесу сипатында болады: егер  $M_1$  дене қандай да болсын әйтеуір  $f_{21}$  күшпен  $M_2$  денеге әсер етсе, онда  $M_2$  дене өз кезегінде  $f_{12}$  күшпен  $M_1$  денеге әсер етеді.

Тәжірибе көрсеткендей, бір-бірімен өз ара әсерлестірген денелердің әсер күштері әрқашанда да шамасы жа-



42-сурет.

ғынан тең, бағыттары жағынан қарама-қарсы болады. Мынадай мысалды қарастыралық. Сыртқы дененің әсерінен оңашаланған  $m_1$  және  $m_2$  массасы бар екі дене (42-сурет) мысалы, өздерімен бірге электр зарядтарын таситын болғандықтан бірін-бірі тартады (немесе тебеді)  $f_{12}$  және  $f_{21}$  күштің әсерінен дене сәйкес  $w_1$  және  $w_2$  үдеу алады. Осы үдеулердің шамасы денелердің массасына кері болады, яғни

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

бұдан  $m_1\omega_1 = m_2\omega_2$  теңдігі шығады, демек, күш теңдігі былай жазылады:  $f_{12} = f_{21}$ , бұдан күштердің бағыттарының қарама-қарсы болатыны айқын. Мұндай қорытындыға денелердің үдеулерін салғастыру арқылы емес, қозғалмай тұрған тіреуге өз ара әсерлесетін денелер «байланған» калибрлі пружиналардың керілуі арқылы келуге болады (42, б-сурет). Бұл жағдайда пружиналардың деформациясы бойынша өлшенген  $f_{12}$  және  $f_{21}$  күштер де шамасы жағынан бірдей болады.

Ньютонның үшінші заңы осыған ұқсас тәжірибе фактілерін жинақтау болып табылады. Ньютонның тұжырымдауында ол былай айтылады: «әсерге қарсы әрқашан да тең және қарама-қарсы әсер болады, басқаша — екі дененің бір-біріне өз ара әсері тең және қарама-қарсы бағытталған болады». Бұл тұжырымда «әсер» және «қарсы әсер» терминдері дара тұрады. Осының салдарынан да дененің бір-біріне әсер ететін кейбір күштерінің түрлішелігі жөнінде ұғым тууы мүмкін. «Әсерге» еріксіз басым роль, ал «қарсы әсерге» — бағынышты роль беріледі. Шынында да,  $f_{12}$  және  $f_{21}$  күштердің екеуі де бір-біріне тең. Сондықтан Ньютонның үшінші заңын төмендегідей тұжырымдаған дұрыс: *дененің бір-біріне кез келген әсері өз ара әсер сипатында болады; денелердің бір-бірімен өз ара әсер күштері әрқашанда шамасы жағынан тең, бағыттары бойынша қарама-қарсы болады.*

42-суретте қолданылған күштердің белгілеулерін пайдалана отырып, Ньютонның үшінші заңының мағынасын төмендегі түрде жазуға болады:

$$f_{12} = -f_{21}. \quad (16.1)$$

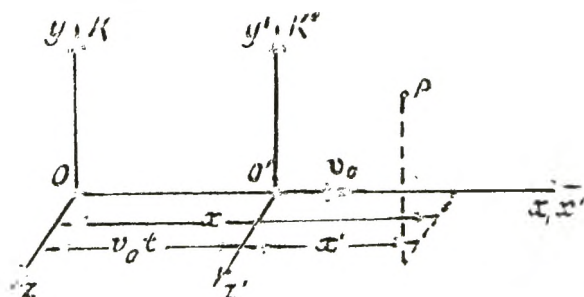
Жоғарыда айтылғандардан күштердің әр уақытта қос-қостан туатындығы шығады: әйтеуір бір денеге берілген қандай да болсын күшке шамасы бойынша тең, осы берілген денемен өз ара әсерлесе алатын қарама-қарсы бағытталған күшті салыстыруға болады.

## § 17. Галилейдің салыстырмалылық принципі

Бір-біріне қатысты, тұрақты  $v_0$  жылдамдықпен қозғалған екі санақ системасын қарастыралық. Осы системалардың бірі 43-суретте  $K$  әрпімен белгіленген, шартты түрде қозғалмайды деп есептейік. Сонда екінші  $K'$

системасы түзу сызықты және бір қалыпты қозғалатын болады.  $K$  системасының  $x, y, z$  координаталық осьтерін және  $K'$  системасынан  $x', y', z'$  координаталық осьтерін таңдап алайық. Мұнда  $x$  осі  $x'$  осімен беттесетін, ал  $y$  және  $y'$  осьтері, сондай-ақ  $z$  және  $z'$  осьтері бір-біріне параллель болсын.

$K$  системасындағы қандай да болсын  $P$  нүктесінің  $x, y$  және  $z$  координаталары мен  $K'$  системасындағы сол нүктенің  $x', y', z'$  координаталары арасындағы байланысты табалық. Егер санақ уақытын екі системаның да координата басы дәл келетін мезеттен бастау керек болса, 43-суреттен  $x = x' + v_0 t$  болатындығы шығады. Бұдан



43-сурет.

басқа,  $y = y'$  және  $z = z'$  екені айқын. Бұл қатысқа классикалық механикада айтылған екі системадағы уақыттың бір мезгілде өтуі жөніндегі жоруымызды қоссақ, яғни  $t = t'$  онда Галилей түрлендіруі деп аталатын мынадай төрт теңдеудің жиынтығын аламыз:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + v_0 t' \\ y &= y', \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

(17.1) қатыстың біріншісі мен соңғысы бостықтағы жарық жылдамдығымен [біз оны  $c$  ( $v_0 \ll c$ ) деп белгілейміз] салыстырғанда  $v_0$ -дің өте аз мәнінде дұрыс болады екен.  $c$ -мен салыстырылған  $v_0$  болғанда Галилей түрлендіруі «Оптикада» сөз болатын [III том, (37.10) формуланы қараңыз] Лоренцтің жалпы түрлендіруімен ауыстырылуға тиісті. Классикалық механиканың аумағында (17.1) формуласын нақтылы деп ұйғару келісілген.

(17.1) қатысты уақыт бойынша дифференциалдап,  $K$

және  $K'$  санақ системаларындағы  $P$  нүктесінің жылдамдықтарының арасындағы байланысты табамыз:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + v_0 & \text{немесе} & & v_x &= v_x' + v_0, \\ y &= y' & \text{немесе} & & v_y &= v_y', \\ z &= z' & \text{немесе} & & v_z &= v_z'. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

(17.2) үш скалярлық қатыс  $K$  системасына қатысты  $v$  жылдамдық векторы мен  $K'$  системасына қатысты  $v'$  жылдамдық векторы арасындағы мынадай қатыстарға эквивалентті болады:

$$v = v' + v_0 \quad (17.3)$$

Осыларға көз жеткізу үшін (17.3) векторлық теңдікті  $x$ ,  $y$ ,  $z$  осьтеріне проекцияласақ жеткілікті. Осының нәтижесінде (17.2) формуласы шығады.

(17.2) және (17.3) формулалар классикалық механикадағы жылдамдықтардың қосу ережесін береді. (17.3) қатысы, кез келген векторлық қатыс сияқты,  $K$  және  $K'$  системаларының координаталық осьтеріндегі өз ара бағыттарды қалауымызша таңдап алуда дұрыс болып қалатындығын еске ұстағанымыз жөн. Ал (17.2) қатысы 43-суретте көрсетілген осьтерді таңдап алғанда ғана орындалатын болады.

13-параграфта қандай да болсын инерциялық системаға қатысты, тұрақты жылдамдықпен қозғалған кез келген санақ системасы да инерциялық болады. Енді біз осы бекіткендерімізді дәлелдеуге мүмкіндік аламыз. Бұл үшін (17.3) қатысты уақыт бойынша дифференциалдаймыз.  $v_0$ -нің тұрақты екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$v = v' \quad \text{немесе} \quad w = w' \quad (17.4)$$

Осыдан, бір-біріне қатысты бір қалыпты түзу сызықты қозғалған барлық санақ системасындағы әйтеуір бір дененің үдеуі бірдей болатындығы шығады. Сондықтан, егер осы системалардың бірі инерциялық болса (бұл күштің жоқ кезінде  $w=0$  деген сөз), қалғаны да инерциялық болады ( $w'$  де нольге тең)

Механиканың негізгі (14.6) теңдеуіне тән нәрсе, кинематикалық шамалардан оның құрамында тек үдеу ғана болады, ал оған жылдамдық кірмейді. Алайда, біздің жоғарыда тағайындағанымыздай, қандай да болсын дененің үдеуі қалауымызша сайлап алған екі  $K$  және  $K'$  инерциялық санақ системасында бірдей. Осыдан Нью-

тоңның екінші заңы бойынша  $K$  және  $K'$  системаларындағы денеге әсер ететін күштердің де бірдей болатындығы шығады. Демек, *бір инерциялық санақ системасынан екіншісіне көшкенде динамика теңдеуі өзгермейді*, яғни басқаша айтқанда, бір инерциялық санақ системасынан екіншісіне көшуге сәйкес келетін координаталар түрлендіруге қатысты инвариантты болады. Механикалық көзқарастан барлық инерциялық санақ системалары эквивалентті: олардың бірде-бірінің екіншісінен артықшылығы жоқ. Іс жүзінде мұны былай түсіндіруге болады: берілген санақ системасының шегінде жүргізілген механикалық тәжірибелердің ешқайсысымен де, ол тыныштық күйде тұр ма немесе ол бір қалыпты және түзу сызықты қозғалып бара жатыр ма, оны нақтылы шешуге болмайды екен. Селкілдемей бір қалыпты және түзу сызықты қозғалып бара жатқан вагонның ішінде отырып, біз оның терезесінен карамасақ, вагонның қозғалғанын немесе тыныш тұрғанын анықтай алмаймыз. Дененің еркін түсуі, лақтырылған дененің қозғалысы және басқадай барлық механикалық процестер (егер вагон қозғалмай тұрса) бұл жағдайда да сондай болады.

Жоғарыдағы анықталған жағдайлардың бәрін Галилей түсіндірген болатын. Бұл әр түрлі инерциялық санақ системаларындағы механикалық құбылыстардың барлығы бірдей өтеді, осының салдарынан ешбір механикалық тәжірибелер арқылы берілген санақ системасы тыныштықта тұр ма, жоқ әлде түзу сызықты және бір қалыпты қозғалып бара жатыр ма, оны анықтауға мүмкін емес екен, осы жайдың өзі Галилейдің салыстырмалылық принципі деп аталады.

## § 18. Ауырлық күші және салмақ

Жердің тартылыс күші әсерінен барлық денелер Жер бетіне қатысты бірдей үдеумен түседі. Оны  $g$  әрпімен белгілеу қабылданған. Мұның өзі Жермен байланысты санақ системасындағы массасы  $m$  кез келген денеге ауырлық күші<sup>1</sup> деп аталатын

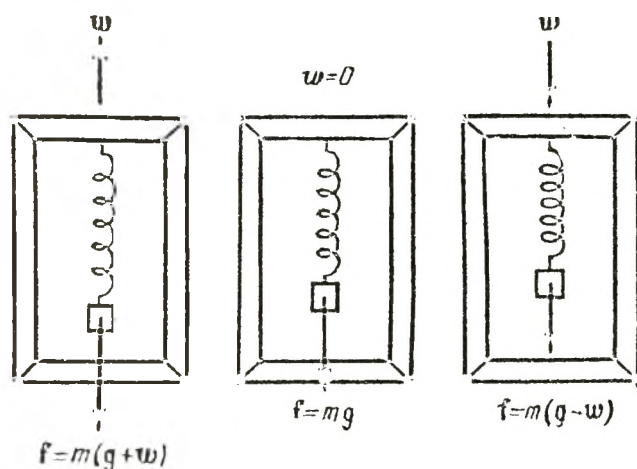
$$P = mg \quad (18.1)$$

<sup>1</sup> Жермен байланысы бар санақ системасының инерциялық болмағандығынан, ауырлық күші дененің Жерге тартылу күшінен біршама өзгеше болады. Бұл жөнінде 47 параграфта толығырақ айтылып боламыз.

күштің әсер ететінін көрсетеді. Дене Жер бетіне қатысты тыныштықта тұрғанында,  $P$  күші денені құлатпай ұстап тұрған ілменің немесе тіреуіштің  $f_r$  реакциясымен<sup>1</sup> теңгеріліп тұрады ( $f_r = -P$ ). Ньютонның үшінші заңы бойынша дене бұл жағдайда ілмеге немесе тіреуішке —  $f_r$  -ге тең  $G$  күшпен әсер етеді, яғни

$$G = P = mg.$$

Дененің ілмеге немесе тіреуішке әсер ететін  $G$  күші дененің салмағы делінеді. Дене мен тіреуіш немесе (ілме) Жерге қатысты қозғалмай тұрған жағдайда ғана бұл күш  $mg$ -ге тең болады. Олардың қандай да болсын  $w$  үдеумен қозғалған жағдайында  $G$  күші  $mg$ -ге тең болмайды. Мұны төмендегі мысалдан толығырақ түсінуге болады. Айталық, ілме рамаға бекітілген пружина



44-сурет.

жина түрінде  $w$  үдеуі бар денемен бірге қозғалсын делік (44-сурет). Сонда дене қозғалысының теңдеуі мына түрде болады:

$$P + f_r = mw, \quad (18.2)$$

мұндағы  $f_r$  — ілменің реакциясы, яғни пружинаның денеге әсер ететін күші. Ньютонның үшінші заңы бойынша дене пружинаға  $f_r$ -ге тең күшпен әсер етеді, мұның өзі анықтама бойынша осы жағдайдағы дененің  $G$  салмағын білдіреді. (18.2) теңдеудегі  $f_r$  реакцияны  $G$  күшпен, ал  $P$  ауырлық күшін  $mg$  көбейтіндісімен ауыстырып, мынаны аламыз:

<sup>1</sup> Реакция күштері деп берілген денеге оның қозғалысын шектейтін дененің әсер еткендегі күшін айтамыз.



$$G = m(g - w) \quad (18.3)$$

(18.3) формуласы жалпы жағдайда дененің салмағын анықтайды. Бұл формула ілме мен тіреуіштің қандай түріне болса да орынды.

Дене мен ілме вертикаль бағытта қозғалсын дейік [осындай ұйғарымда (44-сурет) орындалады]

(18.3)-ті ілменің бағытында проекциялап, мынаны аламыз.

$$G = m(g \pm w). \quad (18.4)$$

Бұл өрнектегі  $G$ ,  $g$  және  $w$  негізінен сәйкес векторлардың модульдары болады. «+» таңбасы жоғары қарай бағытталған  $w$  «—» таңбасы төмен қарай бағытталған  $w$  бағытына сәйкес келеді.

(18.4) формуладан  $G$  салмақ модулы бойынша  $P$  ауырлық күшінен кем де, артық та болуы мүмкін екендігі байқалады. Ілмесі бар раманың еркін түсуі кезінде  $w = g$  және дененің ілмеге әсер күші нольге тең болады. Осы кезде дененің салмақсыздық күйі басталады. Двигателі іске қосылмай Жерді айнала ұшқан космос кораблі әлгінде айтылған үдеуі бар еркін түскен рама сияқты қозғалатын болады, осының салдарынан корабльдің ішіндегі дене салмақсыздық күйге, яғни денелер өзіне ұшыраған денелерге қысым түсірмейтін күйге тап болады.

Мына бір жәйтті ескерте кетейік.  $P$  ауырлық күші мен  $G$  салмақты жиі шатастыра береміз. Мұның өзі тіреуіштің қозғалмай тұрған жағдайында  $P$  және  $G$  күштерінің шама жағынан да бағыты жағынан да бірдей (екеуі де  $mg$ -ге тең) болатындығымен түсіндіріледі. Алайда екі күштің де бұл жағдайда әр түрлі денеге түсетінін еске ұстаған жөн:  $P$  күші дененің өзіне түсетін  $G$  болса, ал  $G$  жердің тарту күшінің өрісінде дененің еркін қозғалысын шектейтін ілме немесе тіреуішке түседі. Сонымен қатар  $P$  күші әр уақытта  $mg$ -ге тең, ол дене қозғалып бара жатыр ма, жоқ әлде тыныштықта тұр ма оған тәуелді болмайды, ал  $G$  салмақ күші ілме мен тіреуіштің қозғалыс үдеуіне тәуелді болады және де  $mg$ -ден артық та кем де болуы мүмкін, атап айтқанда, ол салмақсыздық күйде нольге айналып отырады.

Дененің массасы мен салмағының арасындағы (18.3) қатыс өлшеу арқылы алынған дене массаларының салыстырмалы тәсілін береді яғни бұл тәсіл бойынша бір-

дей жағдайда (әдетте  $w=0$  болғанда) жер бетінің бір нүктесінде анықталған дене салмақтарының қатынастары осы денелердің массаларының қатынасына тең болады, яғни

$$G_1 : G_2 : G_3 : \dots = m_1 : m_2 : m_3 :$$

47-параграфта көрсетілгендей, дененің еркін түсу үдеуі  $g$  мен  $P$  салмақ күші сол жердің ендігіне байланысты болады. Сондай-ақ  $P$  және  $g$  теңіз деңгейінің биіктігіне байланысты болады — Жердің центрінен алыстаған сайын олар кемі береді.

## § 19. Үйкеліс күші

Үйкеліс күші тікелей түйісін тұрған денелер немесе оның жеке бөліктері бір-біріне қатысты орын ауыстырғанда байқалады. Түйіскен екі дененің бір-біріне қатысты орын ауыстыруынан пайда болатын үйкелісі сыртқы үйкеліс деп, ал белгілі бір тұтас дененің (мысалы сұйық немесе газ) жеке бөліктерінің арасындағы үйкелісі ішкі үйкеліс деп аталады.

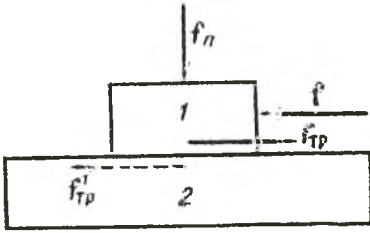
Қатты дененің сұйық немесе газ тәрізді ортаға қатысты қозғалған кезінде пайда болған үйкеліс күшін ішкі үйкеліс күшінің категорияларына жатқызуға болады, өйткені бұл жағдайда денемен жанасатын ортаның қабаты дене қандай жылдамдықпен қозғалатын болса, сондай жылдамдықпен ілесе қозғалады да дене қозғалысына осылардың арасындағы және сыртқы орта қабаттарының арасындағы үйкеліс әсерін тигізеді.

Екі қатты дененің беттерінің арасында қандай да болсын аралық, мысалы, олардың арасында майлау қабаты болған кездегі болатын үйкеліс құрғақ үйкеліс деп аталады. Қатты дене мен сұйық немесе газ тәрізді ортаның арасындағы, сондай-ақ, осындай ортаның араларындағы үйкелісті тұтқыр (немесе сұйық) деп атайды.

Құрғақ үйкеліске қолданылымына қарай үйкелістерді сыртқау үйкелісі және домалау үйкелісі деп атайды.

Үйкеліс күші үйкелетін бетке (немесе қабатқа) жүргізілген жанама бойымен бағытталады да, олар осы беттердің (немесе қабаттардың) бір-біріне салыстырмалы ауысуына қарама-қарсы әсер етеді. Егер, мысалы,

сұйықтың екі қабаты әр түрлі жылдамдықпен бірінің үстімен бірі сырғыса, онда анағұрлым тезірек қозғалатын қабатқа түсірілген күш қозғалысқа қарама-қарсы жаққа бағытталады, ал баяу қозғалған қабатқа әсер ететін күш қабаттың қозғалған жағына қарай бағытталған болады.

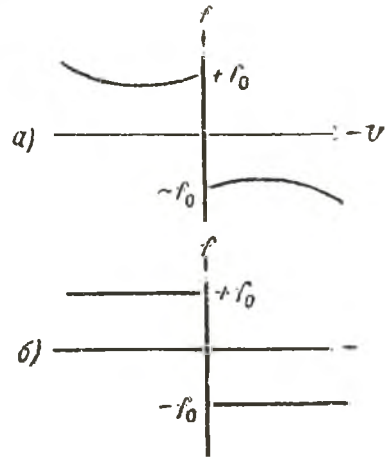


45-сурет.

растыралық, бұлардың соңғысы қозғалмайтындай етіп бекітілген болсын (45-сурет). 1 дене 2 денеге  $f_n$  күшпен қысылады, бұл күш денелердің тиіскен беттеріне жүргізілген нормаль бойымен бағытталады. Бұл нормаль қысымының күші деп аталады да, дененің салмағы немесе басқадай себептерден болады. Сыртқы  $f$  күшпен әсер етіп, 1 дененің орнын ауыстырып көрелік. Бұл жағдайда әрбір нақты алынған қос дене үшін және әрбір нормаль қысым күшінің мәні үшін  $f$  күшінің белгілі бір жорымал  $f_0$  мәні болады, бұл кезде 1 денені орнынан қозғауға мүмкіндік туады. Сыртқы күштердің  $0 < f < f_0$  шектерінде тұрған мәндерінде дене тыныштықта қалады.

Ньютоның екінші заңы бойынша бұл егер  $f$  күші өзінің шамасы жағынан тең, бағыты жағынан қарама-қарсы күшке, яғни тыныштық үйкеліс  $f_{\text{үй}}$  күші деп аталатын күшке теңелген жағдайда ғана мүмкін болады. (45-суретті қараңыз) Ол өздігінен<sup>1</sup>  $f$  сыртқы күштің шамасы-

**Құрғақ үйкеліс.** Құрғақ үйкеліс жағдайында үйкеліс күші бір бет екінші беттің үстімен сырғанағанда пайда болып қана қоймайды, сондай-ақ осындай сырғанауды туғызу үстінде де болады. Соңғы жағдайда бұл тыныштық үйкелісінің күші деп аталады. Тікелей тиісіп тұрған екі 1 және 2 денені қара-



46-сурет.

<sup>1</sup> Бұл пружинаның созылып күштің әсерінен серпимді күш сыртқы күшке дәл теңелген «өздігінен» ұзарғаны сияқты.

на тең мәнді қабылдайды (соңғысы  $f_0$ -ден аспайтындай жағдайда). Бұл жерде  $f_0$  тыныштық үйкеліс күшінің ең үлкен мәнін көрсететінін байқау қиын емес.

Ньютонның үшінші заңына сәйкес 2 денеге де шамасы жағынан  $f_{\text{үй}}$  күшіне тең, бірақ оған қарама-қарсы бағытта болатын  $f'_{\text{үй}}$  тыныштық үйкеліс күші (45-суретте пунктирмен көрсетілген) әсер ететінін ескерткеніміз жөн.

Егер  $f$  сыртқы күші шамасы жағынан  $f_0$ -тен артық болса, дене сырғанап бастайды, сонымен қатар оның үдеуі қорытқы екі күшпен: сыртқы  $f$  және шамасы қандай жағдайда болсын сырғанау жылдамдығына тәуелді болатын сырғанау үйкелісінің күші  $f_{\text{үй}}$  -пен анықталады. Бұл тәуелділіктің сипаты үйкелетін беттердің табиғатымен және күйімен анықталады. Үйкеліс күшінің жылдамдыққа тәуелділігінің жиі кездесетін түрі 46-суретте көрсетілген (ось бойымен үйкеліс күшінің проекциялары мен бойымен сырғанау өтетін бағыт жылдамдықтары салынған; бұл екі проекцияның да таңбаларының қарама-қарсы болатыны айқын). График тыныштық жағдайын да, сырғанау жағдайын да қамтиды. Жоғарыда ескерткендегідей, тыныштық үйкеліс күштерінің нольден  $f_0$ -ге дейінгі шектік мәндері болады; бұл графикте вертикаль кесіндімен бейнеленген. Сырғанау үйкеліс күші жылдамдықтың артуымен, алғашында кемиді, сонымен қатар  $\nu$  нольге ұмтылған кезде оның шамасы  $f_0$ -ге ұмтылады. Жылдамдықтың одан арғы артуында ол өсе бастайды.

Үйкеліс беттерінің күйі мен табиғаты өзгермеген<sup>1</sup> жағдайда, сырғанау үйкеліс күші іс жүзінде жылдамдыққа тәуелді болмай,  $f_0$  тыныштық үйкеліс күшінің максимум мәніне тең болады екен (46, б-сурет).

Құрғақ үйкеліс заңы мынаны тұжырымдайды; тыныштық максимум үйкеліс күші, сондай-ақ сырғанау үйкеліс күші үйкелетін денелердің жанасу беттерінің шамасына тәуелді болмайды және үйкелісетін беттерді бір-біріне қысатын, қалыпты қысым күші  $f_n$  -нің шамасына шамалы пропорционал болады екен.

$$f_{\text{үй}} = k f_n. \quad (19.1)$$

<sup>1</sup> Беттерді өзгерту сырғанау кезінде беттердің бедерін тегістеу, қыздыру салдарынан беттердің тотығуы т. б. себептерге байланысты.

Үйкеліс күшінің жапасу беттерінің шамасына тәуелсіздігі мына мысалдан көрнекі байқалады. Егер тік бұрышты параллелепипед формасындағы (кірпіштің формасындағы) дене басқа бір денені салмақ әсерімен қысса, онда максимал үйкеліс күшінің шамасы (немесе белгілі бір жылдамдықпен алынған сырғанау үйкеліс күші) осы дененің басқа бір денені қай қырымен үйкелісіне байланысты болмайды.

(19.1) теңдеудегі өлшемеіз пропорционалдық коэффициент үйкеліс коэффициенті деп аталады (тыныштыққа немесе сырғанауға сәйкес). Ол үйкелетін беттердің табиғаты мен күйіне, дербес жағдайда олардың кедір-бұдырлығына тәуелді болады. Сырғанау жағдайында үйкеліс коэффициенті жылдамдық функциясы болып табылады.

Үйкеліс коэффициентінің шамасы жөнінде түсінік беру үшін кейбір материалдардың тыныштық үйкеліс коэффициенттерінің мәнін келтіреміз.

І та б л и ц а

Материал	$k$
Металл мен металдың (майлаусыз)	0,15 - 0,25
Металл мен ағаштың	0,5
Ағаш пен ағаштың	0,65
Тері мен металдың	0,6

Үйкеліс күші табиғатта өте үлкен роль атқарады. Біздің күнделікті тіршілігімізде оның пайдасын жиі байқаймыз. Жердің көк тайғақ кезінде, жол мен жаяу адам табанының немесе транспорт дөңгелектерінің арасындағы үйкелістің едәуір кемітін кезіндегі жаяу мен транспорттың басынан өткеретін қиыншылықтарын еске алайықшы. Үйкеліс күші болмаса, мебельді еденге шегелеп қоюға тура келер еді, әйтпесе ол теңіздегі шайқалған кемедей, еден болар-болмас тегіс болмаған кезде, көлбеулік бағытпен сырғанап жөнелер еді. Осыған ұқсас мысалдарды оқушының өзі-ақ келтіре алады.

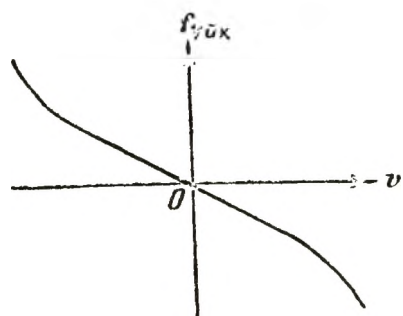
Көп жағдайларда үйкеліс зиянды да, оны мүмкіндігінше әлсірету үшін шаралар қолдануға тура келеді. Мәселен, подшипниктердегі үйкеліс немесе дөңгелек втулкасы мен ось арасындағы үйкеліс жөнінде осыны айтуға болады.

Үйкеліс күшін азайтудағы анағұрлым радикалды тәсіл — сырғанау үйкелісін домалау үйкелісімен ауыстыру. Бұл, атап айтқанда, жазық немесе пілген беттердің бойымен цилиндрлі немесе пілген шар тәрізді денелер арасында пайда болады. Домалау үйкелісі формальды түрде сырғанау үйкелісінің заңына бағынады, бірақ бұл жағдайда үйкеліс коэффициенті едәуір аз болады.

**Тұтқырлық үйкелісі және ортаның кедергісі.** Тұтқырлық үйкелістің құрғақ үйкелістен айырмашылығы тұтқырлық үйкелістің күші нольге жылдамдықпен бір уақытта айналатынына қарай байқалады. Сондықтан сыртқы күш қаншалықты аз болғанымен де ол тұтқырлық ортаның қабаттарына салыстырмалы жылдамдық береді. Ортаның қабаттары арасындағы үйкеліс күші бағынатын заңдар сұйықтар механикасына арналған тарауда қарастырылады.

Бұл параграфта біз қатты дене мен тұтқыр (сұйық немесе газ тәріздес) ортаның арасындағы үйкеліс күшін қарастырумен шектелмекпіз. Мынаны ескерте кеткен жөн: дененің сұйық немесе газ тәріздес ортадағы қозғалысы кезінде меншікті үйкеліс күшінен басқа, ортаның кедергі күші деп аталатын күш пайда болады, бұл үйкеліс күшіне қарағанда әлдеқайда мәндірек болуы мүмкін. Осы күштердің туу себептерін толық қарастырып жатуға мүмкіндіктің жоқтығынан да үйкеліс күші мен ортаның кедергісі бірдей бағынатын, шартты түрде оны үйкеліс күшінің қосынды күші деп атаймыз, заңын айтып берумен шектелмекпіз. Қысқаша айтқанда бұл заңдылықтар төмендегі жағдайға келтіреді.

Үйкеліс күшінің шамасы дененің формасы мен өлшеміне, дененің бетінің күйіне, ортаға қатысты жылдамдыққа, тұтқырлық деп аталатын ортаның қасиетіне байланысты болады. Дененің үйкеліс күшінің ортаға қатысты жылдамдығына типтік тәуелділігінің графиктік түрі 47-суретте көрсетілген. Шамалы жылдамдықта үйкеліс күші



47-сурет.

$$F_{үйк} = -k_1 v, \quad (19.2)$$

жылдамдығымен сызықтық өседі, мұндағы «—» таңбасы үйкеліс күшінің жылдамдыққа карама-қарсы жаққа бағытталғандығын білдіреді.

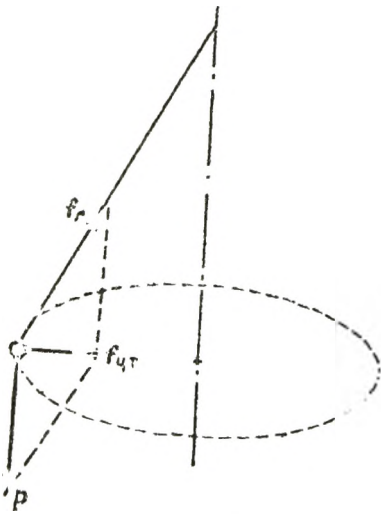
Ал үлкен жылдамдықта сызықтық заң квадраттыққа ауысады, яғни үйкеліс күші жылдамдық квадратына пропорционал өседі.

$$f_{\gamma n} = -k_2 v^2 \frac{v}{v} \quad (19.3)$$

$k_1$  және  $k_2$  коэффициенттерінің шамасы (бұларды үйкеліс коэффициенттері деп атаса да болады) жоғары дәрежеде дененің формасы мен өлшеміне, оның бетінің күйіне және тұтқыр ортаның қасиетіне байланысты болады. Мысалы, глицерин үшін суға қарағанда аса үлкен болады. (19.2) теңдеуінің (19.3)-не көшетін заңындағы жылдамдық мәні осы себептерге байланысты болады екен.

### § 20. Қисық сызықты қозғалыс кезінде әсер ететін күштер

Қисық сызықты қозғалыс кезіндегі үдеуді 9-параграфта айтылғандағыдай, екі құраушы: нормаль  $w_n$  және  $w_t$  - тангенциал үдеудің қосындысы түрінде қарастыруға болады.



48-сурет.

Осыған сәйкес денеге әсер ететін күшті де нормаль  $f_n$  және тангенциал  $f_t$  құраушыларына жіктеуге болады. Тангенциал құраушысы жылдамдықты шамасы жағынан өзгертіп, оның бағытын өзгертпейді. Осыдан мынадай маңызды салдар келіп шығады: егер денеге әсер ететін күш уақыттың әрбір мезетінде дене жылдамдығына перпендикуляр болып келсе, жылдамдық бағыты бойынша өзгере отырып, шамасы бойынша тұрақты болып қалады. Бұдан басқа,

күштің шама бойынша тұрақты болып қалатын жағдайында  $v^2/R$  нормаль үдеуі ( $R$  траекторияның қисықтық радиусы) де шама жағынан өзгеріссіз қалады да, дене тұрақты қисық траектория бойымен, яғни шеңбер бойымен қозғалатын болады.

Шеңбер бойымен бір қалыпты қозғалған кезде дененің үдеуі және оған әсер ететін күш әр уақытта шеңбердің центріне қарай бағытталған («ұмтылған») болады, сондықтан оларды центрге тартқыш үдеу және центрге тартқыш күш деп атайды.

Практикада центрге тартқыш үдеу әдетте қозғалып келе жатқан денеге бір уақытта бірнеше денелердің әсер етуімен түсіндіріледі. Мысал ретінде ауырлық күші  $P$  мен керілген жіптің  $f_r$  реакциясының әсерімен шеңбер бойымен бір қалыпты қозғалған денені қарастыралық (48-сурет). Мұнда  $f_{нт}$  центрге тартқыш күш  $P$  және  $f$  күштерінің қорытқы күші болып табылады.

## § 21. Ньютон заңдарын іс жүзінде қолдану

Векторлық түрде жазылған Ньютонның екінші заңының теңдеуі, жалпы алғанда күш, дененің массасы және оның үдеуі арасындағы байланысты тағайындайды. Есептеуді жүзеге асыру үшін векторлардан таңдап алынған бағытқа сәйкес олардың проекцияларына ауысу керек. Бұл кезде проекцияның мынадай қасиеттері қолданылады.

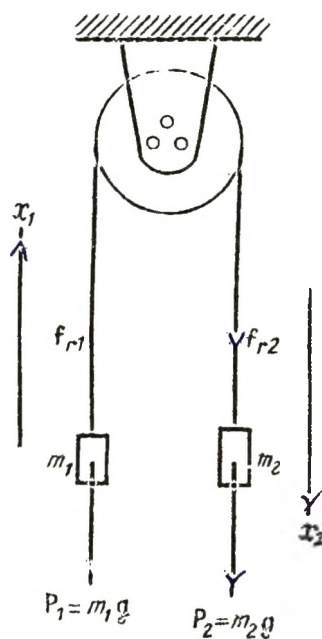
1) тең векторлардың проекциялары бірдей болады;

2) қандай да болсын екінші бір векторды скалярға көбейткеннен шыққан вектордың проекциясы осы екінші вектордың скалярға көбейтіндісіне тең;

3) Векторлар қосындысының проекциясы векторлар қосылғыштарының проекцияларына тең.

Бірнеше мысалдарды қарастыралық.

1 мысал. Массалары  $m_1$  және  $m_2$  екі дене жылжымайтын блоктан асырылған созылмайтын, салмақсыз жіптің ұшына ілінген (49-сурет). Жіп блоктың желобкасының бойымен іс жүзінде үйкеліссіз сырғанап алады. Жіптің керілу күші мен дененің үдеуін табу керек.



49-сурет.



Дененің әрқайсысына екі күштің: ауырлық күші  $P$  және жіптің реакция күші  $f_r$  (қарастыруды Жермен байланысты санақ системасында жүргізіп оны инерциальды деп есептейміз) әсер етеді. Дененің екеуі үшін де екінші заңның теңдеуін былай жазуға болады:

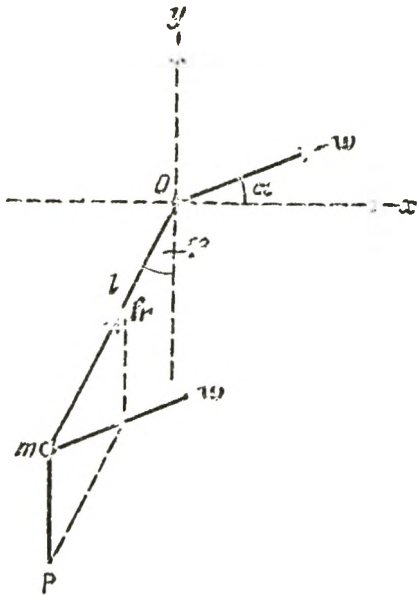
$$\left. \begin{aligned} P_1 + f_{r1} &= m_1 w_1, \\ P_2 + f_{r2} &= m_2 w_2. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Жіптің салмақсыз болуына және блоктың бойымен үйкеліссіз жылжуына байланысты, оның барлық ұзындық бойынша керілуі бірдей болады. Сондықтан реакцияның екі күшінің бірдей  $f_r$  модулы болады. Жіптің керілмейтіндігінен екі дененің үдеуі шамасы жағынан  $w_1 = w_2 = w$ -ге тең.

(21.1) теңдеуден біріншіні  $x_1$ -тің (49-сурет), ал екіншіні —  $x_2$  бағытымен проекциялай отырып

$$\left. \begin{aligned} f_r - P_1 &= m_1 w, \\ P_2 - f_r &= m_2 w \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

системасын аламыз.



50-сурет.

$f_r$  және  $w$  белгісіздерге қатысты (21.2) теңдеу системасын шеше отырып, мынаны аламыз:

$$w = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g,$$

$$f_r = \frac{P_1 m_2 + P_2 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Егер  $m_2 > m_1$  болса, онда  $w$  оң болады, яғни бірінші дененің үдеуі  $w_1$  жоғары қарай, ал екінші дененің үдеуі  $w_2$  төмен қарай бағытталған болады.  $m_2 < m_1$  болған жағдайда екі үдеудің бағыты қарама-қарсы жаққа өзгереді.  $m_1 = m_2$  жағдайда дене үдеусіз қозғалатын (немесе тыныштықта) болады.

Үдеуді біле отырып, (8.2) формула бойынша дененің жылдамдығын да оңай табуға болады.

2 мысал. Массасы  $m$  дене ұзындығы  $l$  созылмайтын жіптің ұшына ілінген (50-сурет) Жіптің тіреуінше бекіту нүктесі Жерге қатысты горизонтпен  $\alpha$  бұрыш жа-

сайтын тұрақты  $w$  үдеумен қозғалады. Жіптің вертикальдан ( $\varphi$  бұрышқа) ауытқуын және дененің жіпке әсер ететін  $f$  күшін табу керек.

Дене, жіптің тіреуішке бекіту нүктесі сияқты,  $w$  үдеумен қозғалатын болады. Демек, екінші заңның теңдеуі дене үшін мынадай түр береді:

$$P + f_r = mw.$$

Осы теңдеуге енетін векторды  $x$  және  $y$  координаталық осьтерге проекциялап, мынаны аламыз:

$$\left. \begin{aligned} P_x + f_{rx} &= m\omega_x, \\ P_y + f_{ry} &= m\omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

50-суреттен

$$\begin{aligned} P_x &= 0, & P_y &= -P = -mg; \\ f_{rx} &= f_r \sin \varphi = f \sin \varphi; \\ f_{ry} &= f_r \cos \varphi = f \cos \varphi; \\ \omega_x &= \omega \cos \alpha; & \omega_y &= \omega \sin \alpha \end{aligned}$$

екені белгілі (іздейтін  $f$  күші мен  $f_r$  күші шамасы жағынан тең).

Проекция мәнін (21.3) теңдеуіне қойсақ:

$$\begin{aligned} 0 + f \sin \varphi &= m\omega \cos \alpha, \\ -mg + f \cos \varphi &= m\omega \sin \alpha. \end{aligned}$$

Осы теңдеулер системасын  $\varphi$  және  $f$ -ге қатысты шеше отырып, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega \cos \alpha}{g + \omega \sin \alpha}, \\ f &= m\sqrt{g^2 + 2g\omega \sin \alpha + \omega^2} \end{aligned} \quad (21.4)$$

$\alpha = \pm \pi/2$  болғанда («+» таңбасы  $w$ -ның жоғары қарай болған бағытына, ал «-»  $w$ -ның төмен қарай болған бағытына сәйкес келеді). (21.4) формуласы өзімізге таныс (18.4) формулага ауысады.

## § 22. Импульс

Ньютонның екінші заңының теңдеуіне

$$m \frac{dv}{dt} = f \quad (22.1)$$

басқаша түр беруге болады: классикалық механикадағы  $m$  массаның тұрақты шама екенін ескере отырып, оны

туындыға алып, (22.1) теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{f}.$$

Векторлық

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (22.2)$$

шамасын материялық нүктенің<sup>1</sup> импульсы деп атайды. Импульс анықтамасын пайдалана отырып, екінші заңның теңдеуін

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f} \quad (22.3)$$

түрінде жазамыз, ал заңның өзін былай тұжырымдаймыз: *уақыт бойынша алынған материялық нүкте импульсының туындысы нүктеге әсер ететін барлық қорықы күштерге тең.*

(22.3) теңдеуі (22.1) теңдеуіне қарағанда анағұрлым кең шекте орынды. Салыстырмалық теориясы анықтанғандай, дененің массасы жылдамдықтың функциясы болып табылады: жылдамдықтың артуымен масса да өседі. Рас, массаның жылдамдыққа тәуелділігі былай<sup>2</sup>: жарық жылдамдығынан сәуір аз жылдамдықтарда масса тұрақты болып қалады. Алайда үлкен жылдамдықтарда масса жылдам өсе бастайды да, соның нәтижесінде (22.1) теңдігі қолданылмайтын болады. Сонымен қатар (22.3) теңдеуі, осы жағдайда да орынды болып қала береді. Сонымен, (22.3) теңдеуі релятивистік механикада да (12-параграфты қараңыз) өз мәнін сақтап қалады.

(22.3) теңдеуін  $dt$ -ге көбейтін, мына қатынасқа келеміз:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{f}dt, \quad (22.4)$$

<sup>1</sup> Бұрын «импульс» терминінің орнына «қозғалыс мөлшері» терминін қолданғанбыз.

<sup>2</sup> Бұл тәуелділік мына түрде беріледі:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

мұндағы  $m$  —  $v$  жылдамдықпен қозғалған денеге қатысты санақ системасындағы дененің массасы,  $m_0$  — тыныштық массасы, яғни  $v=0$  болғандағы масса,  $c$  — бослықтағы жарық жылдамдығы.

мұны интегралдасақ,  $t_1$  мезеттен  $t_2$  мезетке дейін өткен уақыт аралығындағы импульстың өсімшесін береді:

$$p_2 - p_1 = \int dp = \int_{t_1}^{t_2} f dt. \quad (22.5)$$

Атап айтсақ, егер  $f = \text{const}$  болса, (22.5) формуласы  $\tau$  уақыт аралығында импульстың өсімшесі үшін мына мәнді береді:  $p_2 - p_1 = f\tau$ .

(22.3) өрнегінен импульстың уақытқа байланысты өзгерісін біле отырып, денеге әсер ететін күшті анықтауға болатындығын ескергеніміз жөн.

### § 23. Импульстың сақталу заңы

Материялық  $N$  нүктелерден тұратын системаны қарастыралық (қысқаша оны денелер системасы деп атаймыз). Системаға енетін денелер бір-бірімен де берілген системаға жатпайтын денелермен де өз ара әсерлесе алады. Осыған сәйкес система денесіне әсер ететін күштерді ішкі және сыртқы күштер деп бөлуге болады. Ішкі күштер деп берілген денеге системаның қалған денелері әсер етуін айтамыз, сыртқы күштер деп системаға жатпайтын денелердің әсерімен қамтамасыз ететін күштерді атаймыз.

Сыртқы күш жоқ болып қалған жағдайда системаны тұйық деп атаймыз.

Системаның импульсы  $P$  деп, системаны жасайтын дене импульстарының векторлық қосындысын айтамыз:

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_N = \sum_{i=1}^N p_i.$$

Системаның инерция центрі деп кеңістіктегі орны радиус-вектормен берілген нүктені айтады ол төмендегіше анықталады:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_N r_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{m}, \quad (23.1)$$

мұндағы  $m_i$  —  $i$ -ші дененің массасы,  $r_i$  — осы дененің кеңістіктегі орнын анықтайтын радиус-вектор,  $m$  — системаның массасы.

Инерция центрінің декарттық координаталары координаталық осьтердегі  $r_c$  проекцияларына тең болады:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (23.2)$$

Инерция центрінің системаның ауырлық центрімен<sup>1</sup> дәл келетіндігін көрсетелік.

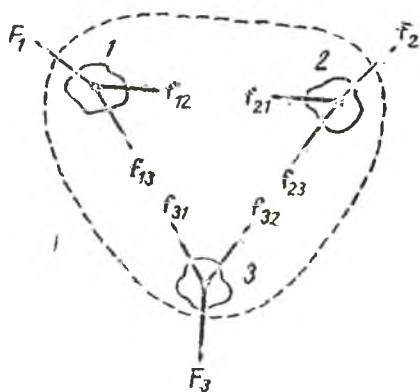
Инерция центрінің жылдамдығы уақыт бойынша  $r_c$ -ті дифференциалдау арқылы алынады:

$$v_c = \dot{r}_c = \frac{\sum m_i \dot{r}_i}{m} = \frac{\sum m_i v_i}{m}$$

$m_i v_i$ -ні  $p_i$  деп, ал  $\sum p_i$  система импульсын беретінін ескеріп, былай жазуға болады:

$$p = m v_c. \quad (23.3)$$

Сонымен, системаның импульсы системаның массасы мен оның инерция центрінің жылдамдығының көбейтіндісіне тең.



51-сурет.

Система үш денеден тұрады делік (51-сурет) Ішкі күштердің әрқайсысы, мысалы,  $f_{12}$ , яғни 1 денеге 2 дененің әсер ететін күшіне бірінші дененің екінші денеге әсер ететін  $f_{21}$  күші сәйкес келеді. Сонымен қатар Ньютонның үшінші заңы бойынша  $f_{12} = -f_{21}$ .  $F_1$ ,  $F_2$  және  $F_3$  символдарымен система денелерінің 1-ші, 2-ші және 3-шісіне сәйкес сыртқы денелердің әсер ететін барлық қорытқы күштері белгіленген.

Үш дененің әрқайсысы үшін (22.3) теңдеуін жазалық:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1 &= f_{12} + f_{13} + F_1, \\ \frac{d}{dt} p_2 &= f_{21} + f_{23} + F_2, \\ \frac{d}{dt} p_3 &= f_{31} + f_{32} + F_3. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Бұл ауырлық күшінің біртекті өрісінде ғана орынды (41-параграфты қараңыз).

Барлық үш теңдеуді қосалық. Сонда ішкі күштердің қосындысы нольге тең болады да, нәтижесінде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \quad (23.4)$$

Сыртқы күштер жоқ кезде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0,$$

демек, тұйық система үшін  $\mathbf{p}$  тұрақты.

Бұл нәтижені дененің кез келген  $N$  санынан тұратын системаға жинақтау оңай. Қосындының қысқартылып алынған белгісін пайдалана отырып, барлық дене үшін (22.3) теңдеуді төмендегіше жазуға болады:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{F}_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (23.5)$$

(23.5) өрнегі бір-бірінен  $i$  индексінің мәнімен айырылатын теңдеулердің  $N$  системасын көрсетеді. Осы теңдеулердің әрқайсысын қосындылау  $k$  индексі арқылы жүргізіледі, сонымен қатар  $i$ -ші теңдеудегі  $k$  индексі  $k=i$  мәнінен басқа 1-ден  $N$ -ге дейінгі мәндерді қабылдай алады.

Осы теңдеулерді қосып  $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki}$  екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (23.6)$$

Демек, система импульсының векторынан уақыт бойынша алынған туындысы система денесіне түсірілген барлық сыртқы күштердің векторлық қосындысына тең.

Тұйық система үшін (23.6) қатыстың оң бөлігі нольге тең, осының салдарынан  $\mathbf{p}$  уақытқа тәуелді болмайды. Бұл пайымдау төмендегіше тұжырымдалатын импульстың сақталу заңының мазмұнын береді: *материялық нүктелердің тұйық системаларының импульсы тұрақты болып қалады.*

Импульстың сыртқы әсерлерге ұшыраған системалар үшін де, яғни системаның денесіне әсер ететін сыртқы күштер қосындысында ноль беретін жағдайында да тұрақты болып қалатындығын ескерелік.

Егер сыртқы күштердің қосындысы нольге тең болмаған жағдайдың өзінде бұл қосындының проекциясы кейбір бағытта ноль болса, онда бұл бағыттағы импульс

құраушысы тұрақты болады. Шынында, (23.6) теңдеудің барлық шамаларын еркімізше алған  $x$  бағытына проекциялай отырып және

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{p}\right)_{\text{пр. } x} = \frac{d}{dt} p_x^1$$

екенін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}, \quad (23.7)$$

біздің жоғарыда айтқандарымыз осыдан шығады.

(23.3)-ке сәйкес импульстың сақталу заңынан мынау шығады: денелердің тұйық системасының инерция центрі кейде түзу сызықты және бір қалыпты қозғалыста болады, кейде қозғалмай қалады.

Импульстың сақталу заңы негізінде жатқан көптеген құбылыстарды атауға болады. Мәселен, сырғанақ еденнің үстіндегі затты орнынан қозғалту үшін оған қарама-қарсы бағытта сырғанап күш жұмсауға тура келеді. Ракетаның (және реактивті двигательдердің) іс-әрекеті мынаған негізделген: ракетаның сопласынан жанармай жанған кезде пайда болатын газ ағынын шығарып тастау нәтижесінде ракета шыққан газға шамалас импульс алады.

---

<sup>1</sup> (2.11) формуласын қараңыздар.

## ІІІ ТАРАУ ЖҰМЫС ЖӘНЕ ЭНЕРГИЯ

### § 24. Жұмыс

Айталық,  $\mathbf{f}$  күші әсер еткен дене қандай да бір траекторияның бойымен қозғала отырып,  $s$  жол жүріп өтсін делік. Бұл жағдайда күш денеге үдеу бере отырып, не оның жылдамдығын өзгертеді, не қозғалысқа қарсы әсер ететін екінші күштің (немесе күштердің) әсерін жояды.  $s$  жолдағы  $\mathbf{f}$ -тің әсері жұмыс деп аталатын шамамен сипатталады.

Жұмыс скаляр шама делінеді, ол орын ауыстыру бағытындағы  $f_s$  күш проекциясы мен күш түскен нүктенің жүрін өткен  $s$  жолының көбейтіндісіне тең:

$$A = f_s s. \quad (24.1)$$

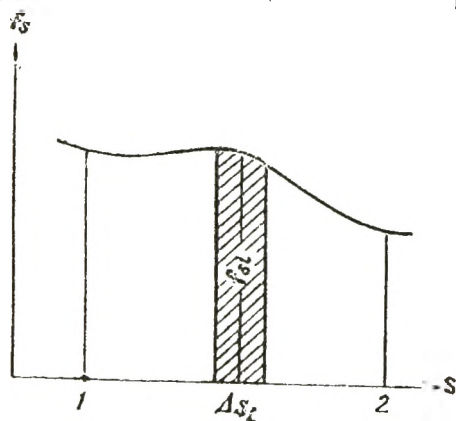
Орын ауыстыру бағытындағы (яғни жылдамдық бағытындағы)  $f_s$  күш проекциясы барлық уақытта өзгеріссіз қалған жағдайда (24.1) өрнегі орындалады. Атап айтқанда, бұл дененің түзу сызықты қозғалған кезінде және шама жағынан тұрақты  $f$  күші қозғалыс бағытымен тұрақты  $\alpha$  бұрышын жасаған кезде орынды.  $f_s = f \cos \alpha$  болғандықтан да (24.1) өрнегіне төмендегідей түр беруге болады:

$$A = fs \cos \alpha. \quad (24.2)$$

Жұмыс — алгебралық шама. Егер күш пен орын ауыстыру бағыты сүйір бұрыш жасаса ( $\cos \alpha > 0$ ), жұмыс оң таңбалы болады. Егер  $\alpha$  бұрышы доғал ( $\cos \alpha < 0$ ) болса, жұмыс теріс таңбалы болады.  $\alpha = \pi/2$  болғанда жұмыс нольге тең. Соңғы жағдай механикадағы жұмыс ұғымының жұмыс жайындағы көдімгі түсі-



ніктен едәуір айырмашылықтың барлығын анық көрсетеді. Кәдімгі түсініктегі кез келген күш жұмсау, соның ішінде бұлшық еттің күш салуы жұмыс істеумен қоса жүреді. Мысалы, қозғалмай тұрып, ауыр жүкті көтеру үшін, сонымен қоса осы жүкті горизонталь жолмен апару үшін жүк таситын адам көп күш жұмсайды, яғни «жұмыс істейді». Алайда жұмыс мұндай жағдайларда механикалық шама ретінде нольге тең болады.



52-сурет.

Егер орын ауыстыру бағытындағы күш проекциясының шамасы қозғалыс кезінде тұрақты болып қалмаса, жұмысты есептеу үшін  $s$  жолды элементар  $\Delta s$  учаскелерге бөлеміз. Бұлардың кішілігі соншалық, тіпті дененің осындай учаскелерді жүріп өткен уақыты ішінде  $f_s$ -ті өзгеріссіз қалады деп есептеуге болады. Сонда әрбір элементар учаскедегі күш жұмысы жуықтап алғанда мынаған тең болады:

$$\Delta A \cong f_s \Delta s,$$

ал бүкіл  $s$  жолдағы жұмыс элементар жұмыстардың қосындысы ретінде есептелуі мүмкін:

$$A = \sum \Delta A_i \cong \sum f_{si} \Delta s_i \quad (24.3)$$

Барлық  $\Delta s_i$ -ті нольге ұмтылдырған кезде (24.3) жуықтатылған теңдік іліксіз теңдікке көшеді:

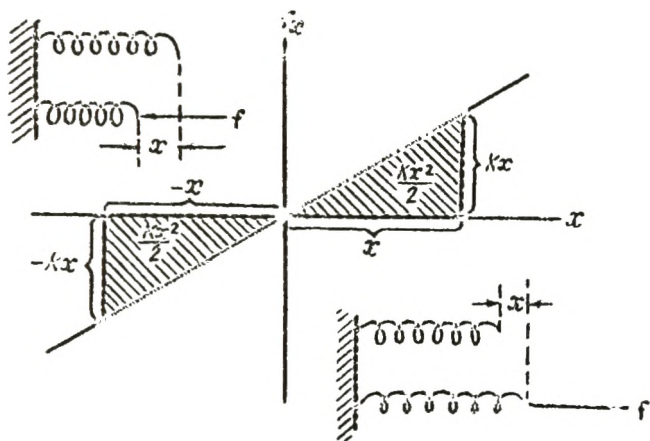
$$A = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum f_{si} \Delta s_i = \int_s f_s ds^1 \quad (24.4)$$

52-суретте траекториядағы ( $s$  осін горизонталь ось деп атауға болады, ал осы осьтің 1 және 2 нүктесі арасындағы кесіндінің ұзындығы жолдың толық ұзындығына тең болады) нүкте орнының функциясы ретінде  $f_s$  графигі салынған. Суреттен элементар  $\Delta A_i$  жұмыстың сан мәні жағынан штрихталған жолақтың ауданына тең, ал 1 нүктеден 2 нүктеге дейінгі жолдағы  $A$  жұмыс сан

<sup>1</sup> Берілген жағдайда пайымдауымыздың барымен бір қалыпсыз қозғалыс кезінде жүріп өткен жолға арналған формуланы қорытындылағандағы сияқты (4-параграфты қараңыз).

мәні жағынан 1 және 2 вертикаль түзулер мен  $s$  осінің арасындағы  $f_s$  қисықпен шектелген фигураның ауданына тең екені көрінеді.

Гук заңына бағынатын пружинаны созған кезде істелінетін жұмысты табалық. Пружинаны, пружинаға әсер ететін күшті шамасы жағынан барлық уақытта  $f = kx$  серпімділік-күшіне тең деп есептеуге болатындай, баяу созамыз. Мұндағы  $x$  — пружинаның ұзаруы. Күш орын ауыстыру бағытында  $f_x = f$  болатындай, әсер етеді. Күш



53-сурет.

түсірілген нүктенің жүріп өткен жолы  $x$ -ке тең (53-сурет) 53-суреттен пружинаның  $x$  ұзаруын туғызу үшін істелінетін жұмыстың мынаған тең болатынын көреміз:

$$A = \frac{kx^2}{2}. \quad (24.5)$$

$x$  шамасына пружинаны қысқан кезде шамасы мен таңбасы жағынан оны созғандағыдай жұмыс істелінеді. Бұл жағдайда күштің  $f_x$  проекциясы теріс [пружинаға әсер ететін күш сол жаққа қарай бағытталған болады да  $x$  оңға қарай өсетін (53-суретті қараныз)] болады, сондай-ақ  $\Delta x$  те теріс болады, осының салдарынан  $f_x \Delta x$  оң болады.

Серпімді күштер, яғни пружина жағынан оны деформациялаушы денеге әсер еткен күштер созылу кезінде де, қысылу кезінде де  $\frac{kx^2}{2}$  -ге тең болатынын ескертелік, өйткені әрбір уақыт мезетіндегі серпімді күш деформацияны туғызатын күшке шамасы жағынан тең, ал бағыты жағынан қарама-қарсы болады.

**Жұмыстың бірліктері.** Жұмыс бірлігі ретінде бірлік күштің орын ауыстыру бағытындағы бірлік жолда істеген жұмысы алынады:

1) СИ системасында жұмыс бірлігі джоуль (*дж*). Ол 1 ньютон күштің 1 метрге тең жолдағы істеген жұмысына тең.

2) СГС системасында жұмыс бірлігі *эрг*. Ол 1 дина күштің 1 сантиметрге тең жолдағы істеген жұмысына тең.

3) МКГСС системасында—килограммометр (*кжк·м*). ол 1 *кжк* күштің 1 метрге тең жолдағы істеген жұмысына тең.

Жұмыс бірліктері арасында мынадай қатыстар бар:

$$1 \text{ дж} = 1 \text{ н} \cdot 1 \text{ м} = 10^5 \text{ дин} \cdot 10^2 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг},$$

$$1 \text{ кжк} \cdot \text{м} = 1 \text{ кжк} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ н} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ дж}.$$

**Векторлардың скаляр көбейтіндісі.** Жұмысқа арналған өрнек күш векторы мен орын ауыстыру векторының скаляр көбейтіндісі түрінде берілуі мүмкін.

**A** және **B** екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп осы векторлардың модульдарын олардың арасындағы  $\alpha$  бұрыштың косинусына көбейткенге тең скалярды айтады (54-сурет). Скаляр көбейтіндісінің символы векторлар символдарының арасына ешқандай таңба қоймастан **AB** түрінде жазылады<sup>1</sup>.

Сөйтіп, скаляр көбейтінді анықтама бойынша мынаған тең:

$$AB = AB \cos \alpha. \quad (24.6)$$

$\alpha$  сүйір бұрыш болғанда, **AB** нольден артық, ал  $\alpha$  доғал бұрыш болғанда, **AB** нольден кем болады; өз ара перпендикуляр екі вектордың скаляр көбейтіндісі ( $\alpha = \pi/2$ ) нольге тең.

Квадрат астындағы вектор деп вектордың өзіне-өзінің скаляр көбейтіндісі екендігін ескерелік:

$$A^2 = AA = AA \cos 0 = A^2 \quad (24.7)$$

(вектордың өзіне-өзінің векторлық көбейтіндісі нольге тең). Демек, вектордың квадраты оның модульының квадратына тең.

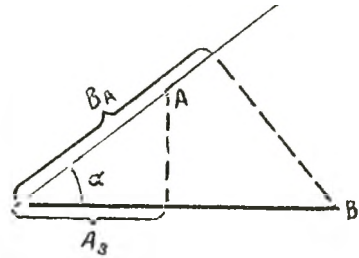
Анықтамалап, скаляр көбейтінді қосылғыштардың ретіне байланысты болмайды, сондықтан да векторлық көбейтіндіден гөрі скаляр көбейтінді коммутативті екен.

<sup>1</sup>  $A \cdot B$  және  $(A, B)$  сияқты белгілеулер аз қолданылады.

(24.6) өрнекке мына төмендегідей түр беруге болады:

$$AB = AB \cdot \cos \alpha = A (B \cos \alpha) = B (A \cos \alpha)$$

54-суреттен  $B \cos \alpha$  —  $\vec{A}$  векторының бағытындағы  $\vec{B}$  векторының проекциясына —  $B_A$ -ға тең екендігі, осыған ұқсас  $A \cos \alpha = 1_B$  —  $\vec{B}$  векторының бағытындағы  $\vec{A}$  векторының проекциясына тең екендігі көрініп тұр. Сондықтан скаляр көбейтіндісіне анықтаманы басқаша да беруге болады: екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, төмендегідей көбейтілген векторлардың бірінің модульін екінші вектордың біріншінің бағытындағы проекциясына көбейткенге тең скалярды айтамыз.



54-сурет.

$$AB = A_B B = AB_A \quad (24.8)$$

Векторлар қосындысының проекциясы қосылғыш векторлар проекцияларының қосындысына тең. Осыдан:

$$\begin{aligned} A(\vec{B} + \vec{C} + \dots) &= A(\vec{B} + \vec{C} + \dots)_A = A(B_A + C_A + \dots) = \\ &= AB_A + AC_A + \dots = A\vec{B} + A\vec{C} + \dots \end{aligned}$$

екендігі шығады. Сонымен, векторлардың скаляр көбейтіндісі дистрибутивті — қандай да бір  $\vec{A}$  векторының бірнеше векторлардың қосындысына скаляр көбейтіндісі жеке-жеке алғандағы әрбір  $\vec{A}$  векторлар қосындыларының скаляр көбейтіндісіне тең.

Векторлардың скаляр көбейтіндісін пайдаланып, жұмысқа арналған (24.4) өрнегін мына түрде жазуға болады:

$$A = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{f}_i \Delta \mathbf{s}_i = \int_s \mathbf{f} ds, \quad (24.9)$$

мұндағы  $\Delta \mathbf{s}$  деп элементар орын ауыстыру векторын түсінеміз, оны ертеректе  $\Delta \mathbf{r}$  арқылы белгілегенбіз [  $|\Delta \mathbf{r}|$  элементар орын ауыстыру модульі элементар жолдың шегіндегі  $\Delta s$ -ке тең болады (3-параграфты қараңыз) ].

Денеге бір мезгілде бірнеше күш әсер етсін делік, оның қорытқы күші мынаған тең болсын:  $\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{f}_k$ . Векторлардың скаляр көбейтіндісінің дистрибутивтігінен

$\Delta s$  жолында істелген қорытқы  $\Delta A$  жұмыс мына формула бойынша есептелінеді:

$$\Delta A = \left( \sum_k \mathbf{f}_k \right) \Delta \mathbf{s} = \sum_k (\mathbf{f}_k \Delta \mathbf{s}) = \sum_k \Delta A_k,$$

яғни бірнеше күштің қорытқы жұмысы әрбір күштің жеке-жеке атқарған жұмысының алгебралық қосындысына тең,  $\Delta s$  элементар орын ауыстыруы

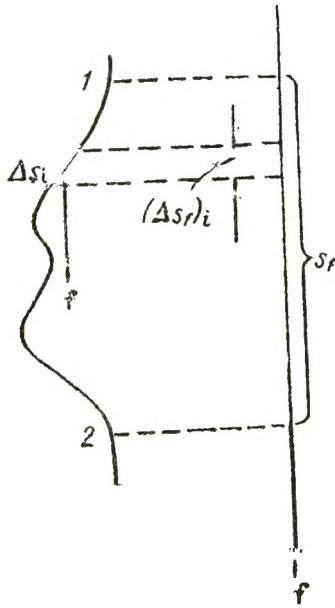
$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v} \Delta t$$

аркылы берілуі мүмкін. Сондықтан (24.9) формуласы мына түрге келтіріледі:

$$A = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \mathbf{v} dt. \quad (24.10)$$

(24.8) формуламен сәйкес  $\mathbf{f}_s \Delta \mathbf{s} = \mathbf{f} \Delta s_f$ , мұндағы  $\Delta s_f$  — күш бағытындағы элементар орын ауыстырудың проекциясы. Сондықтан жұмысты былай жазуға болады:

$$A = \lim_{(\Delta s_f)_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{f}_i (\Delta s_f)_i = \int_s \mathbf{f} ds_f. \quad (24.11)$$



55-сурет.

Егер күш тұрақты шама, әрі бағыты болса (55-сурет), (24.9) формуладағы  $\mathbf{f}$  векторын интеграл сыртына шығаруға болады, нәтижесінде жұмысқа арналған өрнек мына түрде жазылады:

$$A = \mathbf{f} \int ds = \mathbf{f} s = \mathbf{f} s_f, \quad (24.12)$$

мұндағы  $s$  — орын ауыстыру векторы, ал  $s_f$  — күш бағытындағы оның проекциясы.

## § 25. Қуат

Практикада істелінген жұмыс шамасы ғана емес, сол жұмысты істеуге кеткен уақыттың да маңызы зор. Сондықтан жұмыс істеуге арналған механизмдердің сипаттамасы үшін бірлік уақыттың ішінде берілген механизмнің қандай жұмыс істегенін көрсететін шама енгізіледі. Бұл шаманы қуат деп атаймыз. Сөйтіп,  $W$  қуат дегеніміз  $\Delta t$  уақыт аралығында орындалатын  $\Delta A$  жұмыс-

тың сол уақыт аралығына қатынасына тең шама екен, яғни

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (25.1)$$

Егер бірдей, мейлінше аз  $\Delta t$  уақыт аралығында бірдей емес  $\Delta A$  жұмыс істелінген болса, қуат та уақытқа байланысты өзгергіш болады. Бұл жағдайда қуаттың лездік мәнін қарастырамыз:

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (25.2)$$

Лездік қуат (25.2) тұрақты болмаған жағдайда, (25.1) өрнегі уақыт аралығы ішіндегі қуаттың орташа мәнін береді.

$dt$  уақыттың ішінде күш түсірілген нүкте  $ds$  орын ауыстыру жасасын. Сонда  $dt$  уақыт ішінде  $dA$  элементар жұмыс мынаған тең болады:

$$dA = \int ds,$$

ал қуатты мына түрге келтіруге болады:

$$W = \frac{dA}{dt} = \int \frac{ds}{dt}$$

Бірақ  $\frac{ds}{dt}$  жылдамдық векторы  $v$ -ге тең. Демек, қуат күш векторы мен күш түсірілген нүкте қозғалысының жылдамдық векторының скаляр көбейтіндісіне тең:

$$W = \mathbf{f}v. \quad (25.3)$$

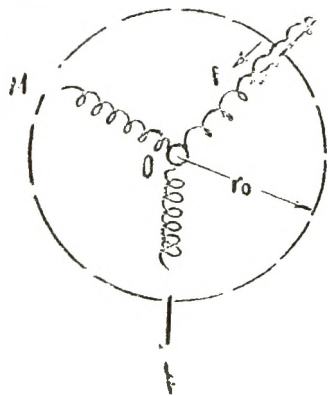
**Қуат бірліктері.** Қуат бірлігі үшін бірлік уақыт (*сек*) ішінде істелінген бірлік жұмыстың (*дж* немесе *эрг*) қуаты алынады. СИ системасында қуат бірлігі секундтағы джоульге тең ватт (*вт*) болып табылады. СГС системасындағы қуат бірлігінің (*эрг/сек*) арнайы аты жоқ. Ватт пен *эрг/сек* арасындағы қатыс мынадай:  $1 \text{ вт} = 10^7 \text{ эрг/сек}$ .

МКГСС-системасында қуат бірлігін секундтағы 75 килограммометрге тең ат күші (*ат күші*) атқарады.  $1 \text{ ат күші} = 736 \text{ вт}$ .

## § 26. Күштердің потенциал өрісі. Консервативтік және консервативтік емес күштер

Егер дене, кеңістіктің әрбір нүктесінде күші бар басқа бір дененің әсеріне тап болатын, заңды түрде нүктеден нүктеге өзгертін жағдайға түссе, онда ол денені

күштер өрісінде түр деп айта аламыз. Айталық, мысалы, дене Жер бетіне жақын жерде ауырлық күшінің өрісінде болады, кеңістіктің әрбір нүктесінде оған вертикаль бойымен төмен қарай бағытталған  $p = mg$  күші әсер етеді.



56 сурет.

Екінші мысал ретінде қандай да бір  $O$  центріне пружинамен «байланған»  $M$  денесін қарастырамыз (56-сурет). Пружинаның бір ұшы қозғалмайтын  $O$  нүктесінің айналасында кез келген бағытта шарнирде айнала алады, ал екінші ұшы  $M$  денесіне бекітілген. Кеңістіктің әрбір нүктесінде  $M$  денесіне радиус бойымен (яғни  $O$  центрі мен  $M$  денесі арқылы өтетін түзу бойымен) бағытталған күш әсер етеді, ол мынаған тең:

$$f = -k(r - r_0), \quad (26.1)$$

мұндағы  $r$  — денесінің  $O$  центрінен қашықтығы,  $r_0$  — деформацияланбаған пружинаның ұзындығы,  $k$  — пропорциональдық коэффициент. Егер  $r > r_0$  (пружина созылған) болса, күш центрге қарай бағытталады да таңбасы «—» болады (күш пен радиус вектордың бағыты қарама-қарсы болады), егер  $r < r_0$  (пружина қысылған) болса, күш центрден бері қарай бағытталады да таңбасы «+» болады. Қарастырылған күштер өрісі центрлік күштердің центрлік өрісі деп аталатынның дербес жағдайы. Оның мәнісі былай: кеңістіктің әрбір нүктесінде күштің бағыты қандай да бір центрден өтеді, ал күштің шамасы  $f = f(r)$  осы центрге дейінгі қашықтыққа тәуелді болады.

Ауырлық күш өрісі де центрлік күштер өрісінің дербес жағдайы.

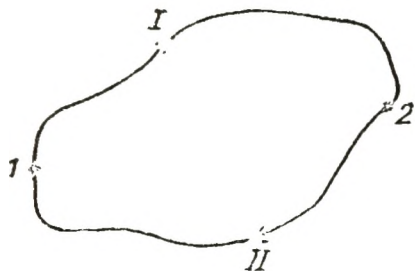
Келтірілген мысалдарға тән нәрсе, денеге әсер ететін күш кеңістіктегі дененің орнына ғана (дәлірек айтсақ, денеге басқа бір дененің әсер етуіне қатысты орнына) байланысты болып, ал дененің жылдамдығына байланысты болмауы екен.

Дененің орнына ғана байланысты болатын күштер үшін олардың денеге қатысты істейтін жұмысы жолға тәуелді болмай, дененің кеңістіктегі бастапқы және соңғы орнымен ғана анықталатын жағдайы болады. Бұл

жағдайда күштер өрісін потенциалық деп, ал күштердің өзін консервативтік деп атаймыз. Жұмысы дененің бір орынан екінші орынға ауысқандағы жолына тәуелді күштер консервативтік емес күштер деп аталады.

Кез келген тұйық жолдағы консервативтік күштердің жұмысы нольге тең болады. Шынында да, потенциал өрісте тұрған дененің бір айналып шығатын тұйық жолын екі бөлікке бөлейік: дененің *I* нүктеден *2* нүктеге ауысатын *I* жолын және дененің *2* нүктеден *1* нүктеге ауысатын *II* жолын сонымен бірге *1* және *2* нүктелерін қалауымызша таңдап алайық (57-сурет). Бүкіл тұйық жолдағы жұмыс әрбір учаскелердегі істелген жұмыстардың қосындысына тең болады.

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II} \quad (26.2)$$



57-сурет.



58-сурет.

Дененің қандай да бір жолмен, мысалы, *II* жолмен *1* нүктеден *2* нүктеге ауысқандағы істелген жұмысының, сол жолдың бойымен *2* нүктеден *1* нүктеге кері ауысқандағы істелген жұмысына, яғни кері таңбамен алынған сол жұмысқа тең болатындығын көрсетелік.  $\Delta s$  траекториясының учаскесін қарастыралық (58-сурет). Потенциал өрісте *f* күнтің кеңістіктегі дененің орнына байланысты болып, ал дене қозғалысының күйіне (атап айтқанда, қозғалыс бағытына) байланысты болмайтындығынан, бір бағыттағы қозғалыс кезінде  $\Delta s$  жолдағы элементар жұмыс  $\Delta A = f \Delta s$ -ке тең, ал басқа бағыттағы қозғалыс кезінде ол  $\Delta A' = f \Delta s'$ -ке тең.  $\Delta s' = -\Delta s$  болғандықтан да  $\Delta A' = -\Delta A$ . Бұл жолдың кез келген элементар учаскесі үшін дұрыс, демек, барлық жолдағы жұмыс үшін де дұрыс, сондықтан

$$(A_{21})_{II} = - (A_{12})_I \quad (26.3)$$



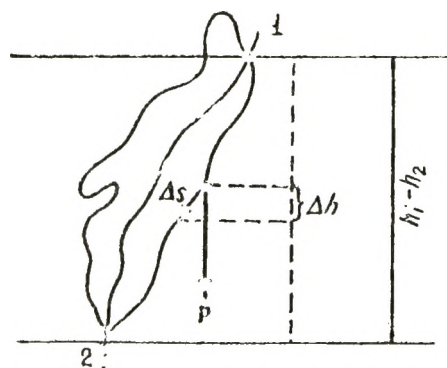
Алынған нәтижені пайдалана отырып, (26.2) теңдікті былай жазуға болады:

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II} \quad (26.4)$$

Бірақ күштердің потенциал өрісіндегі жұмыс жолға байланысты емес, яғни  $(A_{12}) = (A_{12})_{II}$ . Демек, (26.4) өрнегі нольге тең, дәлелдеу керегі де осы еді.

Егер кез келген түйық жолда қандай да бір күштердің жұмысы нольге тең болса, онда осы күштердің, дененің бір орынан екінші орынға ауысқандағы жұмысы жолға байланысты болмайды (мұны жоғарыда келтірілген пікірлер барысына көңіл аудара отырып дәлелдеуге болады). Сондықтан да күштердің потенциал өрісін кез келген түйық жолда жұмысы нольге тең болатын күштер ретінде анықтау керек. Күштердің потенциал өрісіндегі жұмыс түйық жолда нольге тең болғандықтан да, түйық жолдың бір учаскесіндегі күштің жұмысы оң таңбалы болып, ал екінші бір учаскесінде теріс таңбалы болып келеді. Үйкеліс күшінің  $\Delta t$  уақыт аралығындағы істеген жұмысы (24.10) теңдігі бойынша мынаған тең:

$$\Delta A = \mathbf{f} \mathbf{v} \Delta t = -f v \Delta t.$$



59-сурет.

Өйткені  $\mathbf{f}$  және  $\mathbf{v}$  векторлары барлық уақыт қарама-қарсы бағытта болады<sup>1</sup>. Демек, үйкеліс күшінің жұмысы барлық уақытта теріс таңбалы болып қалады да, ал түйық жолда нольден өзгеше болады. Сөйтіп, үйкеліс күштері консервативтік емес күштерге жатады.

Ауырлық күш өрісінің потенциал өріс болып табылатындығын дәлелдедік. Траекторияның кез келген нүктесіне әсер ететін  $p = mg$  күштің шамасы да, бағыты да (вертикаль бойымен төмен қарай) бірдей болады (59-су-

<sup>1</sup> Мұнда қозғалатын дене мен қозғалмайтын (сапак системасына қатысты) денелер арасындағы үйкеліс жағдайы сөз болып отыр. Кейбір жағдайларда үйкеліс күшінің жұмысы оң таңбалы болуы мүмкін. Бұл, үйкеліс күшінің, мысалы, берілген дененің сол бағыттағы, бірақ үлкен жылдамдықтағы, басқа денемен өз ара әсерлесу жағдайында болады.

рет). Сондықтан (24.12) бойынша жұмыс мынаған тең:

$$A = p(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2) \quad (26.5)$$

Бұл өрнектен дененің жолға байланысты болмайтындығы анық. Осыдан ауырлық күш өрісінің потенциалық сәндігі көрінеді.

Центрлік күштер өрісі де потенциалық.  $\Delta s$  жолдағы элементар жұмыс (60-сурет) мынаған тең:

$$\Delta A = f(r) \Delta s_f.$$

Бірақ, берілген орында күш бағытындағы, яғни  $r$  радиус-вектор бағытындағы  $\Delta s$  проекциясы дененің  $O$  нүктесінен қашықтығының  $\Delta r$  өсімшесіне тең:  $\Delta s_f = \Delta r$ . Сондықтан

$$\Delta A = f(r) \Delta r.$$

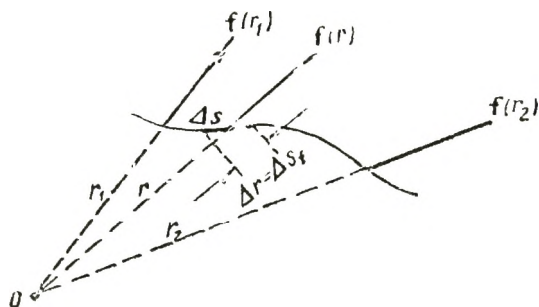
Барлық жолдағы жұмыс

$$A = \sum \Delta A_i = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i) \Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr.$$

Соңғы өрнектің тек  $f(r)$  түріндегі функцияға және  $r_1$  және  $r_2$  мәндеріне байланысты болатындығы сөзсіз. Траекторияның түріне ол ешқандай да байланысты болмайды. Сондықтан центрлік күштер өрісі де потенциалық болады.

## § 27 Энергия. Энергияның сақталу заңы

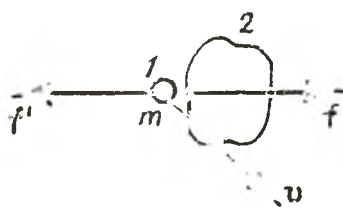
Тәжірибе көрсеткендей, бір дененің ылғи басқа денеге жұмыс істете алатын жағдайы болады. Дененің немесе системаның жұмыс істей алатын қабілетін сипаттайтын физикалық шама энергия деп аталады. Дененің энергиясы екі түрлі себептерден: біріншіден, қандай да бір жылдамдығы бар дененің қозғалысынан, екіншіден дененің күштердің потенциал өрісінде болуынан болуы мүмкін. Бірінші түрдегі энергия кинетикалық энергия деп аталады.



60-сурет.

Ал екінші түрдегі энергияны потенциалдық энергия деп атайды. Қысқаша, кинетикалық энергия — қозғалыс энергиясы, ал потенциалдық энергия — дененің тұрған орнының энергиясы деп айтуға болады.

**Кинетикалық энергия.** Айталық массасы  $m$ ,  $v$  жылдамдықпен қозғалатын 1 дене (материялық нүктені айтып отырмыз) өзімен жанасып тұрған 2 денеге  $f$  күшпен



әсер етсін делік (61-сурет).  $dt$  уақыттың ішінде күш түсірілген нүкте  $ds = vdt$  орын ауыстыру жасайды да, осының салдарынан 1 дене 2 денеге қатысты мынадай жұмыс істейді:

61-сурет.

$$dA = f ds = f v dt. \quad (27.1)$$

Бұл жағдайда, сөз жоқ, 1 дене өзінің қозғалысы негізінде алынған энергия қорының есебінен, яғни  $T$  кинетикалық энергияның есебінен (егер 1 дене қозғалмаса,  $ds$  орын ауыстыру нольге тең болар еді, демек,  $dA$  жұмысы да нольге тең болар еді) басқа денеге қатысты жұмыс істейді. Сондықтан 1 дененің істеген жұмысын оның кинетикалық энергиясының кемуімен<sup>1</sup> теңестіруге болады:

$$dA = -dT$$

Соңғы (27.1) теңдеуді еске ұстай отырып, мынаны табамыз:

$$dT = -f v dt. \quad (27.2)$$

Ньютонның үшінші заңы бойынша 2 дене 1 денеге  $f' = -f$  күшімен әсер етеді, осының салдарынан 1 дененің жылдамдығы  $dt$  уақыттың ішінде

$$dv = \frac{1}{m} f' dt = -\frac{1}{m} f dt$$

<sup>1</sup> Қандай да бір  $a$  шамасының өзгерісін не оның өсімшесімен, не кемуімен сипаттауға болады.  $a$  шамасының өсімшесі (оны  $\Delta a$  деп белгілейтін боламыз) деп осы шаманың соңғы ( $a_2$ ) және бастапқы ( $a_1$ ) мәндерінің айырмасын айтады:

$$\text{өсімше} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

$a$  шамасының кемуі деп оның бастапқы ( $a_1$ ) және соңғы ( $a_2$ ) мәнінің айырымын айтады:

$$\text{кему} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

Шаманың кемуі оның кері таңбамен алынған өсімшесіне тең.

Өсімше мен кему — алгебралық шама. Егер  $a_2 > a_1$  өсімше оң таңбалы болса, ал кемуі теріс таңбалы болады.  $a_2 < a_1$  болған жағдайда өсімше теріс таңбалы, ал кемуі оң таңбалы болады.

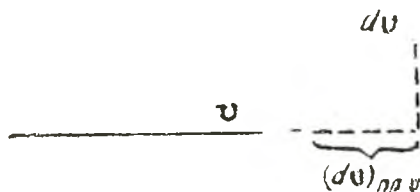
өсімшесін алады. Соңғы теңдіктің екі жағын  $mv$ -ге скаляр түрде көбейтіп, мынаны табамыз:

$$mv dv = -fv dt. \quad (27.3)$$

(27.3)-ті (27.2)-мен салыстыра отырып,  $dT$ -ге арналған өрнекті аламыз:

$$dT = mv dv. \quad (27.4)$$

(27.4) формулага сәйкес  $v dv$  скалярлық көбейтіндіні  $v |dv| \cos \alpha = v (dv)_{\text{пр } v}$  түрінде көрсетуге болады, мұндағы  $(dv)_{\text{пр } v}$  —  $dv$  векторының бағытындағы  $v$  векторының проекциясы.



62-сурет.

62-суреттен  $(dv)_{\text{пр } v}$ -нің жылдамдық модулының өсімшесіне, яғни  $dv$ -ге тең болатындығын оңай көрсетуге болады. Сондықтан (27.4) өрнегін былай жазуға болады:

$$dT = mv dv = d \left( \frac{mv^2}{2} \right). \quad (27.5)$$

Осыдан  $m$  массасы бар,  $v$  жылдамдықпен қозғалатын материялық нүктенің кинетикалық энергиясының

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (27.6)$$

болатындығы шығады<sup>2</sup>

(27.6) өрнектің алымы мен бөлімін  $m$ -ге көбейтіп және  $mv$  көбейтіндісінің дененің  $p$  импульсына тең болатынын еске ұстап, кинетикалық энергияның өрнегін мына түрде жазуға болады:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (27.7)$$

Денеге қатысты істелетін  $A'$  жұмыстың оның кинетикалық энергиясының  $\Delta T = T_2 - T_1$  өсімшесіне тең болатын

<sup>1</sup> Бұл өрнекті  $v \cdot dv \cdot \cos \alpha$  түрінде жазуға болмайды, өйткені, жалпы айтқанда,  $|dv| \neq dv$ .

<sup>2</sup> (27.5) теңдеуді интегралдау  $T = \frac{mv^2}{2} + \text{const}$  өрнегіне келтіреді. Алайда физикалық пайымдаулардан  $v=0$  болғанда  $T$  кинетикалық энергияның да пөльге тең болатындығы түсінікті, осыдан константты пөльге теңеу керек екендігі шығады.

өте маңызды жағдайын ескерте кетелік. Осыны дәлелдеу үшін элементар жұмысқа арналған өрнекті жазалық:

$$dA' = \mathbf{f}' \mathbf{v} dt$$

( $\mathbf{f}'$  — денеге қатысты жұмыс істеуге жұмсалған күш,  $\mathbf{v}$  — дененің жылдамдығы). Енді  $\int \mathbf{f}' dt$  көбейтіндісін [(22.4) өрнегін қараңыз].  $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v}$  арқылы ауыстырып, нәтижесінде мынаны аламыз:

$$dA' = \mathbf{f}' \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = m v dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT$$

Бұл өрнекті интегралдан, төмендегі формуланы алуға болады:

$$A' = T_2 - T_1. \quad (27.8)$$

(27.8) өрнектен, энергияның да жұмыс сияқты өлшемділігінің болатынын көреміз. Бұл жұмысты өлшеу үшін қандай бірліктер пайдаланылса, сондай бірліктермен энергияны да өлшеуге мүмкіндік береді.

**Потенциалдық энергия.** Күштердің потенциал өрісінде тұрған денені (материялық нүктені айтып отырмыз) қарастыралық. Өрістің әрбір нүктесіндегі ( $\mathbf{r}$  радиус-вектормен сипатталатын) қандай да бір  $U(\mathbf{r})$  функциясының белгілі бір мәнін салғастырып, мұны төмендегіше жүзеге асырайық. Қандай да бір бастапқы  $O$  нүкте үшін функцияның кез келген  $U_0$ -ге тең мәнін қабылдайық. Қандай да бір  $I$  нүктедегі  $U_1$  функциясының мәнін алу үшін,  $U_0$ -ге дененің  $I$  нүктеден  $O$  нүктесіне орын ауыстырған кездегі өріс күшінің істеген  $A_{10}$  жұмысын қосамыз:

$$U_1 = U_0 + A_{10} \quad (27.9)$$

(осылай анықталған  $U$  функциясының өлшемділігі жұмыстың немесе энергияның өлшемділігіндей болады). Күштердің потенциал өрісіндегі жұмысы жолға тәуелді болмағандықтан да (26-параграфты қараңыз) осындай тәсілмен табылған  $U_1$  бір мәнді болады.

Осы сияқты өрістің басқа нүктелері үшін  $U(\mathbf{r})$  мәні анықталады. Атап айтқанда, 2 нүктедегі  $U(\mathbf{r})$  мәні мынаған тең болады:

$$U_2 = U_0 + A_{20}. \quad (27.10)$$

$U_1 - U_2$  айырымын есептейік. Ол үшін (27.9) өрнегінен (27.10) өрнегін алып тастап,  $A_{20} = -A_{02}$  (26-пара-

графты қараңыз) екенін пайдаланамыз. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$U_1 - U_2 = (U_0 + A_{10}) - (U_0 + A_{20}) - A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02}.$$

Бірақ  $A_{10} + A_{02}$  қосындысы  $O$  нүктесі арқылы өтетін траектория бойынша денені  $1$  нүктеден  $2$  нүктеге орын ауыстырған кездегі өріс күштерінің істеген жұмысын береді. Алайда денені  $1$  нүктеден  $2$  нүктеге басқа кез келген траекториямен орын ауыстырған кездегі жұмыс та дәл осындай болады. (Мұнда енді траектория  $O$  нүктесі арқылы өтпейді.) Сондықтан  $A_{10} + A_{20}$  қосындыны жәй  $A_{12}$  түрінде жазуға болады, қорытындысында біз мына қатысқа келеміз:

$$U_1 - U_2 = A_{12}. \quad (27.11)$$

Сөйтіп,  $U(r)$  функциясы арқылы қалауымызша алынған  $1$  нүктеден басталып  $2$  нүктеде аяқталатын кез келген жолда өріс күштерінің денеге қатысты істейтін жұмысын анықтауымызға болады. Бұл жұмыс  $1-2$  жолдағы  $U(r)$  функциясының кемуіне тең болады. Соңғы жағдай  $U(r)$  физикалық шаманы потенциалдық энергия деп аталатын механикалық энергияның бір түрі ретінде баяндауға негіз болады.

$U_0$  мәнін қалауымызша алатындықтан да, [(27.9) формуланы қараңыз] потенциалдық энергия қандай да бір белгісіз аддитивтік тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталады екен. Алайда мұның ешқандай әсері жоқ, өйткені барлық физикалық қатысқа дененің екі түрлі жағдайындағы  $U$  мәнінің тек айырмасы ғана енеді. Іс жүзінде дененің белгілі бір жағдайында  $U$ -ды нольге тең деп, ал басқа жағдайындағы энергияны осы энергияға қатынасы арқылы алуға келіселік.

$U(r)$  функциясының нақты түрі күш өрісінің сипатына тәуелді. Айталық, мысалы, жер бетіне жақын ауырлық күш өрісінде массасы  $m$  дененің потенциалдық энергиясы мына түрде болады:

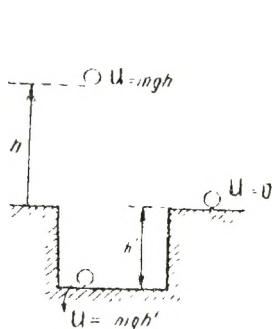
$$U = mgh, \quad (27.12)$$

мұндағы  $h - U=0$  деп есептегендегі деңгейден алынған биіктік. Мұны тікелей, денені  $h_1$  деңгейден  $h_2$  деңгейге ауыстырғандағы ауырлық күшінің жұмысын анықтайтын (26.5) формуладан шығарып алуға болады.

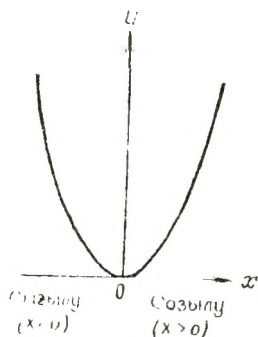
Санақ бастамасы  $U$ -ды қалауымызша алатындықтан да потенциалдық энергияның мәні теріс таңбалы болады.

Егер, мысалы, Жер бетіндегі дененің потенциялық энергиясын ноль деп қабылдасак, онда тереңдігі  $h'$  шұңқырдың түбінде жатқан дененің потенциялық энергиясы  $U = mgh'$  шамасына тең болады (63-сурет). Кинетикалық энергияның теріс таңбалы бола алмайтынын анықталық.

Жоғарыда қарастырған мысалда біз  $U = mgh$  потенциялық энергияны ауырлық күш өрісінде тұрған денеге қатысты алған болатынбыз. Алайда, нақтылы айтқанда,



63-сурет



64-сурет.

потенциялық энергияны бір-бірімен өз ара әсерлесетін денелер системасына қатысты алуға болады. Сонымен, жан-жақты қарастырған жағдайда  $U = mgh$  Жер — дене системасының энергиясы. Денелер системасының потенциялық энергиясы олардың бір-біріне қатысты орналасуына байланысты.

Өз ара әсерлесетін денелер системасы ғана емес жекелеп алынған деформацияланған (мысалы, сығылған немесе созылған пружина) серпімді дененің де потенциялық энергиясы болады. Бұл жағдайда потенциялық энергия дененің жеке бөліктерінің өз ара орналасуына (мысалы, пружинаның көршілес орамдарының ара қашықтығына) байланысты болады.

(24.5)-ке сәйкес пружинаны  $x$  шамасына созу үшін де, сыққандағыдай  $A = 1/2 kx^2$  жұмыс жұмсау қажет. Бұл жұмыс пружинаның потенциялық энергиясын арттыруға кетеді. Демек, пружинаның потенциялық энергиясы  $U$ -дың  $x$  ұзаруға тәуелділігі мына түрге келеді:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (27.13)$$

Бұл тәуелділік 64-суретте график түрінде көрсетілген.

Денелер системасының толық механикалық энергиясы. Жалпы жағдайда дененің бір мезгілде кинетикалық энергиясы да потенциялық энергиясы да болуы мүмкін. Осы энергиялардың қосындысы толық механикалық энергияны жасайды. Мысалы, Жер бетінен  $h$  биіктікте тұрған  $M$  дене Жерге қатысты  $v$  жылдамдықпен қозғалса, төмендегідей толық энергияға ие болады:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (27.14)$$

Дәлірек айтқанда, бұл өрнек Жер — дене системасының толық энергиясын береді;  $mgh$  осы системаның өз ара потенциялық энергиясы,  $\frac{mv^2}{2}$  —  $M$  дененің кинетикалық энергиясы, ал Жердің кинетикалық энергиясы қарастырып отырған санақ системасында нольге тең, мұның өзі (27.14) энергиясын  $M$  дененің энергиясы сияқты айтуымызға негіз болады.

Потенциялық энергия мен кинетикалық энергия бір-біріне айнала алады. Бастапқыда тыныштықта тұрған дененің  $h$  биіктіктен еркін түсуін қарастырайық. Құлағанға дейін дененің кинетикалық энергиясы нольге тең (дене тыныштықта тұр), ал потенциялық энергия —  $mgh$ -қа тең болады. Дене жерге түскен кезде

$$v = \sqrt{2gh} \quad (27.15)$$

жылдамдыққа ие болады, демек, оның кинетикалық энергиясы

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh,$$

бірақ оның есесіне  $h=0$  биіктіктегі потенциялық энергиясы нольге тең болады. Сонымен, потенциялық энергия эквивалентті мөлшерде кинетикалық энергияға айналады.

Жер бетінен  $v$  жылдамдықпен вертикаль жоғары қарай лақтырылған дене бастапқыда  $mv^2/2$  кинетикалық энергияға және нольге тең потенциялық энергияға ие болады. Дене жылдамдығын біртіндеп жоғалта отырып, (27.15) қатыстағы бастапқы жылдамдықпен байланысты  $h$  биіктікке көтеріле алады.  $h$  биіктікте дененің жылдамдығы, демек, кинетикалық энергиясы нольге тең болады, ал оның есесіне потенциялық энергиясы кинетикалық энергияның бастапқы қорына тең болады:



Екі жағдайда да (Жер бетіне жақын дененің құлап түсуі мен көтерілуі) дененің толық энергиясы өзгеріссіз қалады (дене қозғалысына болған ауаның кедергісін есепке алмаймыз)

Кез келген  $h'$  ( $0 < h' < h$ ) биіктік аралығында

$$\frac{mv'^2}{2} + mgh'$$

( $v'$  —  $h'$  биіктіктегі жылдамдық) қосындысының  $mgh$  немесе  $\frac{mv^2}{2}$ -ге тең болатынына көз жеткізу оңай<sup>1</sup>

Бұл нәтиже дененің потенциалдық энергиясының болуымен қамтамасыз ететін күштің әсерінде ( $mg$  күші Жер — дене системасына әсер ететін ішкі күш) ғана тұруынан алынды. Ал сыртқы күштер болғанда жағдай басқаша. Осы күштердің системаны жасайтын денелерге қатысты істейтін жұмысының есебінен системаның толық энергиясы өзгереді. Айталық, мысалы, бастапқы кезде Жер бетінде тыныштықта тұрған  $M$  дене  $mg$  ауырлық күшінен артық және вертикаль бойымен жоғары қарай бағытталған  $f$  күштің әсерінде болсын делік (бұл күшті Жер —  $M$  дене системасына еңбейтін денелерден іздеп табуға болады). Сонда дене қандай да бір үдеумен көтеріле бастайды да осының салдарынан оның потенциалдық және кинетикалық энергиясы өсе бастайды, сонымен қатар толық энергияның артуы ішкі  $f$  күшінің  $M$  денеге қатысты істейтін жұмысына тең болады.

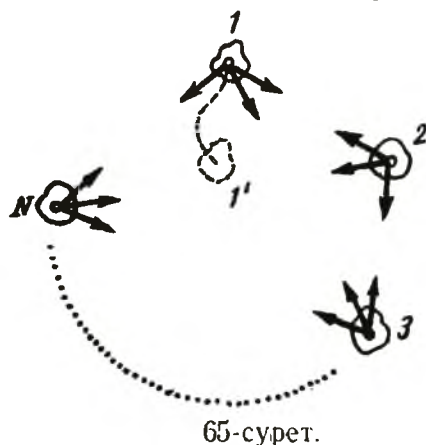
Араларында консерватив күштер әсер ететін  $N$  денелерден тұратын системаның толық энергиясы системаның тұтастай алынған потенциалдық энергиясы мен өз кезегінде системаны құратын жеке денелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең:

$$E = U + T = U + \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (27.16)$$

**Энергияның сақталу заңы.** Араларында тек консерватив күштер ғана әсер ететін  $N$  денелерден тұратын системаны қарастыралық (65-сурет). Қалауымызша алған траекториямен  $I$  дене  $I'$  қалыпқа орын ауыстырды делік. Бұл жағдайда системаның барлық қалған денелерінің  $I$  денеге әсер ететін күштері  $I$  дененің орын ауыстырған-

<sup>1</sup> Мұны жаттығу ретінде жасау ұсынылады.

дағы жолына тәуелсіз жұмыс істейді; ал бұл жұмыс, дененің барлық қалған денелерге қатысты, бастапқы және соңғы орнымен ғана анықталады. Осы сияқты барлық  $N$  денелерді жаңа орынға ауыстырған кезде осы денелерге қатысты системада әсер ететін консерватив күштер жұмыс істейді, оның шамасы денелердің бір-біріне қатысты тек бастапқы және соңғы орындарына ғана тәуелді болады. Демек, денелердің әрқайсысының өз ара орналасуына (әрбір конфигурациясына) потенциялық энергия  $U$ -дың белгілі бір мәнін және бір конфигурациядан екіншісіне өткендегі консерватив күштердің жұмысын, оны осы конфигурацияларға сәйкес  $U$  мәнінің айырмасы ретінде есептеп, жазуға болады:



$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (27.17)$$

Системадағы денеге, ішкі консерватив күштерден басқа сыртқы күштер де әсер етсін делік. Системаның  $i$ -ші денесіне түсірілген барлық күштердің істейтін жұмысын ішкі күштердің істеген  $(A_{12})_i$  жұмысы мен берілген денеге әсер ететін сыртқы күштердің істеген  $A'_i$  жұмысының қосындысы ретінде көрсетуге болады. Біз білетіндей, толық жұмыс дененің кинетикалық энергиясының өсімшесіне беріледі [(27.8)-ді қараңыз]. Демек,

$$(A_{12})_i + A'_i = (T_2)_i - (T_1)_i. \quad (27.18)$$

(27.18) өрнекті системаның барлық денелері бойынша қосып, мынаны аламыз:

$$\sum (A_{12})_i + \sum A'_i = \sum (T_2)_i - \sum (T_1)_i. \quad (27.19)$$

(27.19) өрнектегі қосындының біріншісі системаның бастапқы (бірінші) конфигурациядан соңғысына (екіншісіне) өткен кезде консерватив күштердің денеге қатысты істеген жұмысын береді. (27.17) бойынша бұл жұмыс процестің басындағы және соңындағы системаның потенциялық энергиясының мәндерінің айырмасы ретінде берілуі мүмкін:

$$\Sigma(A_{12})_i = U_1 - U_2.$$

(27.19) өрнектің сол бөлігіндегі екінші қосынды системаның денелерге қатысты сыртқы күштердің істеген толық жұмысын береді. Оны  $A'$  деп белгілейміз.

(27.19) -дың оң бөлігінің  $T_2 - T_1$  шамасына, яғни бастапқы және соңғы күйлердегі системаның толық кинетикалық энергиясы мәндерінің айырмасына тең болатыны айқын.

Сөйтіп, (27.19) формуланы төмендегідей жазуға болады:

$$U_1 - U_2 + A' = T_2 - T_1.$$

Сәйкес мүшелерін топтай отырып, мынаны аламыз:

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A'$$

Ақырында, системаның толық энергиясының  $E = T + U$  белгісін енгізе отырып, біз мына қатысты аламыз:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A' \quad (27.20)$$

Сонымен, араларында консерватив күштер әсер ететін денелер системасының толық энергиясының өсімішесі система денелеріне түсірілген сыртқы күштердің жұмысына тең болады.

Егер система тұйық, яғни сыртқы күштер болмаса, онда (27.20) -ға сәйкес  $\Delta E = 0$  болады, осыдан

$$E = \text{const.} \quad (27.21)$$

(27.20) және (27.21) формулаларында механиканың негізгі заңдарының бірі — энергияның сақталу заңының мәні көрсетілген. Механикада бұл заң былай тұжырымдалады: *араларында тек консерватив күштер әсер ететін денелердің тұйық системасының толық механикалық энергиясы тұрақты болып қалады.*

Егер тұйық системада, консерватив күштерден басқа, консерватив емес күштер де, мысалы, үйкеліс күштері әсер ететін болса, онда системаның толық механикалық энергиясы сақталмайды. Консерватив емес күштерді сыртқы күштер ретінде қарастыра отырып, былан жазуға болады:

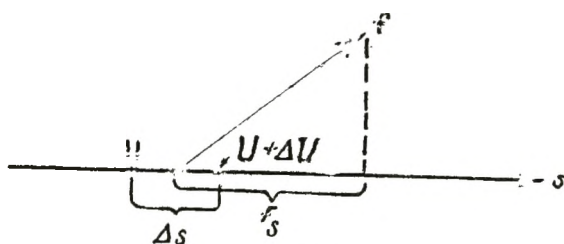
$$E_2 - E_1 = A_{\text{к.б.}}$$

мұндағы  $A_{\text{к.б}}$  — консерватив емес күштердің жұмысы. Үйкеліс күштері, әдеттегідей, теріс таңбалы жұмыс

орындайды (88-беттегі сілтемені қараңыз). Сондықтан егер тұйық системада үйкеліс күші болса, уақыттың өтуімен оның толық механикалық энергиясы азаяды. Ал үйкеліс күштерінің әсері механикалық энергияны, энергияның басқа түріне, механикалық емес түріне айналдырады. Бұл жағдайда кез келген сыртқы әсерлерден изоляцияланған системада энергияның (механикалық емес энергияны қосқанда) барлық түрлерінің қосындысы тұрақты болып қалады — сақталудың анағұрлым жалпы заңы орындалады.

## § 28. Потенциялық энергия мен күш арасындағы байланыс

Потенциалдық өрістің әрбір нүктесінде, бір жағынан, денеге әсер ететін  $\mathbf{f}$  күші векторының қандай да бір мәні, екінші жағынан, дененің  $U$  потенциалдық энергиясының қандай да бір мәні сәйкес келеді. Демек, күш пен потенциалдық энергияның арасында белгілі бір байланыс болуға тиіс. Бұл байланысты орнату үшін кеңістікте қалауымызша таңдап алынған бағыт бойымен, оны  $s$  әрпімен



66-сурет.

белгілейміз, болатын дене мейлінше аз  $\Delta s$  орын ауыстырған кезде өріс күштерінің істеген элементар  $\Delta A$  жұмысын есептейміз (66-сурет). Бұл жұмыс

$$\Delta A = f_s \Delta s \quad (28.1)$$

шамасына тең. Мұндағы  $f_s$  —  $\mathbf{f}$  күшінің  $s$  бағытындағы проекциясы.

Берілген жағдайда жұмыс потенциалдық энергияның қоры есебінен істелетіндіктен, ол  $s$  осінің  $\Delta s$  кесіндісіндегі потенциалдық энергияның  $\Delta U$  кемуіне тең:

$$\Delta A = -\Delta U \quad (28.2)$$

(28.1) мен (28.2)-ні салыстыра отырып, мынаны аламыз:

$$f_s \Delta s = -\Delta U.$$

бұдан

$$f_s = - \frac{\Delta U}{\Delta s}. \quad (28.3)$$

(28.3) өрнегі  $f_s$ -тің  $\Delta s$  кесіндідегі орташа мәнін береді.  $f_s$ -тің берілген нүктедегі мәнін алу үшін шекке көшу керек:

$$f_s = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta s}. \quad (28.4)$$

$U$  шамасы  $s$  осінің бойымен орын ауыстырған кезде ғана емес, басқа бағытпен орын ауыстырған кезде де өзгере алатындықтан, (28.4) формулалардағы шек  $U$ -дың  $s$  бойынша алынған дербес туындысын көрсетеді:

$$f_s = - \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (28.5)$$

(28.5) қатыс кеңістіктегі кез келген бағыт үшін, атап айтқанда, декарт координаталарының  $x$ ,  $y$ ,  $z$  осьтері үшін орынды:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= - \frac{\partial U}{\partial x}, \\ f_y &= - \frac{\partial U}{\partial y}, \\ f_z &= - \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

(28.6) формулалар координаталар осіндегі күш векторының проекциясын анықтайды. Егер осы проекциялар белгілі болса, күш векторының өзі де анықталар еді. (2.8) -мен сәйкес

$$\mathbf{f} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (28.7)$$

Математикадағы вектор

$$\frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k},$$

мұндағы  $a$  —  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -тің скаляр функциясы, оны осы скалярдың градиенті деп атайды және  $\text{grad } a$  символымен белгілейді. Демек, күш кері таңбамен алынған потенциалдық энергияның градиентіне тең:

$$\mathbf{f} = - \text{grad } U. \quad (28.8)$$

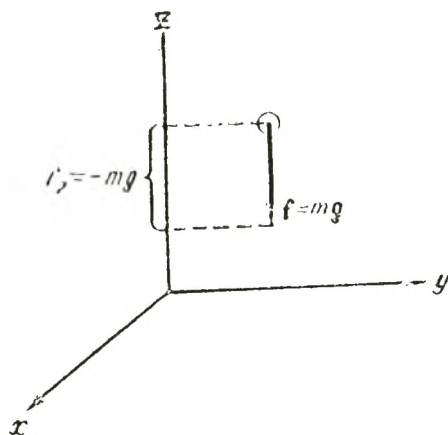
Мысалы. Мысал ретінде ауырлық күш өрісін алайық.  $z$  осін вертикаль бойымен жоғары қарай бағыттаймыз (67-сурет). Координаталар осін осылай таңдап алған кезде потенциялық энергия мына түрде болады [(27.12)-ні қараңыз].

$$U = mgz + \text{const.}$$

Күштің осьтегі проекциялары (28.6)-ға сәйкес мынаған тең болады:

$$f_x = 0, \quad -f_y = 0, \quad f_z = -mg,$$

бұдан күштің  $mg$ -ге тең болып  $z$  бағытына қарама-қарсы жаққа қарай бағытталады, яғни вертикаль бойынша төмен қарай бағытталады шығады.



67-сурет.

## § 29. Механикалық системаның тепе-теңдік шарты

Тұйық системада толық энергия тұрақты болып қалады. Сондықтан кинетикалық энергия потенциялық энергияның азаю есебінен ғана арта алады. Егер система, барлық денелердің жылдамдығы нольге тең болатын, осындай күйде болса, ал потенциялық энергияның мәні минимал болса, онда сыртқы әсер болмайынша системадағы дене қозғалысқа келе алмайды, яғни система тепе-тең күйде болады.

Сөйтіп, тепе-тең күйдегі тұйық система үшін системаның минимум потенциялық энергиясына сәйкес келетін денелер конфигурациялары ғана жатады.

Система денелерінің өз ара орналасуы тек бір ғана шамамен, мысалы  $x$  координатамен анықтала алатын жағдайды қарастыралық. Мысал ретінде Жер — шарша, қозғалтпай бекітілген имек сыммен үйкеліссіз сырғанайтын, системасын алуға болады (68, а-сурет). Екінші мысалға горизонталь бағытпен сырғанайтын пружинаның ұшына бекітілген шаршаны алуға болады (69, а-сурет).  $U(x)$  функциясының графиктері 68, б- және 69, б-суреттерде көрсетілген.  $U$ -дың минимумына  $x$ -тің  $x_0$ -ге тең мәні сәйкес келеді (69-суретте  $x_0$  деформацияланбаған

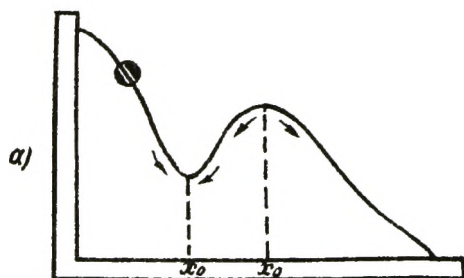
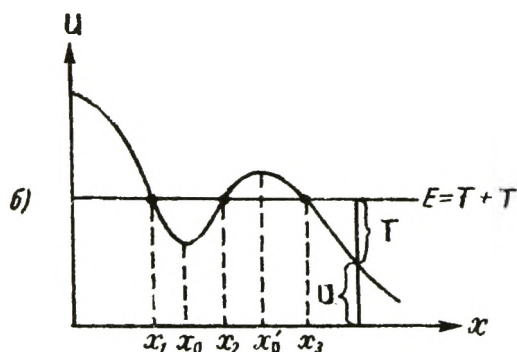
пружинаның ұзындығы).  $U$ -дың минимумының шарты мына түрде болады:

$$\frac{dU}{dx} = 0. \quad (29.1)$$

$$f_x = 0 \quad (29.2)$$

болғандықтан, (28.6)-ға сәйкес (29.1) шарты тең мәндес ( $U$ —бір ғана айнымалы  $x$ -тің функциясы болғанда:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx}.$$



68-сурет.

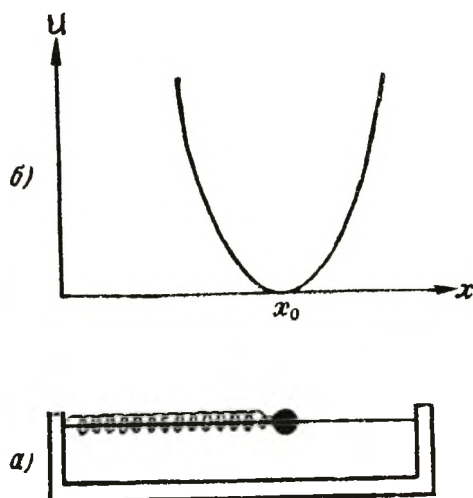
Сонымен потенциялық энергияның минимумына сәйкес келетін система конфигурациясы системадағы денелерге әсер ететін күштердің нольге тең болатын қасиетіне ие. Бұл нәтиже  $U$ -дың бірнеше айнымалының функциясы болатын жалпы жағдайда да дұрыс.

68-суретте көрсетілген жағдайда (29.1) және (29.2) шарттар  $x'_0$ -ге тең  $x$  үшін де (яғни  $U$ -дың максимумы үшін де) орындалады.  $x$ -тің осы мәнімен анықталатын шаршаның орны да тепе-тең күйде болады. Алайда бұл тепе-теңдіктің  $x = x_0$  болатындығы тепе-теңдіктен айырмашылығы мұнда тепе-теңдік орнықсыз болады: шаршаны осы қалыптан сәл ғана шығарса-ақ болды, шаршаны  $x_0$  қалпынан шығарып жіберетін күш пайда болады. Шаршаны орнықты ( $x = x_0$  үшін) тепе-теңдік қалпынан ығыстырған кезде пайда болған күштер шаршаны тепе-теңдік қалыпқа қайта келтіруге тырысатындай бағытпен бағытталған.

Системаның потенциялық энергиясы өрнектелетін функцияның түрін біле отырып, система қозғалысының сипаты туралы бір қатар қорытынды жасауға болады. Мұны 68, б-суретте көрсетілген графикті пайдалана отырып түсіндірелік. Егер системаның толық энергиясы

графикте жүргізілген горизонталь сызыққа сәйкес мәнде болса, онда система не  $x_1$ -ден  $x_2$ -ге дейінгі, не  $x_3$ -тен шексіздікке дейінгі шектегі қозғалысты орындай алады. Потенциалдық энергия толық энергиядан артық бола алмайтындықтан (осылай болған жағдайда кинетикалық энергия теріс таңбалы болар еді),  $x < x_1$  және  $x_2 < x < x_3$  облысына система ене алмайды. Сөйтіп,  $x_2 < x < x_3$  облысы потенциалдық тосқауыл болып табылады, ол арқылы система толық энергиясының қоры бола тұрып өте алмайды.

68, б-сурет  $U$  графигі арқылы системаның берілген  $x$  мәніндегі кинетикалық энергиясын қалай анықтауға болатындығын түсіндіреді.



69-сурет.

### § 30. Шарлардың центрлік соқтығуы

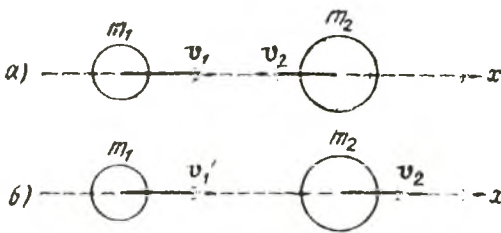
Денелер бір-біріне соқтығысқан кезде олар деформацияға ұшырайды. Бұл кезде дененің соқтығысу алдында не болған кинетикалық энергиясы жартылай немесе толығынан дененің ішкі энергиясы деп аталатын серпімді деформацияның потенциалдық энергиясына өтеді. Денелердің ішкі энергияларының артуы олардың температураларының жоғарылауымен қоса жүреді.

Соқтығудың абсолют серпімді және абсолют серпімсіз делінетін екі шекті түрі болады. Абсолют серпімді соқтығу деп денелердің механикалық энергиясы энергияның механикалық емес басқа түрлеріне өтпеген соқтығуды айтады. Мұндай соқтығу кезінде кинетикалық энергия толығынан немесе жартылай серпімді деформацияның потенциалдық энергиясына өтеді. Осыдан кейін денелер бірін-бірі тебеді де бастапқы формасына қайта оралады. Нәтижесінде серпімді деформацияның потенциалдық энергиясы қайтадан кинетикалық энергияға өтеді де, дене шамасы мен бағыты толық энергияның сақ-



талуы және денелер системасының толық импульсының сақталуы сияқты, екі шартпен анықталатын жылдамдықпен ұшып кетеді.

Соқтығысқан кезде деформацияның потенциялық энергиясы пайда болмаса, денелердің кинетикалық энергиясы толығынан немесе жартылай ішкі энергияға айналса, соқтығысқаннан кейін соқтығысқан денелер не бірдей жылдамдықпен қозғалатын болса, не тыныштықта болса, соқтығу абсолют серпімсіз соқтығу болады. Абсолют серпімсіз соқтығу кезінде импульстың сақталу заңы ғана орындалып, ал механикалық энергияның сақталу заңы сақталмайды — механикалық және ішкі энергиясы сияқты энергияның әр түрлі түрлерінің сақталу заңының қосындысы орын алады.



70-сурет.

Біз екі шардың центрлік соқтығуымен шектеле туралық. Егер шар соқтығысқанға дейін олардың центрлері арқылы өтетін түзудің бойымен қозғалатын болса, соқтығу центрлік деп аталады. Центрлік соқтығу кезінде, соқтығысулар:

1) шарлар бір-біріне қарама-қарсы қозғалғанда (70, а-сурет) және 2) шарлардың біреуі екіншісін қуып жеткен (70, б-сурет) жағдайда болуы мүмкін.

Шарлар тұйық система жасайды немесе шарларға түсірілген сыртқы күштер бірін-бірі теңгереді деп жорық.

Алдымен абсолют серпімсіз соқтығуды қарастырамыз. Шарлардың массалары  $m_1$  және  $m_2$ , ал соқтығысқанға дейінгі жылдамдықтары  $v_{10}$  және  $v_{20}$  болсын делік. Сақталу заңы бойынша шарлардың соқтығысқанынан кейінгі қосынды импульсы соқтығысқанға дейінгідей болуға тиіс:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2) v \quad (30.1)$$

( $v$  — соқтығысқаннан кейінгі шардың екеуі үшін де бірдей жылдамдық).

(30.1)-ден

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (30.2)$$

екендігі шығады.

$v_{10}$  және  $v_{20}$  векторлары бір түзудің бойымен бағытталады,  $v$  векторының бағыты да осы түзумен бағыттас болады.

70-суретте көрсетілген б) жағдайда ол  $v_{10}$  және  $v_{20}$  векторлары қалай бағытталады, солай бағытталады. а) жағдайында  $v$  векторы  $v_{10}$  векторларының қайсысында  $m_1 v_{10}$  көбейтіндісі көп болса, соның бағытымен бағытталады.

$v$  векторының модулы төмендегідей формуламен есептелуі мүмкін:

$$v = \left| \frac{m_1 v_{20} \pm m_2 v_{10}}{m_1 + m_2} \right| \quad (30.3)$$

мұндағы  $v_{10}$  және  $v_{20}$  —  $v_{10}$  және  $v_{20}$  векторларының модульдары; «—» таңбасы а) жағдайына, ал «+» таңбасы б) жағдайына сәйкес келеді.

Енді абсолют серпімді соқтығуды қарастыралық. Мұндай соқтығуда сақталудың екі заңы: импульстың сақталу заңы және механикалық энергияның сақталу заңы орындалады.

Шар массаларын  $m_1$  және  $m_2$  шарлардың соқтығысқанға дейінгі жылдамдықтарын  $v_{10}$  және  $v_{20}$ , ал ақырында соқтығысқаннан кейінгі жылдамдықтарын  $v_1$  және  $v_2$  деп белгілейік. Импульс пен энергияның сақталу теңдеуін жазалық:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (30.4)$$

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (30.5)$$

(30.4) -ті төмендегідей түрлендірейік:

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}). \quad (30.6)$$

$(A^2 - B^2) = (A - B)(A + B)$  -ны ескере отырып, (30.5) -ті мына түрге келтіреміз:

$$m_1 (v_{10} - v_1) (v_{10} + v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}) (v_2 + v_{20}). \quad (30.7)$$

Симметрия туралы пайдалануымыздан соқтығысқаннан кейін шарлардың жылдамдықтары соқтығысқанға дейінгі шар центрлері қозғалған түзудің бойымен бағытталады деп тұжырымдауымызға болады. Демек, (30.6) және (30.7) теңдеулердегі барлық векторлар коллинеарлы болады. Мұның өзі (30.6) мен (30.7) -ні салыстырудан

<sup>1</sup> (24.7) -ні қараңыз.

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20}. \quad (30.8)$$

деп қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

(30.8)-ді  $m_2$ -ге көбейтіп, шыққан нәтижені (30.6)-дан айырып, сонан кейін (30.8)-ді  $m_1$ -ге көбейтіп, шыққан нәтижені (30.6)-мен қосып, шарлардың соқтығысқаннан кейінгі жылдамдықтарының векторларын аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{2m_2\mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{2m_1\mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (30.9)$$

Сандық есептеулер үшін (30.9)-ды  $\mathbf{v}_{10}$  векторының бағытында проекциялаймыз:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\mp 2m_2v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}, \\ v_2 &= \frac{2m_1v_{10} \mp (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Бұл формулаларда  $v_{10}$  және  $v_{20}$  модульдар, ал  $v_1$  және  $v_2$  сәйкес векторлардың проекциялары жоғарғы «—» таңбасы шарлардың бір-біріне қарама-қарсы қозғалғандағы жағдайға, ал төменгі «+» таңбасы бірінші шар екінші шарды қуып жеткен жағдайға сәйкес келеді.

Абсолют серпімді соқтығысқаннан кейін шарлардың жылдамдықтарының бірдей болмайтындығын ескерте кетелік. Шынында да (30.9)-дегі  $v_1$  мен  $v_2$ -нің өрнектерін бір-біріне теңестіре отырып, түрлендіру жүргізсек, мынаны аламыз:

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Демек, соқтығысқаннан кейін шарлардың жылдамдықтары бірдей болуы үшін, олар соқтығысқанға дейін де бірдей болуы қажет, бірақ бұл жағдайда соқтығысу болмайды. Осыдан соқтығысқаннан кейін шарлардың жылдамдықтарының теңдік шартының энергияның сақталу заңымен үйлеспейтіні шығады. Сонымен, серпімсіз соқтығу кезінде механикалық энергия сақталмайды — ол жартылай соқтығысқан денелердің ішкі энергиясына өтеді де, оларды қыздырады.

Соқтығысатын шарлардың массалары  $m_1 = m_2$  болған жағдайды қарастыралық. (30.9)-дан бұл шар бойынша

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{10},$$

яғни соқтығысқан кезде шарлар жылдамдықтарымен алмасады. Атап айтқанда, массалары бірдей шарлардың біреуі, мысалы, екіншісі соқтығысқанға дейін тыныштықта тұрса, онда соқтығысқаннан кейін оның жылдамдығы бірінші шардың бастапқы жылдамдығы қандай болса, сондай болады; ал бірінші шар соқтығысқаннан кейін қозғалмайды екен.

(30.9) формуланың жәрдемімен қозғалмайтын немесе қозғалыстағы қабырғаға ( $m_2$  массасы шектеусіз үлкен және шектеусіз радиусты шар ретінде қарастыруға болатын) шардың серпімді соқтығысуынан кейінгі жылдамдығын анықтауға болады. (30.9) өрнектің алымы мен бөлімін  $m_2$ -ге бөліп,  $m_1/m_2$  көбейткіші бар мүшелерін ескермесек, мынаны аламыз:

$$v_1 = 2v_{20} - v_{10},$$

$$v_2 = v_{20}.$$

Алынған нәтижелерден қабырға жылдамдығының өзгермей қалғаны байқалады. Ал шардың жылдамдығы, егер қабырға қозғалмас болса ( $v_{20}=0$ ), бағытын қарама-қарсы жаққа қарай өзгертеді; қозғалыстағы қабырға жағдайында шар жылдамдығының шамасы да өзгереді (егер қабырға шарға қарсы қозғалса,  $2v_{20}$ -ге артады, егер қабырға оны қуып жеткен шардан «алыстап кетсе»,  $2v_{20}$ -ге кемиді).

## IV ТАРАУ ИНЕРЦИЯЛЫҚ ЕМЕС САНАҚ СИСТЕМАСЫ

### § 31. Инерция күші

Жоғарыда атап өтілгендей (13-параграфты қараңдар), Ньютон заңдары тек инерциялық системада ғана орындалады. Берілген дене барлық инерциялық системаға қатысты бірдей  $w$  үдеуіне ие болады. Кез келген инерциялық емес санақ системасы инерциялық санақ системасына қатысты біршама үдеумен қозғалатын болғандықтан, дененің инерциялық емес системасындағы  $w'$  үдеуі  $w$  үдеуінен өзгеше болады. Дененің инерциялық және инерциялық емес системасындағы үдеулерінің айырымын  $a$  символымен белгілейік:

$$w - w' = a. \quad (31.1)$$

Егер инерциялық емес система инерциялық системаға қатысты ілгерілемелі қозғалыс жасаса, онда  $a$  инерциялық емес санақ системасының үдеуіне дәл келеді. Айналымалы қозғалыс кезінде инерциялық емес системаның әр түрлі нүктелерінің үдеуі бірдей болмайды. Бұл жағдайда  $a$ -ны инерциялық емес системаның инерциялық системаға қатысты қозғалысының үдеуі ретінде түсіндіруге болмайды.

Берілген денеге басқа денелердің әсер етуінен пайда болған барлық қорытқы күштер  $\vec{f}$ -ке тең болсын. Сонда Ньютонның екінші заңына сәйкес

$$w = \frac{1}{m} \vec{f}.$$

Инерциялық емес санақ системасына қатысты үдеуді

(31.1) формуласына сәйкес мынадай түрде көрсетуге болады:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{f} - \mathbf{a}.$$

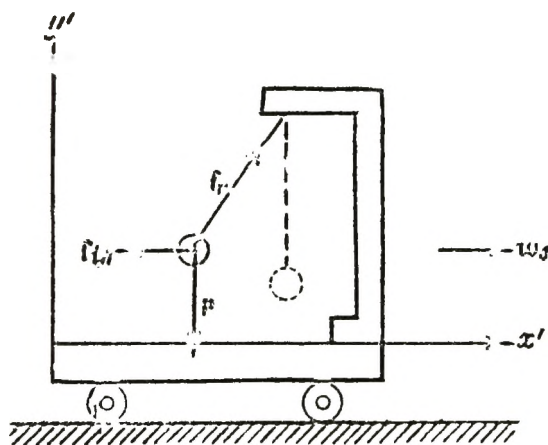
Сонымен, егер денеге түскен барлық қорытқы күш нольге тең болса да, дене инерциялық емес санақ системасына қатысты —  $\mathbf{a}$  үдеуімен, яғни осы денеге —  $m\mathbf{a}$ -ға тең күш әсер еткендей қозғалады.

Демек, қозғалысты инерциялық емес санақ системаларында сипаттап баяндағанда тек инерциялық системаларда орындалатын динамика теңдеулерін пайдалануға болады, яғни бұл теңдеулерде денелердің бір-біріне әсер етуінен пайда болған күштермен қатар инерция күші деп аталатын күш те ескеріледі, ал инерция күші дененің массасы мен оның инерциялық және инерциялық емес санақ системаларына қатысты кері таңбамен алынған үдеулері айырманың көбейтіндісіне тең деуге болады:

$$\mathbf{f}_{in} = -m(\mathbf{w} - \mathbf{w}') = -m\mathbf{a}. \quad (31.2)$$

Сонда Ньютонның екінші заңының теңдеуі инерциялық емес санақ системасында мынадай түрде жазылады:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{in}. \quad (31.3)$$



71-сурет.

Жоғарыда айтылғандарды мынадай мысалмен түсіндірейік. Арбаға бекітілген кронштейнге жүк байлаған жіп ілінген (71-сурет). Арба тыныш тұрса немесе үдеусіз қозғалса, жіп тік орналасады да,  $P$  ауырлық күші жіп-

тің  $f_r$  реакциясымен теңгеріледі. Енді арбаны үдеуі  $w_0$  болатын ілгерілемелі қозғалысқа келтірейік. Сонда жіп, тік қалыптан  $P$  және  $f_r$  қорытқы күштері дененің  $w_0$ -ге тең үдеуін қамтамасыз ететіндей, бұрышқа бұрылады. Арбамен байланысты санақ системасына қатысты дене  $P$  және  $f_r$  қорытқы күштерінің нольден өзгеше екендігіне қарамастан тыныш қалыпта тұрады. Бұл санақ системасына қатысты дене үдеуінің болмауын, осы денеге  $P$  және  $f_r$  күштерінен басқа

$$f_{in} = -mw_0 \quad (31.4)$$

инерция күшінің әсерімен де түсіндіруге болады.

Инерция күшін енгізу дененің қозғалысын кез келген (инерциялық, сондай-ақ инерциялық емес) санақ системасында бірдей қозғалыс теңдеулері арқылы сипаттап баяндауға мүмкіндік береді.

Инерция күшін серпімділік, гравитациялық және үйкеліс күштері сияқты күштермен, яғни бір денеге басқа денелердің әсер етуінен пайда болған күштермен қатар қоюға болмайтындығын анық түсінген жөн. Инерция күші механикалық құбылыстар қарастырылатын санақ системаларының қасиеттеріне байланысты пайда болған. Осы мағынада инерция күшін фиктив күш деп атауға болады.

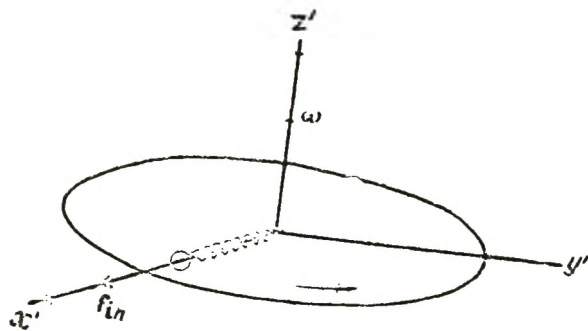
Инерция күшін қарастыруды енгізу негізінде қажет. Шындығында, қандай да болмасын қозғалысты әрқашанда инерциялық санақ системасына қатысты қарастыруға болады. Алайда іс жүзінде дененің инерциялық емес санақ системасымен, мысалы, жер бетімен салыстырғандағы қозғалысының өзіне көңіл қоюға тура келеді. Инерция күшін пайдалану осындай системаға тікелей қатысы бар мәселені шешуге мүмкіндік береді, мұның өзі көбінесе қозғалысты инерциялық системада қарастырғаннан гөрі едәуір оңайырақ болады.

## § 32. Центрден тепкіш инерция күші

$\omega$  бұрыштық жылдамдықпен  $z'$  осіне перпендикуляр айналатын дискіні қарастырайық (72-сурет). Дискімен қоса шабаққа кигізіліп, дискінің центріне пружинамен бекітілген кішкентай шар да айналады. Диск айналған кезде шабаққа бекітілген шар, пружинаның керілу күші шар массасы мен центрге тартқыш  $\omega^2 R$  ( $R$  — шардың

диск центрінен қашықтығы) үдеуінің көбейтіндісіне тең болатындай қалыпта болады.

Дискімен байланысты санақ системасына қатысты



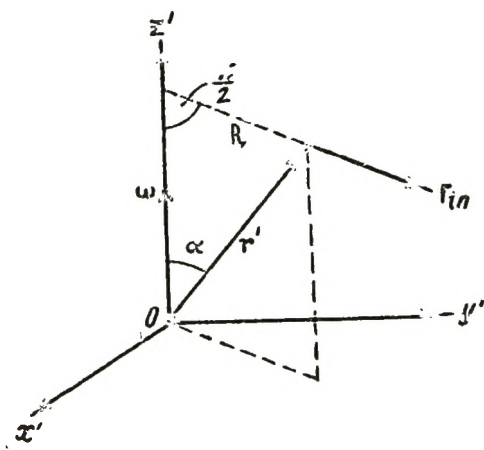
72-сурет.

шар тыныш тұрады, өйткені пружина жақтан әсер ететін күштен басқа, шарға инерция күші жұмсалған:

$$f_{in} = m\omega^2 R, \quad (32.1)$$

инерция күші диск центрінен радиус бойымен бағытталған. Айналып тұрған (инерциялық системаға қатысты) санақ системасында пайда болатын (32.1) инерция күшін центрден тепкіш инерция күші деп атайды.

Айналып тұрған санақ системасындағы әр түрлі нүктелер инерциялық системамен салыстырғанда шамасы мен бағыт бойынша түрліше үдеуге ие болады. Осыған сәйкес центрден тепкіш инерция күші айналып тұрған санақ системасындағы дененің қалпына байланысты болады.



73-сурет.

Центрден тепкіш инерция күші айналып тұрған санақ системасындағы денеге, осы системада дене тыныш тұрма (біздің осыған дейінгі ұйғаруымыз бойынша), жоқ әлде, оған қатысты  $v'$  жылдамдығымен қозғалып келе жатырма, соған қарамастан әсер етеді.



Дененің жер бетімен салыстырғандағы қозғалысы туралы есепті дәл шешкенде  $m\omega^2 R \cos \varphi$ -ге тең центрден тепкіш инерция күшін ескеру керек, мұндағы  $m$  — дене массасы,  $\omega_{Ж}$  — Жердің өз осінен айналғандағы бұрыштық жылдамдығы,  $R_{Ж}$  — жер шарының радиусы,  $\varphi$  — белгілі бір жердің ендігі (185-беттегі 131-суретті қараңыз)

Ж а т т ы ғ у Центрден тепкіш инерция күшін

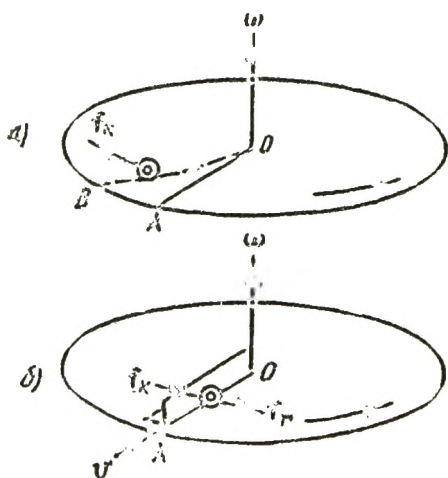
$$m[\omega[r', \omega]] = m\omega^2 R \quad (32.2)$$

түрінде көрсетуге болатындығын дәлелдендер, мұндағы  $m$  — дене массасы,  $\omega$  — айналып тұрған санақ системасының бұрыштық жылдамдығы,  $r'$  — айналу осі нүктелерінің біреуімен дәл келетін, айналып тұрған санақ системасының бастамасымен салыстырғанда дененің радиус-векторы,  $R - r'$  құраушысының айналу осіне жүргізілген перпендикуляр (73-сурет).

### § 33. Кориолис күші

Айналып тұрған санақ системасына қатысты дененің қозғалысы кезінде центрден тепкіш инерция күшінен басқа, Кориолис күші немесе инерциялық

Кориолис күші деп аталған тағы бір күш пайда болады.

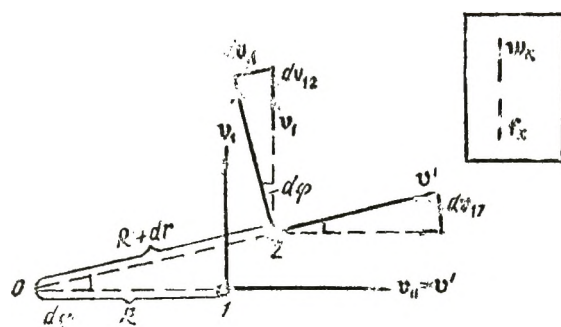


74-сурет.

Кориолис күшінің пайда болатындығын мына мысалдан айқындауға болады. Вертикаль осьтен айнала алатын горизонталь орналасқан диск алайық. Дискіге  $OA$  радиаль түзуін сызайық (74, а-сурет).  $O$ -дан  $A$  бағытқа қарай  $v'$  жылдамдығымен шар жіберейік. Егер диск айналмай тұрса, онда шар біздің сыз-

ған түзуіміздің бойымен домалайтын болады. Егер дискіні стрелкамен көрсетілген бағытта айналысқа келтірсек, онда шар пункттермен кескінделген  $OB$  түзуінің бойымен домалайды, сонымен бірге оның дискімен са-

лыстырғандағы  $v'$  жылдамдығы өзінің бағытын өзгертеді. Демек, айналып тұрған санақ системасына қатысты шар өзіне  $v'$  жылдамдығына перпендикуляр  $f_k$  күші әсер еткендегідей жағдайда болады.



75-сурет.

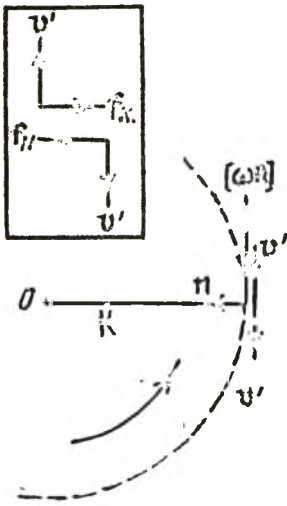
Шарды айналып тұрған дискінің үстінде радиаль түзу бойымен домалатуға мәжбүр ету үшін, мысалы,  $OA$  қыры түрінде бағыттаушы жасау керек (74, б-сурет). Шар тербелген кезде бағыттаушы қыр оған біршама  $f_r$  күшімен әсер етеді. Айналып тұрған системаға (дискіге) қатысты шар бағыты бойынша тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Мұны  $f_r$  күшінің шарға түсірілген әрі  $v'$  жылдамдығына перпендикуляр болатын  $f_k$  инерция күшімен теңгерілетіндігімен түсіндіруге болады.  $f_k$  күші — инерциялық Кориолис күші. Оны дербес жағдайларды қарастыра отырып, (31.2) формуласы бойынша табайық.

1 жағдай. Дене радиаль бағытта айналу осіне перпендикуляр болатын тұрақты  $v$  жылдамдығымен қозғалады (75-сурет; айналу осі сурет жазықтығына перпендикуляр).  $v'$  тұрақты болғандықтан,  $w'$  үдеуі нольге тең, инерция күші —  $mw$ -ге тең. Айталық дене  $t$  уақытының қайсыбір мезетінде  $l$  қалпында болсын. Осы мезетте  $v$  жылдамдығы қозғалмайтын системамен салыстырғанда екі құраушыдан: радиус бойымен бағыттталып, дененің  $v'$  жылдамдығына тең болатын  $v_{||}$  құраушыдан және радиусқа перпендикуляр, модулы бойынша  $\omega R$ -ге тең (мұндағы  $R$  — дененің айналу осінен қашықтығы,  $\omega$  — айналып тұрған санақ системасының бұрыштық жылдамдығы) болатын  $v_{\perp}$  құраушыдан құралады.

$dt$  уақыты ішінде өн бойымен дене қозғалатын түзу  $d\varphi = \omega dt$  бұрышына бұрылады, ал сонда дене осы түзу

бойымен  $dR = v' dt$  кесіндісіне жылжиды да, 2 қалпында болады. Осының нәтижесінде  $v$  жылдамдығының екі құраушысы да өздеріне перпендикуляр өсімшелер ( $dv_{\perp 1} = v' d\varphi$  және  $dv_{\parallel} = \omega R d\varphi$ ) алып,  $d\varphi$  бұрышына бұрылады. Мұнымен қатар  $v_{\perp}$  құраушысының модулы  $dv_{\perp 2} = \omega dR = \omega v' dt$  шамасына артады. Мұның бұлай болған себебі, 2 қалпында  $\omega$  бойымен дене қозғалатын радиусқа перпендикуляр болатын  $v$  құраушысы  $\omega(R + dR)$  шамасына тең болады.

Сонымен,  $v$  жылдамдығының  $dt$  уақыты ішінде алатын  $dv$  өсімшесін үш өсімшенің векторлық қосындысы ретінде көрсетуге болады (75-суретті қараңыз):  $dv_{\perp}$ ,  $dv_{12}$  және  $dv_{\parallel}$ , бұлардың алғашқы екеуі  $v'$  векторына перпендикуляр, ал үшіншісі  $v'$ -нің бағытын көрсететін түзудің бойымен бағытталған ( $d\varphi$ -дің өте аз шама екендігі есте болу керек)



76-сурет.

$dv$ -нің тиісті құраушыларын  $dt$ -ге бөліп, біз  $w$  үдеуінің қозғалмайтын системаға қатысты құраушыларын шығарып аламыз.  $w_{\parallel}$  құраушысы модулы бойынша мынаған тең:

$$w_{\parallel} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \omega R \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 R.$$

Бұл құраушы  $v'$ -қа тәуелді емес; ол  $v' = 0$  болған кезде де бола береді. Осы құраушының  $m$ -ге көбейтіндісі бізге бұрыннан белгілі центрден тепкіш инерция күшін береді.

$dv_{\perp 1}$  және  $dv_{\perp 2}$  қосындысына тең  $dv_{\perp}$  құраушысы  $dt$ -ге бөлгеннен кейін  $w_{\perp}$  үдеуінің  $w_{\perp}$  құраушысын береді, оның модулы мынаған тең:

$$w_{\perp} = \frac{dv_{\perp 1}}{dt} + \frac{dv_{\perp 2}}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dR}{dt} = v' \omega + \omega v' = 2\omega v'$$

$w_{\perp}$  векторы (келешекте біз оны  $w_K$  деп белгілейміз)  $v'$  мен  $\omega$ -ға перпендикуляр болады да, мынадай түрде жазылады:

$$w_K = 2[\omega v'] \quad (33.1)$$

( $\omega$  векторы 75-суретте чертеж жазықтығына перпендикуляр және бізге қарай бағытталған) (33.1) үдеуі  $K$  о

риолис үдеуі деп аталады. Оны  $m$ -ге көбейтіп әрі кері таңбаға өзгертіп, инерциялық Кориолис күшін табамыз:

$$\mathbf{f}_K = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]. \quad (33.2)$$

2 жағдай. Айналып тұрған санақ системасымен салыстырғанда дене айналу осіне перпендикуляр жазықтықта жатқан шеңбер бойымен қозғалады, сонымен қатар шеңбердің центрі де осы осьте жатады (76-сурет). Айналып тұрған системасына қатысты дене центрге тартқыш үдеуге ие болады, ол мынаған тең:

$$\mathbf{w}' = \frac{v'^2}{R} \mathbf{n}, \quad (33.3)$$

мұндағы  $\mathbf{n}$  —  $\mathbf{v}$ -ға перпендикуляр болатын әрі центрінс бағытталған бірлік вектор.

Қозғалмайтын санақ системасына қатысты дененің жылдамдығы  $R$  радиусына перпендикуляр болатын  $v'$  және  $\omega R$  екі құраушыдан құралады: жылдамдығының бағытына және системаның айналу бағытына қарай бұл құраушылардың бағыты не бірдей, не қарама-қарсы болады.  $v$  жылдамдығының модулы мынаған тең:

$$v = |v' \pm \omega R|, \quad (33.4)$$

мұндағы «+»  $v'$  және  $\omega R$  жылдамдықтарының бірдей, ал «-» олардың қарама-қарсы бағыттарына сәйкес келеді.

Сондай-ақ, қозғалмайтын системаға қатысты дене шеңбер бойымен бір қалыпты қозғалатын болады, сондықтан  $\mathbf{w}$  үдеуді, мынадай түрде жазуға болады:

$$\mathbf{w} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} = \frac{(v' \pm \omega R)^2}{R} \mathbf{n} = \frac{v'^2}{R} \mathbf{n} + \omega^2 R \mathbf{n} \pm 2v' \omega \mathbf{n}.$$

Бірінші қосылғыш айналып тұрған системаға қатысты  $\omega'$  үдеуі болып табылады [(33.3) формуласын қараңыз]. Демек,

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \omega^2 R \mathbf{n} \pm 2v' \omega \mathbf{n}.$$

Осы өрнекке сәйкес инерция күші екі құраушыдан тұратын болып шығады:

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{a} = -m\omega^2 R \mathbf{n} \mp 2mv' \omega \mathbf{n}. \quad (33.5)$$

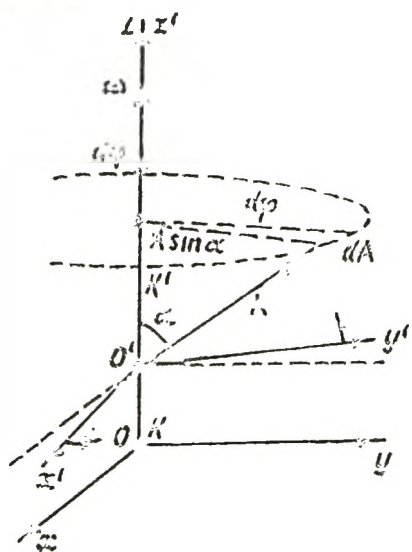
Осы күштердің біріншісі — центрден тепкіш инерция күші, екіншісі  $\mathbf{f}_K$  — Кориолис күші.

$\mathbf{f}_K$  күші  $\mathbf{v}'$  және  $\boldsymbol{\omega}$  векторларына перпендикуляр әрі мынадай бағыттары болады: а) егер  $v'$  және  $\omega R$  жыл-

дамдықтары бағыты бойынша дәл келсе [(33.5) формуласындағы жоғарғы таңба], центрден тысқа қарай және б) егер  $v'$  және  $\omega R$  жылдамдықтары қарама-қарсы жаққа бағытталса (төменгі таңба), центрге қарай бағытталады. Сірә, осы екі жағдайды мынадай өрнекпен біріктіруге болатын шығар:

$$f_K = 2m[v'\omega]. \quad (33.6)$$

Осыдан шыққан өрнек (33.2) формуласымен дәл келеді.



77-сурет.

Айналып тұрған санақ системасында қозғалатын дененің екі дербес жағдайын қарастыра келіп, енді дененің еркін қозғалатын жағдайына назар аударайық, әрі барлық жағдайда бірдей болу үшін инерциялы емес  $K'$  координаталар системасы қозғалмайтын (инерциялы)  $K$  системаға қатысты тек айналып қана қоймай, сонымен қатар ілгерілемелі қозғалыс жасайды деп ұйғарайық. Алайда ең алдымен бізге жалпы жағдайды қарастырғанда қажет болатын бір маңызды қатысты шығарып алайық.

Координаталардың қозғалмайтын және айналып тұрған системаларындағы вектор өсімшелерінің арасындағы қатыс. Бірі (оны  $K'$  деп белгілейік) екіншісіне ( $K$ ) қатысты  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен айналатын екі координаталар системасын алайық. Бұл системаларды  $z$  және  $z'$  осьтері айналу осімен, яғни  $\omega$  векторымен дәл келетіндей таңдап алайық (77-сурет)

Басы  $O$  нүктесіне —  $K'$  системасының басына — орналасатын кейбір  $A$  векторын қарастырайық.  $A$  векторы қалайда уақытқа байланысты өзгертін болсын. Вектордың  $dt$  уақыты ішінде  $K$  координата системасындағы байқалатын өсімшесін  $dA$  арқылы, ал осы уақыт ішінде  $K'$  системасында байқалатын өсімшені  $d'A$  арқылы белгілейік.  $dA$  және  $d'A$  өсімшелердің әр түрлі сцендігін байқау қиынға түспейді. Егер  $A$  векторы  $K'$  системасына

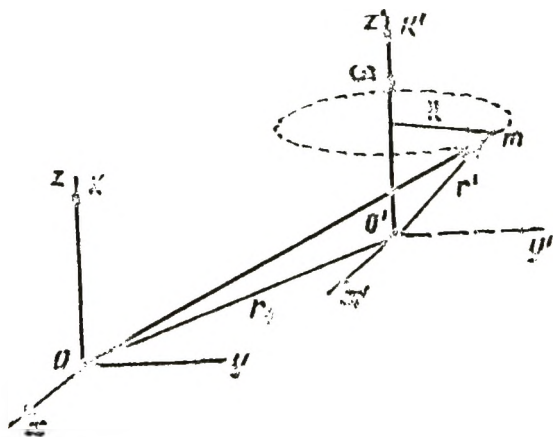
қатысты тұрақты деп ұйғарсақ (бұл жағдай 77-суретте көрсетілген), онда әлгі өсімшелердің айырмашылығы көрнекі түрде айқындалады, демек, осы системадағы оның  $d'A$  өсімшесі нольге тең болады. Алайда  $K$  системаға қатысты  $A$  векторы  $\omega$  жылдамдығымен бұрылатын болады. Суреттен көрініп тұрғандай,  $K'$  системасының  $d\varphi = \omega dt$  бұрышына бұрылатын  $dt$  уақыты ішінде  $A$  векторы  $dA$  өсімше алады, мұны  $d\varphi$  мен  $A$ -ның векторлық көбейтіндісі түрінде көрсетуге болады:  $dA = [d\varphi, A]$ . Шынында да,  $dA$  модулы  $A \sin \alpha d\varphi$ -ге тең, ал  $dA$  векторы  $d\varphi$  және  $A$  векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталған, сонымен қатар  $d\varphi$ -ден  $A$ -ға бұрылу бұранданың оң  $dA$  бағытында орын ауыстыруына себепші болар еді. Басы координата басында емес, кез келген бір нүктеде орналасқан вектор үшін де осындай нәтиже шығатындығын ескерте кетейік. Егер  $A$  векторының координата осьтеріне қатысты қалай орналасқандығына қарамастан,  $A$  векторы жатқан әрі  $z'$  осіне параллель жазықтық  $K'$  системасы болатындай  $d\varphi$  бұрышына бұрылатындығын ескерсек, алдыңғы жағдайды түсінуге болады.

Жалпы жағдайда,  $K'$  системасындағы  $dA$  өсімшесі нольден өзгеше болған кезде,  $K$  системасындағы өсімше мынадай формуламен анықталады:

$$dA = d'A + [d\varphi, A]. \quad (33.7)$$

Бұл — дене қозғалысын жалпы жағдайда қарастырғанда бізге қажет болатын қатыстың дәл өзі. Осы жағдайды қарастыруға кірісейік.

Инерциялы емес санақ системадағы дене қозғалысының жалпы жағдайы. Екі  $K$  және  $K'$  санақ системасын алайық (78-сурет), оның бірі —  $K$  инерциялы система, ал екіншісі



78-сурет.

$K'$  системасы, бұл  $K$  системасына қатысты ілгерілемелі қозғалыс жасайды, сонымен бірге  $z'$  осінен бір қалыпты

айналады;  $z$  осіне әруақытта параллель болып қала береді ( $\omega$  векторы шамасы мен бағыты бойынша тұрақты келеді). Материялық  $m$  нүктесінің  $K$  системасына қатысты қалпы  $\mathbf{r}$  радиус-векторымен, ал системасына қатысты қалпы  $\mathbf{r}'$  радиус-векторымен анықталады. Осы векторлар мен  $K$  координата системасының басынан  $K'$  системасының басына дейін жүргізілген  $\mathbf{r}_0$  радиус-векторының арасында мынадай қатыс бары айқын:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (33.8)$$

$K$  системасына қатысты  $m$  нүктесінің жылдамдығы анықтама бойынша мынаған тең:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (33.9)$$

ал  $K'$  системасына қатысты жылдамдығы

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \quad (33.10)$$

болады, мұндағы  $d'\mathbf{r}'$  арқылы  $\mathbf{r}'$  радиус-векторының  $K'$  системасына қатысты өсімшесі белгіленген.

(33.8) қатысына сәйкес  $\mathbf{r}$  радиус-векторының  $K$  системасында байқалатын өсімшесі мынаған тең:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}' \quad (33.11)$$

мұндағы  $d\mathbf{r}'$  —  $K$  системасындағы  $\mathbf{r}'$  радиус-векторының өсімшесі, ол жоғарыда анықталғанындай [(33.7) формуланы қараңыз],  $K'$  системасында байқалатын  $d'\mathbf{r}'$  өсімшесінен және  $[d\phi, \mathbf{r}'] = [\omega\mathbf{r}']dt$  векторынан құралады:

$$d\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}' + [\omega\mathbf{r}']dt. \quad (33.12)$$

Соңғы қатысты (33.11) формуласына қойып, мынадай өрнек шығарып аламыз:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + [\omega\mathbf{r}']dt.$$

Бұл өрнекті  $dt$ -ге бөліп әрі (33.9) және 33.10) формулаларын ескере отырып,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\omega\mathbf{r}'] \quad (33.13)$$

формуласын шығарып аламыз, мұндағы  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$  —  $K'$  системасына қатысты  $K$  системасының ілгерілемелі қозғалысының жылдамдығы. Егер  $K'$  системасы ілгерілемелі ғана қозғалса, онда  $\omega = 0$  болады да, (33.13) формуласы бізге бұрыннан белгілі (17.3) формуласына айналады.  $\mathbf{v}_0$  және  $\mathbf{v}'$  жылдамдықтары нольге тең бол-

ған жағдайда (33.13) формуласынан (11.4) формуласы шығады.

Енді  $K$  системасында байқалатын әрі (33.13) өрнегімен анықталатын  $v$  векторының өсімшесін табайық.  $\omega = \text{const}$  екенін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$dv = dv_0 + dv' + [\omega, dr'].$$

Бұл формуладағы  $dr'$ -ді оның (33.12) мәнімен, ал  $dv'$ -ні осыған ұқсас (33.12) өрнегімен алмастырайық:

$$dv' = d'v' + [d\varphi, v'] = d'v' + [\omega v'] dt$$

( $d'v'$  —  $K$  системасында байқалатын  $v'$  векторының өсімшесі, ал  $d'v'$  —  $K'$  системасында  $v'$  векторының өсімшесі екендігін ескертейік). Алмастырулар жүргізе отырып, мынадай өрнек шығарып аламыз:

$$dv = dv_0 + d'v' + [\omega v'] dt + [\omega, (d'r' + [\omega r'] dt)].$$

Векторлық көбейтіндінің дистрибутивтілігін пайдалана отырып, осы өрнектің соңғы қосылғышын  $[\omega, d'r'] + [\omega, ([\omega r'] dt)]$  түрінде көрсетуге болады. Демек,

$$dv = dv_0 + d'v' + [\omega v'] dt + [\omega, d'r'] + [\omega, [\omega r']] dt$$

(біз соңғы қосылғыштағы  $dt$  скаляр көбейткішін векторлық көбейтінді таңбасының сыртына шығардық).

Табылған өрнекті  $dt$ -ге бөліп, мынаны аламыз:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{d'v'}{dt} + [\omega v'] + \left[ \omega, \frac{d'r'}{dt} \right] + [\omega, [\omega r']].$$

$\frac{d'r'}{dt}$  туындысы  $v'$ -ға тең болғандықтан, алғашқы екі векторлық көбейтінді бір-біріне дәл келеді және оларды бір  $2[\omega v']$  қосылғышына біріктіруге болады.  $\frac{dv}{dt}$  туындысы анықтама бойынша,  $K$  системасындағы  $m$  нүктесінің  $w$  үдеуі, осыған ұқсас  $\frac{d'v'}{dt}$  туындысы —  $K'$  системасындағы  $m$  нүктесінің  $w'$  үдеуі. Сонымен,

$$w = w_0 + w' + 2[\omega v'] + [\omega, [\omega r']], \quad (33.14)$$

мұндағы  $w_0$  —  $K$  системасының координата басының үдеуі ( $K'$  системасының «ілгерілемелі» үдеуі)

31-параграфта  $a = w - w'$  векторын  $m$ -ге көбейтіп және таңбасын кері өзгертіп, инерция күшін тауып аламыз деп көрсетілген. Соған сәйкес (33.14) формуласын былай жазамыз:



$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{w}_0 + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']].$$

Демек,

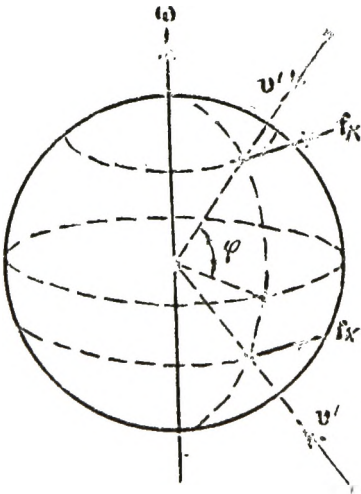
$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0 + 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] + m[\boldsymbol{\omega}, [\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]] \quad (33.15)$$

(соңғы екі қосылғыштағы таңбасының өзгеруі көбейткіштерді алмастыру арқылы жүзеге асырылған).

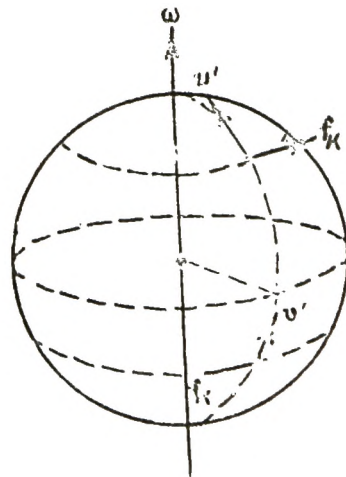
(33.15) формуласында инерция күшінің барлық түрлері болады. Мәселен, егер  $K'$  системасы  $K$  системасына қатысты тек ілгерілемелі қозғалыс жасаса (бірақ айналмайтын болса), онда инерция күші мынаған тең:  $\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0$  [(31.4) формуланы қараңыз]. Ал айналған кезде қосымша  $\mathbf{f}_K = 2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$  Кориолис күші [(33.2) формуланы қараңыз] және  $\mathbf{f}_{ц.теп} = m[\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}'\boldsymbol{\omega}]]$  центрден тепкіш инерция күші пайда болады, соңғысын  $\mathbf{f}_{ц.теп} = m\omega^2\mathbf{R}$  түрінде [(32.2) формуланы қараңыз] көрсетуге болады.

Дене өз қалпын айналып тұрған санақ системасына қатысты өзгерткен жағдайда ғана Кориолис күші пайда болатындығын еске салайық ( $\mathbf{v}'=0$  болғанда Кориолис күшін көрсететін өрнек нольге айналады). Сондай-ақ Кориолис күші әрқашанда айналу осіне перпендикуляр жазықтықта жататындығын да ескертейік.

**Инерциялы Кориолис күші пайда болатын қозғалыс массалары.** Дененің жер бетіне қатысты қозғалысына байланысты құбылыстарды түсіндіру кезінде, бірсыпыра



79-сурет.



80-сурет.

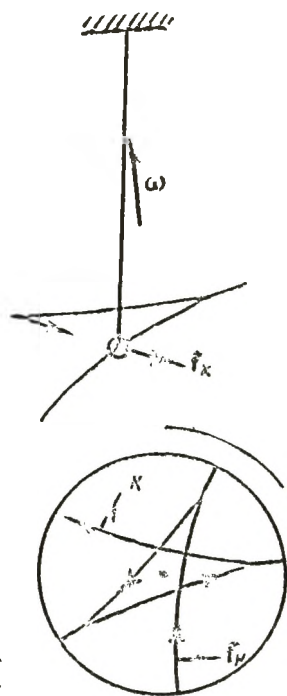
жағдайларда Кориолис күшінің тигізетін әсерін ескеру қажет. Мысалы, денелердің еркін түсуі кезінде оларға

тік сызықтан шығысқа қарай ауытқуына себепші болатын Кориолис күші әсер етеді (79-сурет) Бұл күш экваторда ең көп мәніне жетеді және полюстерде нольге айналады.

Сондай-ақ, ұшып бара жатқан снаряд та инерциялы Кориолис күшінің әсерінен ауытқуға ұшырайды (80-сурет). Зеңбіректен солтүстікке бағыттап атқанда снаряд солтүстік жарты шарда шығысқа қарай, ал оңтүстік жарты шарда батысқа қарай ауытқитын болады. Меридиан бойымен оңтүстікке қарай атқанда ауытқу бағыты оған қарама-қарсы болады. Экватор бойымен атқанда, егер зеңбірек батысқа қарай атылса, Кориолис күші снарядты жерге қысады, ал егер зеңбірек шығысқа қарай атылса, ол күш снарядты жоғары көтереді. Меридиан бойымен кез келген бағытта (солтүстікке немесе оңтүстікке) қозғалатын денеге әсер ететін Кориолис күші қозғалыс бағытымен салыстырғанда солтүстік жарты шарда оңға қарай және оңтүстік жарты шарда солға қарай бағытталадынығына оқушылардың көзін жеткіземіз. Бұл жағдай өзендердің солтүстік жарты шарда әрқашанда оң жағасының, ал оңтүстік жарты шарда әрқашанда сол жағасының кеміріліп шайылатындығына әкеп соқтырады. Қос темір жолмен поезд жүрген кезде рельстердің бірдей тозбайтындығы да осы себептермен түсіндіріледі.

Кориолис күші маятниктің ыргалысы кезінде де пайда болады. 81-суретте маятник жүгінің траекториясы көрсетілген (оңайырақ болу үшін маятник полюсте тұр деп ұйғарылған). Солтүстік полюсте Кориолис күші маятниктің жүрісі бойынша барлық уақытта да оңға қарай, ал оңтүстік полюсте солға қарай бағытталған. Осының нәтижесінде траекторияның түрі розетка сияқты болады.

Суреттен көрініп тұрғанындай, маятниктің тербелу жазықтығы Жермен салыстырғанда сағат тілінің бағытына қарай бұрылады, сонымен қатар күн тәулігінде ол бір айналым жасайды. Гелиоцентрлік санақ системасы-



81-сурет.

на қатысты маятниктің тербелу жазықтығы өзгеріссіз қалады, ал Жер оған қатысты бұрылып, күн тәулігінде бір айналым жасайды.

$\varphi$  ендігінде маятниктің тербелу жазықтығы күн тәулігінде  $2\pi \sin \varphi$  бұрышқа бұрылатындығын дәлелдеуге болады.

Сонымен, маятниктің тербелу жазықтығының айналуын бақылау (осы мақсатқа арналған маятниктер Фуко маятниктері деп аталады) Жердің өз осін айналатындығының тікелей дәлелдемесі болады.

## V ТАРАУ

### ҚАТТЫ ДЕНЕ МЕХАНИКАСЫ

#### § 34. Қатты дене қозғалысы<sup>1</sup>

Біз кіріспеде қатты дене қозғалысының негізгі екі түрімен — ілгерілемелі және айналмалы қозғалысымен — таныстық.

Ілгерілемелі қозғалыс кезінде дененің барлық нүктелері бірдей уақыт аралығында шамасы мен бағыты бойынша бірдей орын ауыстырады, осының салдарынан барлық нүктелердің жылдамдығы мен үдеуі уақыттың әрбір мезетінде бірдей болып отырады. Сондықтан дененің барлық қозғалысын түгелдей сипаттау үшін дене нүктелерінің ішінен оның біреуінің (мысалы, оның инерция центрінің) қозғалысын анықтаудың өзі жеткілікті.

Айналмалы қозғалыс кезінде қатты дененің барлық нүктелері шеңбер бойымен қозғалады, олардың центрлері айналу осі деп аталатын бір түзудің бойында жатады. Айналмалы қозғалысты сипаттап баяндау үшін кеңістіктегі айналу осінің қалпын және әрбір уақыт мезетіндегі дененің бұрыштық жылдамдығын білу керек.

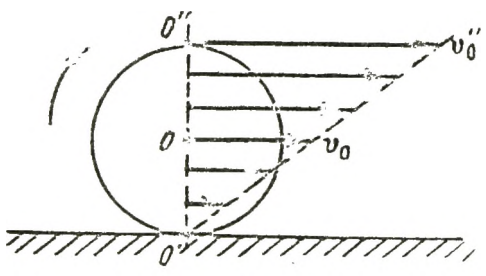
Байқасақ, қатты дененің кез келген қозғалысын жоғарыда айтылған қозғалыстың негізгі екі түрінің қабаттасуы ретінде көрсетуге болады екен. Мұны жазық қозғалыс, яғни дененің барлық нүктелері параллель жазықтықтарда орын ауыстыратын қозғалыс жағдайы үшін көрсетейік. Цилиндрдің жазықтық бойынша тербеуі жазық қозғалысқа мысал бола алады (82-сурет).

Қатты дененің 1 қалпынан 2 қалпына еркін орын

---

<sup>1</sup> Осы тараудың барлық жерінде, 45-параграфты қоспағанда, абсолют қатты дене қарастырылады.

ауыстыруын (83-сурет) екі орын ауыстырудың —  $l$  қалпынан  $l'$  немесе  $l''$  қалпына ілгерілемелі орын ауыстырудың және  $O'$  осінен немесе  $O''$  осінен бұрылудың — қосындысы ретінде көрсетуге болады. Сірә, орын



82-сурет.

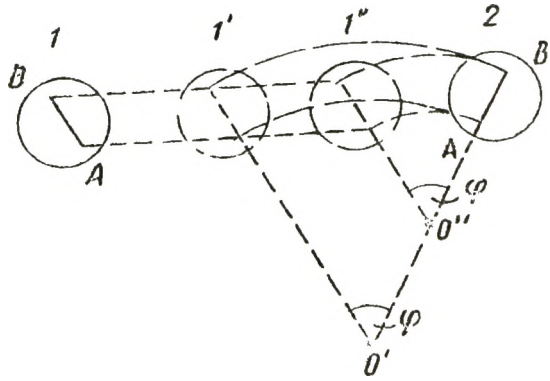
ауыстыруды осындай етіп ілгерілемелі және айналмалы қозғалысқа ажыратып бөлуді сансыз көп тәсілдермен жүзеге асыруға болса керек, алайда қандай жағдай болса да бірақ  $\varphi$  бұрышына бұрылады.

Жоғарыда айтылғанға сәйкес дененің қандай да болсын бір нүктесінің  $ds$  элементар орын ауыстыруын екі — «ілгерілемелі»  $ds_{i.l}$  және «айналмалы»  $ds_{a\ddot{u}}$  — орын ауыстыруға жіктеуге болады:

$$ds = ds_{i.l} + ds_{a\ddot{u}},$$

мұнда  $ds_{i.l}$  барлық нүкте үшін бірдей болады.

$ds$  орын ауыстыруын осындай етіп жіктеуді, біздің жоғарыда көргеніміздей, әр түрлі әдістермен жүзеге асы-



83-сурет.

руға болады және әрбір жағдайда  $ds_{a\ddot{u}}$  айналмалы орын ауыстырылуы дененің бір  $d\varphi$  бұрышына (бірақ әр түрлі осьтерге қатысты) бұрылуы арқылы жүзеге асырылады, ал осы уақытта  $ds_{i.l}$  және  $ds_{a\ddot{u}}$  мәндері әр түрлі болып шығады.

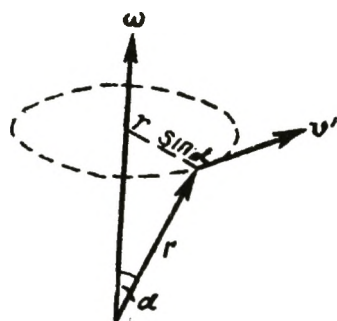
$ds$ -ті тиісті  $dt$  уақыт аралығына бөліп, нүктенің  $v$  жылдамдығын шығарып аламыз:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_{i.l}}{dt} + \frac{ds_{a\ddot{u}}}{dt} = v_0 + v'$$

мұндағы  $v_0$  — дененің барлық нүктелері үшін бірдей болатын ілгерілемелі қозғалыстың жылдамдығы және  $v'$  — дененің әр нүктелері үшін әр түрлі болатын айналмалы қозғалыстан пайда болатын жылдамдық.

Сонымен, қатты дененің жазық қозғалысын екі —  $v_0$  жылдамдықпен қозғалатын ілгерілемелі және  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен (82-суретте  $\omega$  векторы чертеждің арғы жағында чертеж жазықтығына перпендикуляр бағытталған) айналатын айналмалы қозғалыстың қосындысы ретінде көрсетуге болады. Күрделі қозғалыстың осындай түсінігін  $v_0$  және  $v'$  мәндерімен ажыратылатын,

бірақ бір ғана  $\omega$  бұрыштық жылдамдығына сәйкес келетін толып жатқан тәсілдермен жүзеге асыруға болады. Мысалы, жазықтық үстімен сырғымай домалайтын цилиндрдің қозғалысын (82-сурет)  $v_0$  жылдамдығымен қозғалатын ілгерілемелі және сонымен бір уақытта  $O$  осінен  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналатын айналмалы қозғалыс ретінде, немесе  $v_0 = 2v_0$  жылдамдығымен



84-сурет.

қозғалатын ілгерілемелі және  $O''$  осінен сол  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналатын айналмалы қозғалыс ретінде, немесе, ең ақырында,  $O'$  осінен тағы да сол  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналатын бір ғана айналмалы қозғалыс ретінде көрсетуге болады.

Қатты дененің күрделі қозғалысымен салыстырылып қарастырылатын санақ системасын қозғалмайды деп атап, дене қозғалысын қозғалмайтын системамен салыстырғанда  $v_0$  жылдамдығымен ілгерілемелі қозғалыс жасайтын санақ системасында  $\omega$  бұрыштық жылдамдықпен айналатын айналмалы қозғалыс ретінде көрсетуге болады.

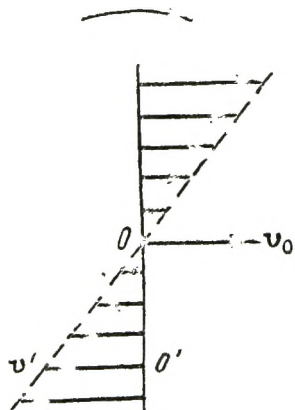
Қатты дененің айналуынан пайда болатын  $r$  радиус-векторы бар нүктенің  $v'$  сызықтық жылдамдығы (84-сурет) мынаған тең:

$$v' = [\omega r].$$

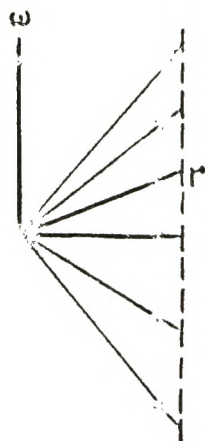
Демек, күрделі қозғалыс кезіндегі осы нүктенің жылдамдығын мына түрде көрсетуге болады:

$$v = v_0 + [\omega r]. \quad (34.1)$$

Екі қозғалысқа да — ілгерілемелі және айналмалы — қозғалысқа қатыса отырып, қозғалмайтын күйінде қалатын нүктелер (олар дене шегінде немесе онан тыс жатуы мүмкін) болады. Шындығында да, берілген  $v_0$  мен  $\omega$ -да (34.1) формуласы нольге тең болатын  $r$  мәнін әрқашанда табуға болады. Ілгерілемелі қозғалыс жасайтын санақ системасының берілген моменттегі жылдамдығы  $v_0$  болсын (85-сурет). Бұл системада дене стрелкамен көрсетілген бағытта  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналады. Айнарудан пайда болған  $v'$  жылдамдығының әр түрлі нүктелер үшін суретте көрсетілгендей мәндері болады.  $O'$  нүктесі үшін  $v_0$  және  $v'$  жылдамдықтары шамасы бойынша тең, ал бағыты бойынша қарама-қарсы болады. Демек, осы нүктенің қозғалмайтын санақ системасына қатысты жылдамдығы нольге тең.



85-сурет.



86-сурет.

Сонымен қатар, егер ең болмағанда бір  $r$  векторы болып, оны  $\omega$ -мен векторлық көбейткенде  $v_0$ -ге тең вектор шығатын болса, онда  $\omega$ -мен векторлық көбейткен кезде осындай нәтиже шығатын тағы да бірқатар векторлар бар болады;  $\omega$ -ның 86-суретте көрсетілген кез келген  $r$  векторымен векторлық көбейтіндісінің шамасы мен бағыты бірдей болады. Осы радиус-векторлармен анықталатын нүктелер қарастырылып отырған уақыт мезетінде қозғалмайтын нүктелер болады. Суреттен көрініп тұрғанындай, бұл нүктелер бір түзудің бойында жатады әрі лездік айналу осі деп аталатынды жасайды. Қозғалмайтын санақ системасына және дененің өзіне қатысты лездік айналу осінің қалпы, жалпы алған-

да, уақытқа байланысты өзгереді. Домалайтын цилиндр жағдайында (82-сурет)  $O'$  лездік осі цилиндр мен жазықтықтың жанасу сызығымен дәл келеді. Цилиндр ырғалған кезде лездік ось жазықтық бойынша да (яғни қозғалмайтын санақ системасына қатысты), сондай-ақ цилиндр беті бойынша да орын ауыстырады.

Уақыттың әрбір мезеті үшін дененің барлық нүктелерінің жылдамдығын тиісті лездік осьтен айналу пайда болған деп есептеуге болады. Демек, қатты дененің жазық қозғалысын лездік осьтен айналатын тізбектелген элементарлық айналыстардың қатары ретінде қарастыруға болады.

Жалпы жағдайда қозғалысты (жазық емес) лездік осьтен айналатын айналыс ретінде және онымен бірге осы осьтің бойымен ілгерілемелі орын ауыстыратын қозғалыс ретінде қарастыруға болады.

### § 35. Қатты дененің инерция центрінің қозғалысы

Денені  $\Delta m_i$  элементар массаға бөліп, оны өз ара орналасуы өзгеріссіз қалатын материялық нүктелер системасы ретінде қарастыруға болады. Осы элементар массалардың кез келгені қарастырылатын дененің басқа элементар массаларының оған әсер етуінен пайда болған ішкі күштердің де, сондай-ақ сыртқы күштердің де әсерінде болады. Мысалы, егер дене Жердің тартылыс күшінің өрісінде болса, дененің әрбір  $\Delta m_i$  элементар массасына  $\Delta m_i g$ -ге тең сыртқы күш әсер ететін болады.

Әрбір элементар масса үшін Ньютонның екінші заңының теңдеуін жазайық:

$$\Delta m_i w_i = f_i + F_i, \quad (35.1)$$

мұндағы  $f_i$  — барлық ішкі күштердің қорытқы күші, ал  $F_i$  — берілген элементар массаға түсірілген барлық сыртқы күштердің қорытқы күші. Барлық элементар массалар үшін жазылған (35.1) теңдеуді қосқанда, мынау шығады:

$$\Sigma \Delta m_i w_i = \Sigma f_i + \Sigma F_i. \quad (35.2)$$

Алайда системада әсер ететін барлық ішкі күштердің қосындысы нольге тең. Сондықтан (35.2) теңдеуі мынадай түрде ықшамдалады:

$$\Sigma \Delta m_i w_i = \Sigma F_i, \quad (35.3)$$



мұның оң жағындағысы — денеге әсер ететін барлық сыртқы күштердің қорытқы күші. (35.3) теңдеуінің сол жағында тұрған қосындысы дененің  $m$  массасының оның инерция центрінің  $w_k$  үдеуіне көбейтіндісімен алмастыруға болады. Шындығында, инерция центрінің радиус-векторы анықтама бойынша [(23.1) формуласын қараныздар] мынаған тең:

$$\mathbf{r}_k = \frac{\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Осы қатысты уақыт бойынша екі рет дифференциалдап және  $\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{w}_k$ , ал  $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$  екендігін ескере отырып, былай жазамыз:

$$m \mathbf{w}_k = \sum \Delta m_i \mathbf{w}_i. \quad (35.4)$$

Демек,

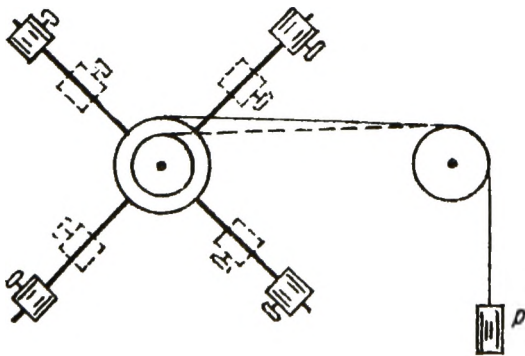
$$m \mathbf{w}_k = \sum \mathbf{F}_i, \quad (35.5)$$

осыдан мынадай қорытынды шығады: *массасы дененің массасына тең материялық нүкте денеге түсірілген барлық күштердің ықпалымен қалай қозғалса, қатты дененің инерция центрі де дәл солай қозғалады.*

Егер дененің массасы және оған әсер ететін күштер белгілі болса, онда (35.5) теңдеуі қатты дененің инерция центрінің қозғалысын анықтауға мүмкіндік береді. Ілгерілемелі қозғалыс жағдайында бұл теңдеу тек инерция центрінің үдеуін ғана емес, сонымен қатар дененің кез келген басқа нүктесінің үдеуін де анықтайтын болады.

### § 36. Қатты дененің айналысы. Күш моменті

Дененің қозғалмайтын осьтен айналу сипатының немен анықталатындығын айқындау үшін келесі тәжірибені қарастырайық. Жеңіл крестовина түріндегі денені



87-сурет.

алайық, оның ұштарына тең шомбал  $m$  жүктері бекітілген (87-сурет). Крестовинаның центріне сатылы шкив бекітейік. Крестовинаны шкиппен қоса оське кигізейік, мұнда осьтен айналған кезде пайда болатын үйкелістің елемейтіндей аз болу жағын қарастырайық.

Шкив сатыларының біреуіне жіптің бір ұшын бекітіп, оны шкивті айналдыра орайық та, жіптің екінші бос ұшын блок арқылы асыра салып, оған  $P$  жүгін ілейік. Егер  $P$  жүгін төмен түсірсек, онда  $\omega$  бұрыштық жылдамдығы барған сайын артып отыратын крестовина айнала бастайды, сонымен қатар бұл айналыс бір қалыпты үдеумен айналды болады.

$P$  жүгінің шамасын, шкивтің  $l$  радиусын, жүктердің  $m$  массасын және олардың айналу осінен  $R$  қашықтығын құбылта отырып, осы факторлардың  $\beta$  бұрыштық үдеуінің шамасына қалай әсер ететіндігін зерттейік. Осыған ұқсас зерттеулердің нәтижелері  $\beta$  бұрыштық үдеуінің

1) жіптің  $f$  керілуіне және шкивтің  $l$  радиусына тура пропорционал;

2) жүктердің  $m$  массасына және олардың айналу осінен  $l$  қашықтығының квадратына кері пропорционал екендігін көрсетеді.

Демек, айналмалы қозғалыстың үдеуі тек денеге әсер ететін  $f$  күшінің шамасына ғана емес, сонымен қатар айналу осінен өн бойымен күш әсер ететін сызыққа дейінгі  $l$  қашықтығына да тәуелді екен.  $fl$  көбейтіндісі айналу осіне қатысты күш моменті деп аталатын шаманы береді.

Осы қарастырылған тәжірибеден бұрыштық үдеудің шамасына тек айналып тұрған дененің массасы ғана емес, сонымен қатар оған массаның айналу осіне қатысты таралуы да әсер етеді деген қорытынды шығады. Осы екі жағдай да есепке алынатын шама дененің айналу осіне қатысты инерция моменті деп аталады.

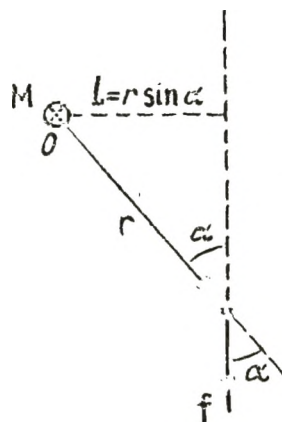
Сонымен, айналмалы қозғалысты зерттеу үшін екі жаңа физикалық шаманы — күш моментін және инерция моментін — қарастыруға енгізу қажет.

Күш моменті ұғымын айқындаудан бастайық. Ал инерция моменті келесі параграфтарда қарастырылады.

Күштің нүктелерге қатысты моменті. Кейбір  $O$  нүктесіне қатысты  $f$  күш моменті деп,

$$M = [rf] \quad (36.1)$$

өрнегімен анықталатын  $M$  векторлық шаманы айтады,



88-сурет.

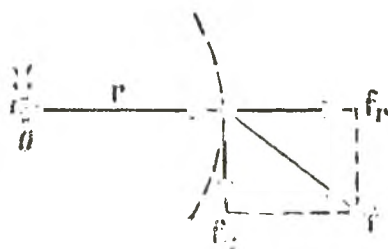
мұндағы  $\mathbf{r}$  —  $O$  нүктесінен күш түсірілетін нүктеге жүргізілген радиус-вектор. Осы анықтаманы түсіндіретін 88-сурет өзіне қатысты инерция моменті алынатын  $O$  нүктесі және  $\mathbf{f}$  векторы сурет жазықтығында жатады деген ұйғарыммен орындалған. Сонда  $\mathbf{r}$  векторы да осы жазықтықта орналасады, ал  $\mathbf{M}$  векторы сурет жазықтығына перпендикуляр және бізден әрі қарай бағытталған.  $\mathbf{M}$  векторы іштей сызылған кресі бар дөңгелектеп кесінделген.<sup>1</sup>

(36.1) анықтамасынан  $\mathbf{M}$  векторының аксиаль вектор екендігі шығады. Оның бағыты, күш бағытында  $O$  нүктесінен айналатын айналыс пен  $\mathbf{M}$  векторы оң бұрандалы система құрайтындай етіп, таңдап алынған.

$\mathbf{M}$  векторының модулы мынаған тең:

$$M = r f \sin \alpha = l f, \quad (36.2)$$

мұндағы  $\alpha$  —  $\mathbf{r}$  және  $\mathbf{f}$  векторлары бағытының арасындағы бұрыш, ал  $l = r \sin \alpha$  — нүктесінен өң бойымен күш әсер ететін түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығы (88-суретті қараңыздар). Бұл ұзындық күштің  $O$  нүктесіне қатысты иіні деп аталады.



89-сурет.

Күш моменті мен оның модулына арналған (36.1) және (36.2) формулаларына басқаша түр беруге болады. Бұл үшін  $\mathbf{f}$  күш векторын екі құраушыға:  $\mathbf{r}$ -мен коллинеарлы  $\mathbf{f}_r$  құраушысына және  $\mathbf{r}$ -ге перпендикуляр  $\mathbf{f}_\perp$  құраушысына жіктейік (89-сурет). Егер центрі  $O$  нүктесінде болатын  $r$  радиусты шеңберді көзге елестетсек, онда  $\mathbf{f}_\perp$  құраушысы жанама бойымен шеңберге бағытталған болады. (36.1) формуласындағы  $\mathbf{f}$  векторын  $\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\perp$  қосындысымен алмастырып, векторлық

<sup>1</sup> Бұдан бұлай сурет жазықтығына перпендикуляр векторды, егер вектор бізден әрі қарай бағытталса, кресі бар дөңгелекпен және егер вектор бізге қарай бағытталса, центрінде нүктесі бар дөңгелекпен, кескіндейтін боламыз. Көрнекі болу үшін векторды конус тәрізді ұшы және соңында крест тәрізді таянышы бар жебе түрінде көзге елестетуге болады. Сонда, егер вектор бізге қарай бағытталса (жебе бізге қаран ұшып келе жатса), біз нүктесі бар дөңгелекті, ал егер вектор бізден әрі қарай бағытталса (жебе бізден әрі қарай ұшып бара жатса), біз кресі бар дөңгелекті көреміз.

көбейтіндінің дистрибутивтілік қасиетін пайдаланайық:

$$M = [rf] = [r, (f_r + f_\tau)] = [r, f_r] + [r, f_\tau].$$

Біздің осыдан шығарып алған өрнегіміздің бірінші қосылғышы нольге тең, өйткені  $r$  және  $f_r$  векторлары коллинеарлы векторлар. Демек, күштің нүктеге қатысты моментін мынадай түрде көрсетуге болады:

$$M = [r, f_\tau]. \quad (36.3)$$

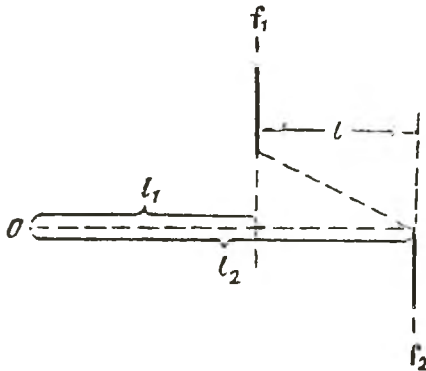
$r$  және  $f_\tau$  векторлары өз ара перпендикуляр болғандықтан,  $M$  векторының модулы мынаған тең:

$$M = r f_\tau \quad (36.4)$$

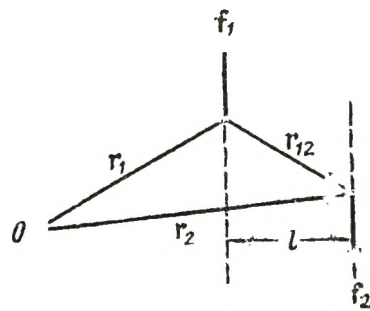
Векторлық көбейтіндінің дистрибутивтілігінен мынадай қорытынды шығады: күш түсетін ортақ нүктесі болатын қосынды күштердің моменті қосылғыш күш моменттерінің қосындысына тең:

$$\begin{aligned} M &= [rf] = [r(f_1 + f_2 + \dots)] = [rf_1] + [rf_2] + \dots = \\ &= M_1 + M_2 + \dots \end{aligned} \quad (36.5)$$

**Қос күштің моменті.** Қос күш деп, шамасы бойынша бір-біріне тең, қарама-қарсы бағытталған, бір түзудің



90-сурет.

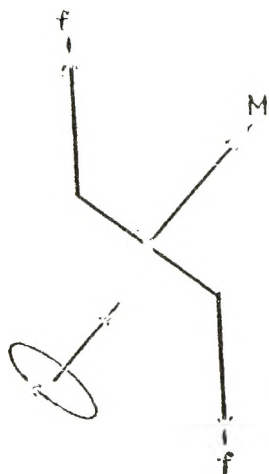


91-сурет.

бойымен әсер етпейтін екі күшті айтады (90-сурет). Өн бойымен күштер әсер ететін түзулердің  $l$  — ара қашықтығы қос күштің ніні деп аталады. Қос күштің кез келген нүктеге қатысты моменті біреу-ақ болатындығын көрсетейік. Мұны ең әуелі күш әсер ететін жазықтықта жатқан нүкте үшін дәлелдейік (90-суретті қараңдар).  $f_1$  және  $f_2$  күштердің бірдей модулын  $f$  әрпімен белгілейік.  $f_1$  күш моменті  $f l_1$ -ге тең және ол бізге қарай ба-

ғытталған, ал  $f_2$  күш моменті  $fl_2$ -ге тең және ол чертежден әрі қарай бағытталған. Қорытқы момент чертежден әрі қарай бағытталған және ол мынаған тең:

$$M = fl_2 - fl_1 = f(l_2 - l_1) = fl.$$



92-сурет.

Осыдан шыққан өрпек қос күш жатқан жазықтықтағы  $O$  нүктесінің орнына тәуелді емес.

Енді  $O$  нүктесін қалауымызша таңдап алайық (91-сурет). Осы нүктеден  $f_1$  және  $f_2$  күштері түсетін нүктеге дейін  $r_1$  және  $r_2$  радиус-векторларын жүргізейік.  $f_1$  күші түсетін нүктеден  $f_2$  күші түсетін нүктеге дейін  $r_{12}$  векторын жүргізейік. Осыдан мынау айқын:

$$r_2 = r_1 + r_{12}. \quad (36.6)$$

$f_1$  және  $f_2$  күштердің қосынды моменті мынаған тең:

$$M = [r_1 f_1] + [r_2 f_2].$$

$r_2$ -ні (36.6) формулаға сәйкес алмастырып және векторлық көбейтіндінің дистрибутивтілігін пайдаланып, мынаны жазуға болады:

$$M = [r_1 f_1] + [(r_1 + r_{12}) f_2] = [r_1 f_1] + [r_1 f_2] + [r_{12} f_2].$$

$f_1 = -f_2$  болғандықтан, алдыңғы екі қосылғыштар өз ара жойылып кетеді де, ақырында мынау шығады:

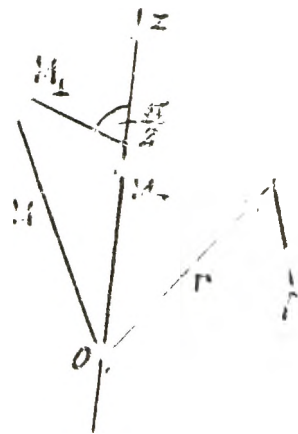
$$M = [r_{12} f_2]$$

Сонымен, қос күштің моменті күш жатқан жазықтыққа перпендикуляр (92-сурет) және сан жағынан күштердің кез келгенінің модулы мен күшінің көбейтіндісіне тең.

**Күштің оське қатысты моменті.**

Егер дене  $O$  нүктесіне қатысты еркінше айналатын болса, онда дене  $f$  күшінің әсерімен осьтен бұрылады, ал бұл ось күш пен  $O$  нүктесі жатқан жазықтыққа перпендикуляр, яғни ол берілген нүктеге қатысты күш моментінің бағытымен сәйкес келеді. Моменттің шамасы күштің денені осы осьтен айналдыра алатын қабілеттілігін сипаттайды.

Егер дене тек кейбір белгіленген осьтен ғана айнала



93-сурет.

алатын болса, онда денені осы осьтен айналдыра алатын күштің қабілеттілігі күштің оське қатысты моменті деп аталатын шамамен сипатталады.

Оське қатысты  $\mathbf{f}$  күш моментінің не екендігін анықтау үшін,  $O$  нүктесіне қатысты  $\mathbf{f}$  моментін тауып,  $O$  нүктесінен осы моменттің  $\mathbf{M}$  векторын саламыз (93-сурет;  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  және  $\mathbf{M}$  векторлары сурет жазықтығында жатпайды деп ұйғарылады).  $O$  нүктесі арқылы  $z$  осі деп аталатын ось жүргізіп,  $\mathbf{M}$  векторын екі құраушыға; оське параллель<sup>1</sup>  $M_z$  құраушыға және оське перпендикуляр  $M_{\perp}$  құраушыға жіктейік.

$O$  нүктесіне қатысты (осьте жатқан) күш моментінің  $z$  осіне параллель құраушысы күштің оське қатысты моменті деп аталады. Күштің оське қатысты моментін  $M_z$  символымен белгілеп, мынаны жазуға болады:

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{f}]_z. \quad (36.7)$$

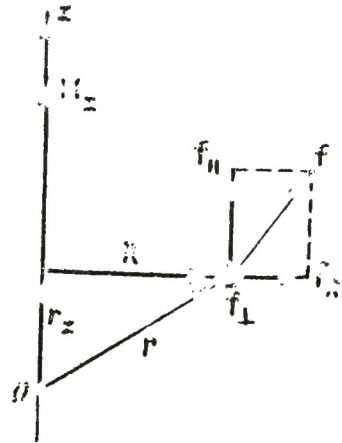
$\mathbf{M}$  берілген кезде  $M_z$  векторының шамасы мен бағыты  $z$  осін таңдап алуға тәуелді болады. Егер  $z$  осі  $\mathbf{M}$  векторының бағытымен дәл келсе, онда  $M_z$  векторы  $\mathbf{M}$  векторына тең, егер  $z$  осі  $\mathbf{M}$  векторына перпендикуляр болса, онда  $M_z = 0$  болады.

$M_z$  векторы үшін жазылған (36.7) өрнегін өте көрнекі етіп көрсетуге болады. Бұл үшін  $\mathbf{r}$  радиус-векторын екі құраушының: оське параллель  $\mathbf{r}_z$  құраушысы мен оське перпендикуляр  $\mathbf{R}$  құраушысының қосындысы түрінде көрсетуге болады (94-сурет). Сонда  $z$  осіне қатысты күш моментін мынадай түрде жазуға болады:

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{f}]_z = [(\mathbf{r}_z + \mathbf{R}), \mathbf{f}]_z = [\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]_z + [\mathbf{R}\mathbf{f}]_z.$$

Алайда  $[\mathbf{r}_z \mathbf{f}]_z$  векторы  $z$  осіне перпендикуляр; демек, оның осы ось бойынша құраушысы нольге тең. Сондықтан біз мынадай формулаға келеміз:

<sup>1</sup>  $M_z$  құраушысын  $M_z$  символымен белгілетінін  $\mathbf{M}$  векторының проекциясынан айыра білу керек.  $\mathbf{M}_z$  — вектор,  $M_z$  — скаляр алгебралық шама; олардың арасында жай байланыс болады:  $\mathbf{M}_z = e_z M_z$ , мұндағы  $e_z$  —  $z$  осінің бірлік векторы (орты). [Бұл ортты  $\mathbf{k}$  символымен де белгілейді; (2.8) формуланы қараңдар.]



94-сурет.

$$M_z = [Rf]_z. \quad (36.8)$$

Енді  $f$  күш векторын:  $f_{\parallel}$  —  $z$  осіне параллель,  $f_R$  —  $R$  векторына коллинеарлы, ең ақырында,  $f_{\tau}$  —  $z$  осі және  $R$  векторы арқылы өтетін, жазықтыққа перпендикуляр үш құраушының қосындысы түрінде көрсетейік. Соңғы құраушы 94-суретте кресі бар дөңгелекпен кескінделген. Егер центрі  $z$  осінде болатын радиусы  $R$  шеңбер түрінде көрсетсек, онда  $f_{\tau}$  құраушы осы шеңберге жанама бойымен бағытталған болады. (36.8) өрнегіндегі  $f$  векторын жоғарыда аталған құраушылардың қосындысымен алмастырайық:

$$M_z = [Rf]_z = [R(f_{\parallel} + f_R + f_{\tau})]_z = [R, f_{\parallel}]_z + [R, f_R]_z + [R, f_{\tau}]_z.$$

Үш қосылғыштардың әрқайсысын жеке-жеке қарастырайық.  $[R, f_{\parallel}]$  векторы  $z$  осіне перпендикуляр, сондықтан оның ось бойынша құраушысы нольге тең.  $[R, f_R]$  векторы өзінен-өзі нольге тең, өйткені оны жасайтын құраушы көбейткіштері коллинеар болады. Демек, алғашқы екі қосылғыштар нольге тең.  $[R, f_{\tau}]$  векторы  $z$  осіне параллель (оның көбейткіштерінің екі құраушысы да  $z$  осіне перпендикуляр), сондықтан ось бойындағы оның құраушысы өзіне тең:  $[R, f_{\tau}]_z = [R, f_{\tau}]_z$ . Сонымен, біз мына формулаға келіп тірелеміз:

$$M_z = [R, f_{\tau}]. \quad (36.9)$$

$R$  және  $f_{\tau}$  векторлары өз ара перпендикуляр. Сондықтан  $M_z$  векторының модулы мынаған тең:

$$|M_z| = Rf_{\tau}^{\perp} \quad (36.10)$$

$R$  шамасы  $z$  осіне қатысты  $f_{\tau}$  күшінің піні деп аталады.

(36.9) өрнегінен  $M_z$  моменті денеге күш түсіріп, сол денені  $z$  осінен бұра алатын  $f$  күшінің қабілеттілігін сипаттайтындығын оңай байқауға болады. Шындығында,  $f_{\parallel}$  және  $f_R$  құраушылары  $z$  осінен айналысты тудыра алмайды. Демек, біз қарастырып отырған бұрылысты тек  $f_{\tau}$  құраушысы ғана тудыруы мүмкін, сонымен қатар бұл құраушының  $R$  піні неғұрлым үлкен болса, ол бұрылысты соғұрлым ойдағыдай жүзеге асыра алады.

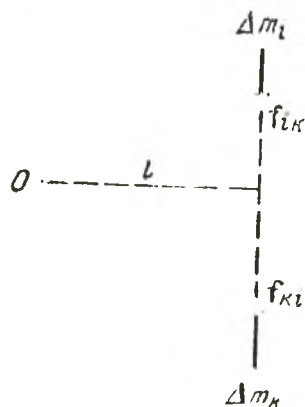
Сондай-ақ, оське қатысты момент үшін де (36.5) қа-

<sup>1</sup>  $M_z$  векторының модулын  $M_z$  символы арқылы белгілеуге болмайды, өйткені соңғы символ  $M$  векторының  $z$  осіне түсірілген проекциясын белгілейді, ал бұл проекцияның шамасы оң да, сондай-ақ теріс те болуы мүмкін. Вектор модулы әрқашан да оң шама. Сондықтан мынадай қатыс дұрыс болады:  $|M_z| = |M_z|$ .

тысы дәл болады, яғни қорытқы момент сол оське қатысты қосылғыш күштер моментінің қосындысына тең:

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + \dots \quad (36.11)$$

Ішкі күштердің қосынды моменті. Қандай да болсын екі элементар массаның бір-біріне әсер ететін күштері бір түзудің бойында жатыр (95-сурет). Олардың еркінше алынған  $O$  нүктесіне қатысты моменттері шамасы жағынан тең, бағыттары бойынша қарама-қарсы болады. Сондықтан ішкі күштердің моменттері қос-қостан бірін-бірі теңестіреді, әрі материялық нүктелердің кез келген жүйесі үшін, атап айтқанда, қатты дене үшін барлық ішкі күштер моменттерінің қосындысы әрқашанда нольге тең. Бұл пікір кез келген нүктеге қатысты алынған барлық ішкі күштердің қосынды моменті үшін де, сондай-ақ кез келген оське қатысты алынған осы күштердің қосынды моменті үшін де орынды болады.



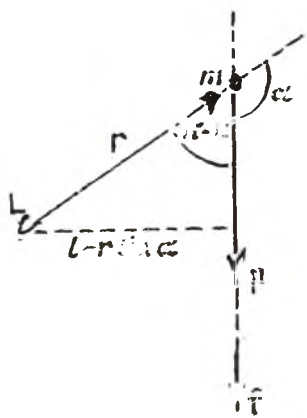
95-сурет.

### § 37. Материялық нүкте импульсының моменті. Импульс моментінің сақталу заңы

Материялық нүктенің импульс моменті (қозғалыс мөлшерінің моменті) күш моменті сияқты айықталады.  $O$  нүктесіне қатысты импульс моменті мынаған тең:

$$L = [rp] = m[rv], \quad (37.1)$$

мұндағы  $r$  — нүктесінен материялық нүкте орналасқан кеңістік нүктесіне жүргізілген радиус-вектор (96-сурет;  $f$  векторы бұдан былай қажет болады),  $p = mv$  — нүкте импульсы [(36.1) формуласымен салыстырыңдар].



96-сурет.

$l = r \sin \alpha$  нің енгізіп, импульс векторының модульы мынадай түрде жазуға болады:

$$L = fp \sin \alpha = lp. \quad (37.2)$$

$z$  осіне қатысты импульс моменті деп, осьте жатқан  $O$



нүктесіне қатысты алынған  $L$  импульс моментінің осы ось бойындағы  $L_z$  құраушысын айтады (97-сурет):

$$L_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z. \quad (37.3)$$

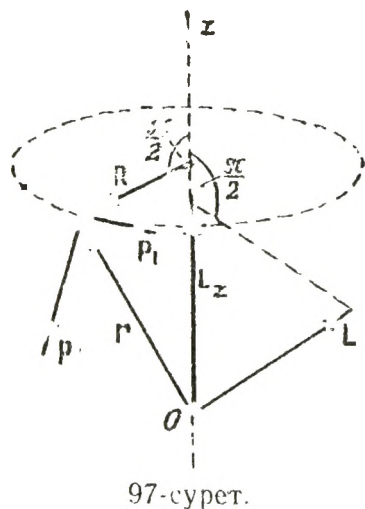
Бізді (36.9) формуласына келтірген пікірді қайталап, мынаны табамыз:

$$L_z = [\mathbf{R}, \mathbf{p}_\tau] = m[\mathbf{R}, \mathbf{v}_\tau], \quad (37.4)$$

мұндағы  $\mathbf{R}$  —  $z$  осіне перпендикуляр  $\mathbf{r}$  радиус-векторының құраушысы, ал  $\mathbf{p}_\tau$  —  $z$  осі мен  $m$  нүктесі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр  $\mathbf{p}$  векторының құраушысы.

Импульс моментінің уақытқа байланысты өзгерісінің немен анықталатындығын дәлелдейік. Бұл үшін (37.1) формуласын  $t$  уақыты бойынша дифференциалдайық және көбейтіндіні дифференциалдау ережесін пайдаланайық:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \\ &+ \left[ \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (37.5)$$



Бірінші қосылғыш нольге тең, өйткені ол бағыттары бірдей векторлардың векторлық көбейтіндісі бөлып табылады. Шындығында да,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  векторы  $\mathbf{v}$  жылдамдық векторына тең, демек, бағыты бойынша  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  векторымен дәл келеді.  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  векторы Ньютонның екінші заңы бойынша денеге әсер ететін  $\mathbf{f}$  күшіне тең [(22.3) теңдеуін қараңыз]. Демек, (37.5) өрнегін былай жазуға болады:

$$\frac{dL}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{f}] = \dot{M}, \quad (37.6)$$

мұндағы  $\dot{M}$  — импульс моменті қандай нүктеге қатысты алынса, сондай  $O$  нүктесіне қатысты алынған күштердің материялық нүктеге түсірген моменті.

(37.6) қатысынан мынау шығады: қандай да болсын  $O$  нүктесіне қатысты күштердің материялық нүктеге әсер ететін қорытқы моменті нольге тең болса, онда сол  $O$  нүктесіне қатысты алынған материялық нүктенің импульс моменті тұрақты болып қала береді.

(37.6) формуласына енген векторлардың  $z$  осі бойынша құраушысын алып, мынадай өрнек табамыз<sup>1</sup>:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (37.7)$$

(37.6) формуласы (22.3) формуласына ұқсас. Осы формулаларды салыстырудан мынау шығады: импульстен уақыт бойынша алынған туынды материялық нүктеге әсер ететін күшке тең денеге ұқсас, импульс моментінен уақыт бойынша алынған туынды да күш моментіне тең болады.

Бірнеше мысалдар қарастырайық.

**1 мысал.** Материялық нүкте 96-суреттегі пунктир сызықтың бойымен қозғалсын дейік. Қозғалыс түзу сызықты болғандықтан, материялық нүктенің импульсы тек модулы бойынша ғана өзгереді, демек,

$$\frac{dp}{dt} = f$$

мұндағы  $f$  — күш модулы [осы қарастырылып отырған жағдайда  $\mathbf{p}$  векторының бағыты қандай болса,  $\mathbf{f}$  векторының да бағыты сондай болады (96-суретті қараңыздар), сондықтан  $\frac{dp}{dt} > 0$ ].

$l$  іні өзгеріссіз қалады. Демек,

<sup>1</sup> (2.11) формуласына сәйкес

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{пр}z} = \frac{d}{dt} L_z,$$

мұндағы  $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{пр}z} - \frac{d\mathbf{L}}{dt}$  векторының  $z$  осіне түсірілген проекциясы, ал  $L_z - \mathbf{L}$  векторының  $z$  осіне түсірілген проекциясы. Осы теңдіктің екі жағын да  $z$  осінің  $\mathbf{e}_z$  ортына көбейтіп және  $\mathbf{e}_z$ -тің  $t$ -ға тәуелді емес екендігін ескере отырып,  $\mathbf{e}_z$ -ті оң жақ бөлігіндегі туынды таңбасының астына емізейік. Осының нәтижесінде мынашы аламыз:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{пр}z} \mathbf{e}_z = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_z \mathbf{e}_z).$$

Бірақ  $\mathbf{e}_z$  пен  $z$  осіндегі вектор проекциясының көбейтіндісі осы вектордың  $z$  осіндегі құраушысын береді (132-беттегі сілтемені қараңдар). Демек,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_z = \frac{d}{dt} L_z,$$

мұнда  $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_z - \frac{d\mathbf{L}}{dt}$  векторының  $z$  осіндегі құраушысы.

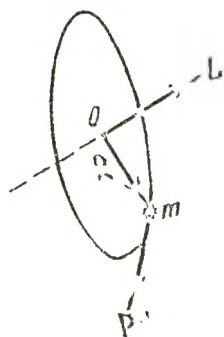
$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (lp) = l \frac{dp}{dt} = lf = M,$$

бұл (37.6) формуласымен үйлеседі (бұл жағдайда  $L$  тек модулы бойынша ғана өзгереді әрі түседі, сондықтан

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = \frac{dL}{dt}$$

2 мысал. Массасы  $m$  болатын материялық нүкте  $R$  радиусты шеңбер бойымен қозғалады (98-сурет) Шеңбердің  $O$  центріне қатысты материялық нүктенің импульс моменті модулы бойынша мынаған тең:

$$L = mvR. \quad (37.8)$$



98-сурет.

$L$  векторы шеңбер жазықтығына перпендикуляр, сонымен бірге нүкте қозғалысының бағыты мен  $L$  векторы оң бұрандалы система жасайды.

$R$ -ге тең иін тұрақты болып қалатындықтан, импульс моменті тек жылдамдық моментінің өзгеру есесінен ғана өзгере алады. Материялық нүктенің шеңбер бойымен бір қалыпты қозғалған кезінде импульс моменті шамасы бойынша да және бағыты бойынша да тұрақты болып қалады. Бұл жағдайда материялық нүктеге әсер ететін күш моментінің нольге тең екендігін ұғыну қиын емес.

3 мысал. Күштің центрлік өрісіндегі (26-параграфты қараңыздар) материялық нүктенің қозғалысын қарастырайық. (37.6) формуласына сәйкес күш центріне қатысты алынған материялық нүктенің импульс моменті шамасы мен бағыты бойынша тұрақты болып қалуга тиіс (центрге қатысты центрлік момент нольге тең). Күш центрінен  $m$  нүктесіне жүргізілген  $r$  радиус-вектор мен  $L$  векторы бір-біріне перпендикуляр. Сондықтан  $r$  векторы  $L$  бағытына перпендикуляр бір жазықтықта қала береді. Демек, күштің орталық өрісіндегі материялық нүктенің қозғалысы күш центрі арқылы өтетін жазықтықта жатқан қисық сызық бойында болады.

Күш центрлерінің таңбасына (яғни олардың тартылыс күші немесе тебу күші болатынына), сондай-ақ бас-таңқы шартқа қарай траектория гипербола, парабола немесе эллипс (соның ішінде шеңбер) болады. Мысалы, Жер эллипстік орбита бойымен қозғалады, оның фокустарының біреуінде Күн орналасады.

Импульс моментінің сақталу заңы.  $N$  материялық нүктеден тұратын системаны қарастырайық. 23-параграфтағыдай, нүктеге әсер ететін күштерді ішкі және сыртқы күштерге ажыратып бөлейік.  $i$ -інші материялық нүктеге әсер ететін ішкі күштердің қорытқы моментін  $M_i$  символымен, ал сол нүктеге әсер ететін сыртқы күштердің қорытқы моментін  $M_i'$  символымен белгілейік. Сонда (37.6) теңдеуі  $i$ -інші материялық нүкте үшін мынадай түрде болады:

$$\frac{d}{dt} L_i = M_i' + M_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Бұл өрнек бір-бірінен  $i$  индексінің мәнімен ғана айырмашылығы болатын  $N$  теңдеулердің жиінағы болып табылады. Осы теңдеулерді қосып, мынаны шығарып аламыз:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N M_i' + \sum_{i=1}^N M_i. \quad (37.9)$$

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] \quad (37.10)$$

шамасы материялық нүктелер система сының импульс моменті деп аталады.

Ішкі күш моменттерінің қосындысы [(37.9) формуласының оң жақ бөлігіндегі қосындысының біріншісі], 36-параграфтың соңында көрсетілгендей, нольге тең. Демек, ішкі күштердің қосынды моментін  $M$  символымен белгілеп, былай жазамыз:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N M_i' = M \quad (37.11)$$

[(37.6) формуласындағы символдарға қарағанда осы формуладағы  $L$  және  $M$  символдарына басқаша мән берілген].

Материялық нүктелердің тұйық системасы үшін  $M=0$ , осының салдарынан  $L$  импульсының қосынды моменті уақытқа тәуелді болмайды. Сонымен, біз импульс моментінің сақталу заңына келіп тірелдік: *материялық нүктелердің тұйық системасының импульс моменті тұрақты болып қалады.*

Системадағы денеге әсер ететін сыртқы күштердің қосынды моменті нольге тең болған жағдайда, сыртқы

әсерге ұшырайтын система үшін де импульс моменті тұрақты болып қала беретіндігін ескерте кетейік.

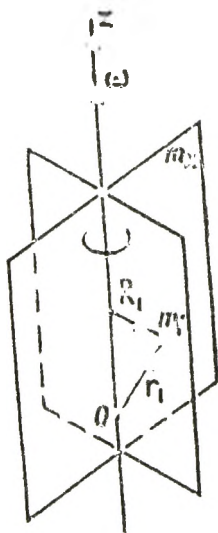
(37.11) теңдеуінің сол және оң жақ бөліктерінде тұрған векторлардан олардың  $z$  осінің бойына жүргізілген құраушыларын алып, мынадай қатысқа келеміз:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi} = M_z. \quad (37.12)$$

$O$  нүктесіне қатысты сыртқы күштердің қорытқы моменті нольден өзгеше ( $M \neq 0$ ). алайда  $M$  векторының қайсыбір  $z$  бағыты бойынша алынған  $M_z$  құраушысы нольге тең жағдайдың болуы да мүмкін. Сонда (37.12) қатысына сәйкес,  $z$  осі бойынша системаның импульс моментінің  $L_z$  құраушысы сақталып қала береді.

### § 38. Айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуі

Әрбір нүктесі ортақ  $z$  осі арқылы өтетін жазықтықтардың бірінде сақталып қала отырып, қалайда орын ауыстыра алатын материялық нүктелер системасын қарастырайық (99-сурет). Барлық жазықтықтар осы осьтен бірдей  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айнала алады.



99-сурет.

(11.5) формуласына сәйкес  $i$ -інші нүкте жылдамдығының тангенциал құраушысы мынадай түрде көрсетілуі мүмкін:

$$v_{\tau i} = [\omega, R_i],$$

мұндағы  $R_i$  —  $r_i$  радиус-векторының  $z$  осіне перпендикуляр құраушысы [оның  $R_i$  модуль нүктенің  $z$  осінен қашықтығын береді]. Осы  $v_{\tau i}$  мәнін (37.4) формуласына қойып,  $z$  осіне қатысты нүктенің импульс моментінің өрнегін шығарып аламыз:

$$L_{zi} = m_i [R_i, [\omega, R_i]] = m_i R_i^2 \omega$$

[біз мұнда (11.3) қатысын пайдаландық;  $R_i$  және  $\omega$  векторлары өз ара перпендикуляр].

Бұл өрнекті барлық нүкте бойынша қосындылап және ортақ  $\omega$  көбейткішті қосынды таңбасының сыртына шы-

гарып,  $z$  осіне қатысты системасының импульс моменті үшін мынадай өрнекті табамыз:

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad (38.1)$$

Материялық нүкте массалары олардың  $z$  осінен ара қашықтығының квадраты көбейтінділерінің қосындысына тең:

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad (38.2)$$

физикалық шама  $z$  осіне қатысты материялық системасының инерция моменті деп аталады (жеке алынған  $m_i R_i^2$  қосылғышы  $z$  осіне қатысты  $i$ -інші материялық нүктенің инерция моменті болып табылады).

(38.2) өрнекті ескергенде (38.1) өрнегі мынадай түрге келеді:

$$L_z = I_z \omega. \quad (38.3)$$

Осы өрнекті (37.12) қатысындағы  $L_z$ -тің орнына қойып, мынадай теңдеуге келеміз:

$$\frac{d}{dt} (I_z \omega) = M_z, \quad (38.4)$$

бұл — айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуі. Формасы бойынша ол Ньютонның екінші заңының:

$$\frac{d}{dt} (mv) = f$$

теңдеуіне ұқсас.

Абсолют қатты денені ара қашықтықтары өзгеріссіз қалатын материялық нүктелер системасы ретінде қарастыруға болатындығын біз 35-параграфта атап өткенбіз. Осындай система үшін белгіленген  $z$  осіне қатысты  $I_z$  инерция моменті тұрақты шама болады. Демек, абсолют қатты дене үшін (38.4) теңдеуі мына теңдеуге ауысады:

$$I_z \beta = M_z \quad (38.5)$$

мұндағы  $\beta = \dot{\omega}$  — дененің бұрыштық үдеуі,  $M_z$  — денеге әсер ететін сыртқы күштердің қорытқы моменті.

(38.5) теңдеуі формасы бойынша мына теңдеуге ұқсас:

$$m\dot{\omega} = f.$$

Айналмалы қозғалыс динамикасының теңдеуін ілге-

рілемелі қозғалыс динамикасының теңдеуімен салыстыра отырып, айналмалы қозғалыс кезінде күштің ролін күш моменті, массаның ролін инерция моменті т. с. с. атқаратындығын байқау қиын емес (2-таблица)

2 - т а б л и ц а

Ілгерілемелі қозғалыс	Айналмалы қозғалыс
$mv = \mathbf{i}$ $p = mv$ $\frac{dp}{dt} = \mathbf{i}$ $\mathbf{i}$ — күш $m$ — масса $v$ — сызықтық жылдамдық $w$ — сызықтық үдеу $p$ — импульс	$I_z \beta = M_z$ $L_z = I_z \omega$ $\frac{dL}{dt} = M$ $M$ немесе $M_z$ — күш моменті $I_z$ — инерция моменті $\omega$ — бұрыштық жылдамдық $\beta$ — бұрыштық үдеу $L$ — импульс моменті

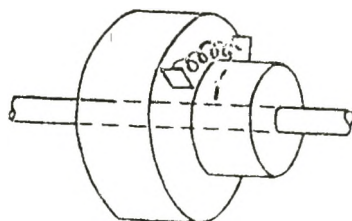
Күш моменті мен инерция моменті ұғымдарын біз қатты дененің айналуын қарастыру негізінде енгіздік. Алайда бұл шамалардың айналмалы қозғалысқа қатысынсыз-ақ бола беретіндігі есте болу керек. Мысалы, кез келген дене, оның айналғанына немесе тыныш тұрғанына қарамастан, кез келген оське қатысты белгілі бір инерция моментіне ие болады, бұл дененің, өзінің қозғалысының күйіне қарамастан, массаға ие болатындығына ұқсас. Сондай-ақ күш моменті де дененің осьтен (момент осы оське қатысты алынады) айналғандығына немесе тыныш тұрғандығына қарамастан бола береді. Соңғы жағдайда қарастырылып отырған күштің моменті денеге әсер ететін басқа күштердің моменттерімен теңестірілетіні айқын.

(38.5) теңдеуінен мынау шығады: барлық сыртқы күштердің қорытқы моменті нольге тең болған кезде дене тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады. Егер дененің инерция моменті осы дененің жеке бөліктерінің өз ара орналасуының өзгеру салдарынан өзгере алатын болса, онда  $M_z = 0$  болған жағдайда  $I_z \omega$  көбейтіндісі [(38.4) теңдеуін қараңыздар)] тұрақты болып қалады, әрі  $I_z$  инерция моментінің өзгеруі өзіне сәйкес  $\omega$  бұрыштық жылдамдықтың өзгеруін туғызады. Әдетте көрсетілетін мынадай құбылыстың мәнісі осы жағдаймен түсіндіріледі: айналмалы отырғышта тұрған адам қолын жан-

жағына созса, жайлап айнала бастайды, ал қолын дене-сіне қысып тұрса, тезірек айнала бастайды.

Ортақ айналу осі бар екі дискіден құрылған система-ны қарастырайық (100-сурет) Дискілердің өскіндерінің арасына қысылған пружинаны орналастырайық әрі осы өскіндерді жіппен байлап қояйық. Егер жіпті жағып жіберсек, онда тарқатылған пружинаның әсерімен екі дискі де қарама-қарсы бағытта айнала бастайды. Сонда дискілер ие болған импульс моменттері шамасы бойынша тең және бағыты бойынша қарама-қарсы болады:

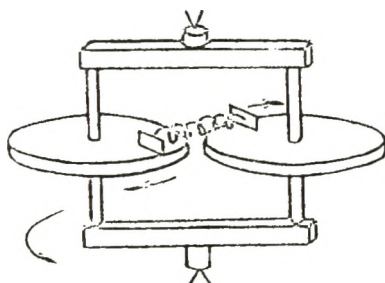
$$I_1\omega_1 = -I_2\omega_2,$$



100-сурет.

сондықтан система импульсының қорытқы моменті бұрынғысынша нольге тең болып қала береді.

101-суретте кесінделген система жағдайы да алдыңғыға ұқсас болады, бұл система рамаға бекітілген, бір-біріне сәйкес келмейтін осьтері бар екі дискіден тұрады, системаның симметрия осінен еркін айнала алады. Егер арасына қысылған пружинасы бар дискілердің өскіндерін тартып тұратын жіпті жағып жіберсек, дискілер бір бағытта айнала бастайды. Мұнымен қатар рама да система импульсының толық моменті тұтас алғанда



101-сурет.

нольге тең болып қалатындай оған қарама-қарсы жаққа қарай айнала бастайды.

Жоғарыда қарастырылған мысалдың екеуінде де системаның және бөліктердің айналуы ішкі күштердің әсерімен пайда болды. Демек, система денелерінің арасында әсер ететін ішкі күштер системаның жеке бөліктерінің импульс моменттерінің өзгерісін тудыра алады. Алайда бұл өзгерістер тұтас алғанда система импульсының қосынды моменттері әрқашанда өзгеріссіз қалатындай жағдайда болады. Система импульсының толық моменті тек сыртқы күштердің әсерімен ғана өзгере алады.



### § 39. Инерция моменті

Алдыңғы параграфта инерция моменті элементар массалар мен олардың осьтен алынған ара қашықтығының квадраты көбейтіндісінің қосындысы ретінде анықталған [(38.2) тендеуін қараңыздар]. Осы анықтамадан инерция моменті аддитивтік шама деген қорытынды шығады. Бұл — дененің инерция моменті оның жеке бөліктерінің инерция моменттерінің қосындысына тең деген сөз.

Массаның дене шегінде таралуын тығыздық деп аталатын шама арқылы сипаттауға болады. Егер дене бір текті, яғни оның барлық нүктелердегі қасиеті бірдей болса, онда

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (39.1)$$

шамасы тығыздық деп аталады, мұндағы  $m$  — дене массасы, ал  $V$  — оның көлемі. Сонымен, бір тектес денелер жағдайында тығыздық дегеніміз дененің бірлік көлеміндегі масса болады.

Массасы бір қалыпты таралмаған дене үшін (39.1) өрнегі орташа тығыздықты береді. Берілген нүктедегі тығыздық бұл жағдайда былай анықталады:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (39.2)$$

Бұл өрнектегі  $\Delta m$  —  $\Delta V$  көлемінде болатын масса, бұл көлем шегіне ауысқанда тығыздық анықталатын нүктеге жинақталады.

(39.2) өрнегіндегі шектік ауысуды  $\Delta V$  дәл нүктеге жинақталады деп ұғынуға болмайды. Осылай ұғынған кезде бірі атом ядросына, екіншісі ядролар арасындағы аралыққа тиісті болатын әрі іс жүзінде бір-біріне дәл келетін екі нүкте үшін бір-бірінен ерекше айырмашылығы бар нәтиже шыққан болар еді (бірінші нүкте үшін өте зор шама, екіншісі үшін ноль нәтиже). Сондықтан  $\Delta V$ -ні физика тұрғысына шексіз аз көлем алынғанға дейін ғана кішірейтуге болады; шексіз аз көлем деп, бір жағынан, оның шегіндегі макроскопиялық (яғни атомдардың көп жиынтығына тән) қасиеттерін бірдей деп есептеуге болатын мейлінше аз, екінші жағынан заттың дискреттілігі (үздіктілігі) байқалмас үшін мейлінше зор көлемді ұғамыз.

(39.2) өрнегіне сәйкес  $\Delta m_i$  элементар масса берілген нүктедегі дененің  $\rho_i$  тығыздығын соған сәйкес келетін элементар  $\Delta V_i$  көлемге көбейткенге тең:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Демек, инерция моментін мына түрде көрсетуге болады:

$$I = \sum \rho_i r_i^2 \Delta V_i \quad (39.3)$$

[біз (38.2) формуласындағы  $R_i$ -ді  $r_i$ -ге алмастырдық].

Егер дене тығыздығы тұрақты болса, оны қосынды таңбасының сыртына шығаруға болады:

$$I = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i. \quad (39.4)$$

(39.3) және (39.4) қатыстары — жуық қатыстар, сонымен бірге элементар  $\Delta V_i$  көлем және соған сәйкес келетін элементар  $\Delta m_i$  масса неғұрлым аз болса, бұл қатыстар соғұрлым дәлірек болады. Демек, инерция моменттерін табу есебі оларды интегралдауға келіп тіреледі:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV \quad (39.5)$$

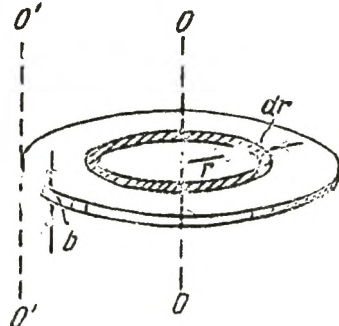
(39.5) формуласындағы интегралдар дененің барлық көлемі бойынша алынады. Осы интегралдардағы  $\rho$  және  $r$  шамалары нүкте функциялары, яғни, мысалы,  $x$ ,  $y$  және  $z$  декарт координаталарының функциялары болып табылады.

Мысал ретінде диск жазықтығына перпендикуляр және оның центрі арқылы өтетін оське қатысты біртекті дискінің инерция моментін табайық (102-сурет). Дискіні қалыңдығы  $dr$  болатын сақиналы қабаттарға бөлейік. Бір қабаттың барлық нүктелері осьтен  $r$ -ге тең бірдей қашықтықта болады. Осындай қабаттың көлемі мынаған тең:

$$dV = b2\pi r dr,$$

мұндағы  $b$  — дискінің қалыңдығы.

Диск біртекті болғандықтан, оның тығыздығы барлық нүктеде бірдей болады және (39.5) формуласындағы  $\rho$ -ны интеграл таңбасының сыртына шығаруға болады:



102-сурет.

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr$$

мұндағы  $R$  — диск радиусы.  $2\pi b$  тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының сыртына шығарайық:

$$I = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4}.$$

Ең ақырында,  $\rho$  тығыздығын  $b\pi R^2$  диск көлеміне көбейткенге тең  $m$  диск массасын енгізіп, мынаны аламыз:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (39.6)$$

Қарастырылып отырған мысалда инерция моментін табу, дене біртекті әрі симметриялы болғандықтан, ал инерция моментін біз симметрия осіне қатысты іздегенімізден, сдәуір жеңілденді. Егер де біз инерция моментін, мысалы, дискіге перпендикуляр және оның жиегі арқылы өтетін  $O'O'$  осіне қатысты (102-суретті қараңыздар) тапқымыз келсе, онда, сірә, оны есептеп шығару әлдеқайда күрделі болып шығар еді. Осыған ұқсас жағдайларда, егер Штейнер теоремасын пайдалансақ, онда инерция моментін табу едәуір жеңілденеді, ал бұл теорема былай тұжырымдалады: *кез келген оське қатысты  $I$  инерция моменті — берілген оське параллель және дене инерциясының центрі арқылы өтетін оське қатысты  $I_0$  инерция моменті мен дененің  $m$  массасының осьтер арасындағы  $a$  ара қашықтығының квадратына көбейтіндісінің қосындысына тең:*

$$I = I_0 + ma^2 \quad (39.7)$$

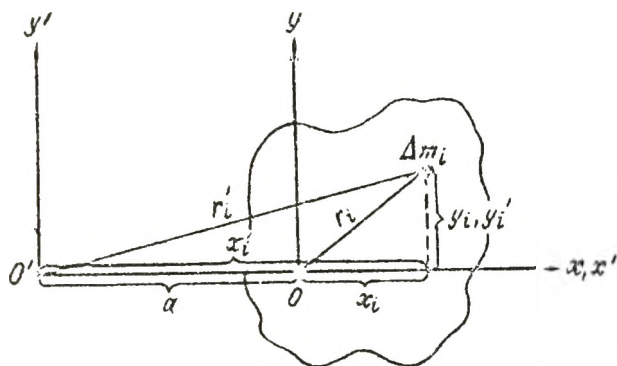
Штейнер теоремасына сәйкес  $O'O'$  осіне қатысты инерция моменті диск центрі арқылы өтетін полюсі  $mR^2$  оське қатысты (39.6) біздің тапқан инерция моментімізге тең болады ( $O'O'$  және  $OO$  осьтерінің арасындағы қашықтық диск радиусына тең).

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Сонымен, Штейнер теоремасы, кез келген оське қатысты инерция моментін есептеп шығару, шын мәнісінде, дене инерциясының центрі арқылы өтетін оське қатысты инерция моментін есептеп шығаруға келіп тіреледі.

Штейнер теоремасын дәлелдеу үшін формасы: еркін-

ше алынған денені қарастырайық (103-сурет) Бір-біріне параллель болатын екі  $OO$  және  $O'O'$  осьтерін алайық, олардың біреуі ( $OO$  осі) дененің инерция центрі арқылы өтеді. Осы осьтермен  $xuz$  және  $x'y'z'$  координата осьтерін байланыстырайық; координата осьтерін  $z$  осі  $OO$  осімен,



103-сурет.

ал  $z'$  осі  $O'O'$  осімен дәл келетіндей етіп таңдап аламыз (103-суретте осы осьтер чертеж жазықтығына перпендикуляр). Сонымен қатар  $x$  және  $x'$  осьтерін, бір-біріне дәл келетіндей және дененің инерция центрі арқылы өтетіндей етіп қалап аламыз. Сонда  $\Delta m_i$  элементар массалары координаталарының арасында келесі қатыстар орын алады:

$$x' = a + x_i; \quad y_i = y_i$$

мұндағы  $a$  — осьтердің ара қашықтығы.

$\Delta m_i$  элементар массасының  $OO$  осьтен қашықтығының квадраты мынаған тең:

$$r^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (39.8)$$

ал  $O'O'$  осьтен қашықтығының квадраты мынаған тең:

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2 \quad (39.9)$$

(39.8) қатысты есепке алғанда,  $OO$  осіне қатысты дененің инерция моменті мынадай өрнекпен анықталады:

$$I_0 = \sum r_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i, \quad (39.10)$$

ал  $O'O'$  осіне қатысты инерция моменті [(39.9) қатысты есепке алғанда] мынаған тең болады:

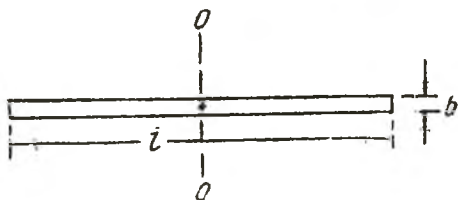
$$I = \sum r_i'^2 \Delta m_i = \sum [(a + x_i)^2 + y_i^2] \Delta m_i. \quad (39.11)$$

Жай жақшаның ішінде тұрған өрнекті квадрат дәре-

жеге шығарып, сәйкес қосылғыштарды өз ара топтастырып, (39.11) өрнегін мынадай түрге келтіруге болады:

$$I = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i. \quad (39.12)$$

(39.12) өрнегіндегі бірінші қосынды (39.10) өрнегімен теңбе-тең, яғни  $I_0$  болып есептеледі; екінші қосынды  $ma^2$  шамасын береді; ал үшінші қосындының нольге тең екендігін байқау қиын емес. Шынында да,  $z$  осі дененің инерция центрі арқылы өтетіндіктен инерция центрінің  $x_c$  координатасы нольге тең. Онымен қатар анықтама бойынша  $x_c = \frac{1}{m} \sum x_i \Delta m_i$ , бұдан  $\sum x_i \Delta m_i$ -дің де нольге тең екені шығады.



104-сурет.

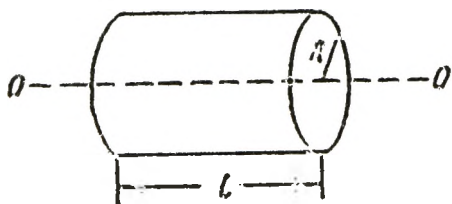
Сонымен, (39.12) өрнегі мынадай түрге келеді:

$$I = I_0 + ma^2,$$

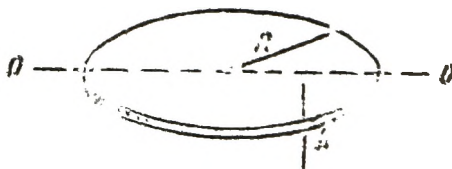
дәлелдеу керегі де осы еді [(39.7) формуланы қараныздар].

Қорытындысында кейбір денелердің инерция моменттерінің мәнін келтірейік (дене біртекті деп ұйғарылады,  $m$  — дене массасы)

1. Дене қимасы әр түрлі формадағы жіңішке ұзын стержень болып келген. Стерженьнің ең үлкен көлденең  $b$  қимасы стерженьнің  $l$  ұзындығынан көп есе кіші бо-



105-сурет.



106-сурет.

лады ( $b \ll l$ ). Стерженьге перпендикуляр және оның қақ ортасы арқылы өтетін оське қатысты инерция моменті (104-сурет) мынаған тең:

$$I = \frac{1}{12} ml^2$$

2.  $R$ -дің  $l$ -ге кез келген қатынасында дискі немесе цилиндр үшін (105-сурет) цилиндрдің геометриялық осімен дәл келетін оське қатысты инерция моменті мынаған тең:

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. Дене — жұқа диск. Дискінің қалыңдығы  $b$  дискінің  $R$  радиусынан бірнеше есе кіші болады: ( $b \ll R$ ) Дискінің диаметріне дәл келетін оське қатысты инерция моменті (106-сурет) мынаған тең:

$$I = \frac{1}{4} mR^2.$$

4. Радиусы  $R$  болатын шардың инерция моменті, оның центрі арқылы өтетін оське қатысты, мынаған тең:

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

#### § 40. Қатты дененің кинетикалық энергиясы

Дененің қозғалмайтын осьтен айналысы. Дене  $z$  осі деп аталатын қозғалмайтын осьтен айналсын дейік.  $\Delta m_i$  элементар массаның сызықтық жылдамдығын мынадай түрде көрсетуге болады:

$$v_i = R_i \omega,$$

мұндағы  $R_i$  —  $\Delta m_i$ -дің  $z$  осінен қашықтығы. Демек,  $i$ -інші элементар массаның кинетикалық энергиясы мынаған тең:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i R_i^2 \omega^2$$

Дененің кинетикалық энергиясы оның жеке бөліктерінің кинетикалық энергиясынан құралады:

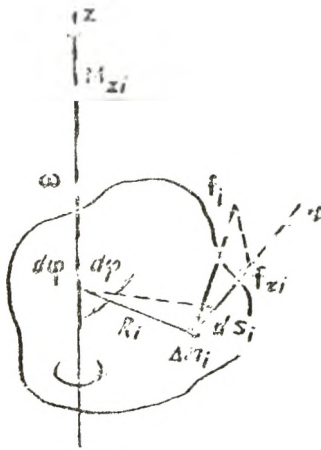
$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2$$

Осы қатыстың оң жақ бөлігіндегі қосынды айналу осіне қатысты дененің инерция моменті  $I_z$  болады. Сонымен, қозғалмайтын осьтен айналатын дененің кинетикалық энергиясы мынаған тең:

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (40.1)$$

Осыдан шыққан өрнек ілгерілемелі қозғалатын дененің  $T = \frac{mv^2}{2}$  кинетикалық энергиясына ұқсас келеді. Айналымалы қозғалыс кезінде массаның ролін инерция массасы, ал сызықтық жылдамдық ролін бұрыштық жылдамдық атқарады.

Қатты дененің айналысы кезіндегі сыртқы күштердің жұмысы. Дене қозғалмайтын  $z$  осьтен айналған кезде сыртқы күштердің істеген жұмысын табайық.  $\Delta m_i$  элементар массаға түсірілген сыртқы күшті  $f_i$  арқылы белгілейік.  $dt$  уақыты ішінде  $i$ -інші элементар масса мынадай жол жүреді (107-сурет):



107-сурет.

$$ds_i = R_i d\varphi,$$

мұндағы  $d\varphi$  — дененің  $dt$  уақыт ішінде бұрылатын бұрышы.

Осындай жол бойындағы  $f_i$  күшінің жұмысы күштің орын ауыстыру бағытындағы проекциясымен анықталады, ол проекцияны  $f_{\tau i}$  символымен белгілеуге болады ( $\tau$ -інші элементар масса қозғалатын шеңберге жүргізілген жанаманың бірлік векторы; осы вектордың бағыты берілген моментте орын ауыстыру бағытымен дәл келеді).

Сонымен,

$$dA_i = f_{\tau i} ds_i = f_{\tau i} R_i d\varphi.$$

Бірақ  $f_{\tau i} R_i$  шамасы  $z$  осіне қатысты  $f_i$  күш моментінің модулына тең, яғни, егер  $f_{\tau i}$  оң болса, «+» таңбасымен, ал  $f_{\tau i}$  теріс болса «-» таңбасымен алынған  $|\dot{M}_{zi}|$  модулына тең болады [(36.10) формуласын қараңыздар; бұл формуладағы  $f_{\tau}$  проекция емес, ол  $f_{\tau}$  күшінің модулы]. Демек,

$$dA_i = \pm |\dot{M}_{zi}| d\varphi. \quad (40.2)$$

Бұрылыстың элементар бұрышын аксиаль вектор ретінде қарастыруға болады:

$$d\varphi = \omega dt.$$

Егер  $\dot{M}_{zi}$  векторының бағыты  $d\varphi$  бағытындай болса,  $dA_i$  жұмысы оң, ал  $\dot{M}_{zi}$  және  $d\varphi$  векторларының бағыты қарама-қарсы болса,  $dA_i$  жұмысы теріс таңбалы болатындығын ұғыну қиын емес. Сондықтан (40.2) формуласы мынадай түрге келеді:

$$dA_i = \dot{M}_{zi} d\varphi.$$

Денеге түсірілген барлық күштердің жұмысы жеке күштердің істейтін жұмысының қосындысына тең:

$$dA = \sum dA_i = \sum \dot{M}_{zi} d\varphi = \left( \sum \dot{M}_{zi} \right) d\varphi.$$

Жақшада тұрған қосынды денеге түсірілген барлық сыртқы күштердің айналу осіне қатысты  $M_z$  қорытқы моментін береді. Демек,

$$dA = M_z d\varphi^1 \quad (40.3)$$

Бұл өрнек ілгерілемелі қозғалыс кезінде істелетін жұмысқа арналған өрнекке ұқсас:  $dA = \mathbf{F} ds$ . Осыларды салыстырудан мынау шығады: айналыс жағдайында күш ролін күш моменті, ал  $ds = v dt$  сызықтық орын ауыстырудың ролін  $d\varphi = \omega dt$  бұрыштық орын ауыстыру атқарады.

Жұмысты іс жүзінде есептеп шығару үшін мынадай өрнек пайдаланады:

$$dA = M_\omega d\varphi = M_\omega \omega dt, \quad (40.4)$$

мұнда  $M_\omega$  деп сыртқы күштердің  $\omega$  векторы бағытында денеге түсірілген қорытқы моменттерінің проекциясын ұғамыз. Шектеулі уақыт аралығындағы жұмыс (40.4) өрнегін интегралдау арқылы табылады:

$$A = \int dA = \int_0^\varphi M_\omega d\varphi = \int_0^t M_\omega \omega dt. \quad (40.5)$$

Егер  $\omega$  бағытындағы күштің қорытқы моментінің проекциясы тұрақты болып қалса, онда оны интеграл таңбасының сыртына шығаруға болады:

$$A = M_\omega \int_0^\varphi d\varphi = M_\omega \varphi \quad (40.6)$$

( $\varphi$  — дененің  $t$  уақыты ішінде бұрылатын бұрышы)

Жазық қозғалыстағы дененің кинетикалық энергиясы. Біздің 34-параграфта баяндағанымыздай, дененің жазық қозғалысын екі қозғалыстың — біршама  $v_0$  жылдамдығымен қозғалатын ілгерілемелі қозғалыс пен тиісті осьтен айналатын айналмалы қозғалыстың — қабаттасуы ретінде көрсетуге болады. Координата системасын

<sup>1</sup> Элементар массаларға түсірілген  $F_i$  ішкі күштері туралы пікірді қайталай отырып, біз мынадай формулаға тоқтайық:

$$dA = M_z d\varphi,$$

мұндағы  $M_z$  — барлық ішкі күштердің қорытқы моменті. Бұл моменттің нольге тең екендігін біз бұрыннан білеміз (36-параграфтың соңғы абзацын қараңыздар). Демек, дененің айналу кезіндегі ішкі күштердің қосынды жұмысы нольге тең болады екен.



денемен байланыстырайық та, осы системаның  $z'$  осін дөпе айналысының бұрыштық жылдамдығының  $\omega$  векторымен бағыттайық. (33.13) формуласына сәйкес дененің  $i$ -інші элементар массасының жылдамдығын қозғалмайтын  $K$  координата системасында мынадай түрде көрсетуге болады:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}_i],$$

мұндағы  $\mathbf{v}_0$  —  $K'$  жүйесінің  $O'$  координата басының жылдамдығы,  $\mathbf{r}_i$  —  $O'$  нүктесіне қатысты элементар массасының орнын анықтайтын радиус-вектор.

$i$ -інші элементар массаның кинетикалық энергиясы мынаған тең<sup>1</sup>:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta m_i \{ \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}_i] \}^2.$$

Квадрат дәрежеге шығаруды орындап, мынаны аламыз:

$$\Delta T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \{ v_0^2 + 2\mathbf{v}_0 [\omega, \mathbf{r}_i] + [\omega, \mathbf{r}_i]^2 \}. \quad (40.7)$$

$\omega$ -ның  $\mathbf{r}_i$ -ге векторлық көбейтіндісін, біздің бұрынғы білетініміздей,  $\omega$ -ның  $\mathbf{R}_i$ -ге векторлық көбейтіндісімен —  $\mathbf{r}_i$  радиус-вектордың  $z'$  осіне перпендикуляр құраушысына алмастыруға болады [(11.4) формуланы және онан кейінгі тексті қараңыздар]. Осы векторлық көбейтіндінің модулы  $\omega R_i$ -ге тең ( $\omega$  мен  $\mathbf{R}_i$  өз ара перпендикуляр). Демек,  $[\omega, \mathbf{r}_i]^2 = \omega^2 R_i^2$ . Осы мәнді (40.7) өрнегіне қоя отырып,  $\Delta T_i$ -ді барлық элементар масса бойынша қосындылайық. Осының нәтижесінде дененің кинетикалық энергиясын шығарып аламыз:

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i v_0^2 + \sum \mathbf{v}_0 [\omega, \Delta m_i \mathbf{r}_i] + \frac{1}{2} \sum \omega^2 \Delta m_i R_i^2$$

Барлық жердегі тұрақты көбейткіштерді қосындының сыртына шығарайық:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum \Delta m_i + \mathbf{v}_0 \left[ \omega, \sum \Delta m_i \mathbf{r}_i \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2$$

(теңдіктің оң жақ бөлігіндегі екінші қосылғышты түрлендірген кезде біз векторлық және скалярлық көбейтіндінің дистрибутивтілігін пайдаландық).

Элементарлық массаның  $\sum \Delta m_i$  қосындысы — дененің

<sup>1</sup> Вектордың квадраты оның модулының квадратына тең екенін ескерге кетейік:  $\mathbf{v}_i^2 = v_i^2$ .

$m$  массасы.  $\sum \Delta m_i r_i$  өрнегі дене массасы мен  $K'$  системасындағы дененің инерция центрінің  $r_c$  радиус-векторының көбейтіндісіне тең [(23.1) формуланы қараңыздар]. Ең ақырында,  $\sum \Delta m_i R_i^2$  өрнегі  $z'$  айналу осіне қатысты дененің  $I_z$  инерция моментін береді. Сондықтан мынаны жазуға болады:

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + v_0[\omega, m r_c] + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (40.8)$$

Бұл өрнекті  $O'$  нүктесі ретінде  $C$  денесінің инерция центрін алып, яғни  $K'$  координата системасының басын  $C$  нүктесіне орналастырып, оңайлатуға болады. Бұл жағдайда  $r_c = 0$ , демек, екінші қосылғыш жойылып кетеді. Сондықтан, инерция центрінің орталығын  $v_c$  арқылы, ал  $C$  нүктесі арқылы өтетін айналу осіне қатысты дененің инерция моментін  $I_c$  арқылы белгілеп, дененің кинетикалық энергиясының формуласын шығарып аламыз:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}. \quad (40.9)$$

Сонымен, жазық қозғалыстағы дененің кинетикалық энергиясы жылдамдығы инерция центрінің жылдамдығына тең ілгерілемелі қозғалыстың энергиясынан және дененің инерция центрі арқылы өтетін осьтен айналатын айналыс энергиясынан құралады.

#### § 41. Қатты дене динамикасының заңдарын қолдану

Алдыңғы параграфтарда дәлелденгендей, қатты дененің қозғалысы мына екі теңдеуге сәйкес келеді [(35.5) және (38.5) теңдеулерді қараңыздар]:

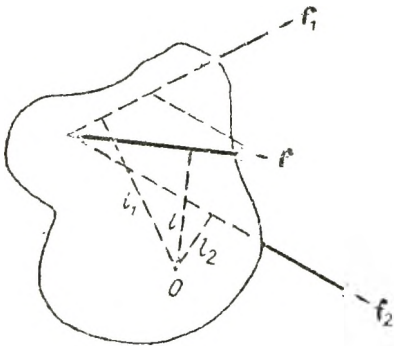
$$m \dot{v}_c = \sum f_i, \quad (41.1)$$

$$I \dot{\omega} = \sum M_i \quad (41.2)$$

Демек, дененің қозғалысы денеге әсер ететін сыртқы күштерімен және осы күштердің  $M_i$  моменттерімен анықталады. Күш моменттерін кез келген қозғалмайтын оське немесе үдеусіз қозғалатын оське қатысты алуға болады ( $I$  инерция моменті де сол оське қатысты алынады). Үдеумен қозғалатын оське қатысты сыртқы күштердің моменттерін алсақ, біз шын мәнісінде, инерциялы емес санақ системасындағы (41.2) теңдеуін жазған бо-

лар едік. Бұл жағдайда денеге түсірілген сыртқы күштерден басқа, сондай-ақ инерция күштері мен олардың моменттерін де ескеру керек.

Денеге әсер ететін  $f_i$  күші түсірілген нүктені олар әсер ететін сызықтың бойымен көшіруге болады, өйткені бұл жағдайда  $\sum f_i$  қосындысы да,  $M_i$  моменті де өзгермейді (күшті оның әсер ететін сызығының бойымен тасымалдағанда оның иіні кез келген нүктеге қатысты өзгермейді) Осындай тасымалдауды жүзеге асыра отырып, бірнеше күштерді оларға дене қозғалысына ықпал ету жөнінде эквивалент болатын бір күшпен алмастыруға болады. Мысалы, бір жазықтықта жататын екі  $f_1$  және  $f_2$  күшін (108-сурет) оларға эквивалент болатын  $f$  күшімен алмастыруға болады, сондай-ақ  $f$  күшінің түсу нүктесін осы күш әсер ететін бағыттың бойында еркінше тандап алуға болады.



108-сурет.

Денеге әсер ететін параллель күштердің жиынтығын барлық күштердің қосындысына тең, моменті жеке күш моменттерінің қосындысына тең болатындай дене нүктесіне түсірілген тең әсерлі күшпен алмастыруға болады.

Ауырлық күштің тең әсерлі күшін табайық. Ауырлық күші қатты дененің барлық элементтеріне түседі, сонымен қатар  $\Delta m_i$  элементар массаға әсер ететін күш  $\Delta m_i g$ -ге тең. Бұл күштердің қосындысы  $p = mg$ -ге тең. Кез келген  $O$  нүктесіне қатысты ауырлық күшінің қосынды моменті мынаған тең:

$$M = \sum [r_i, (\Delta m_i g)],$$

мұндағы  $r_i$  —  $O$  нүктесіне қатысты  $\Delta m_i$ -дің орнын анықтайтын радиус-вектор.  $\Delta m_i$  скаляр көбейткішін екінші көбейткіштен біріншіге көшіріп және  $g$  ортақ көбейткішін қосынды таңбасының сыртына шығарып, мынаны табамыз:

$$M = [(\sum \Delta m_i r_i), g].$$

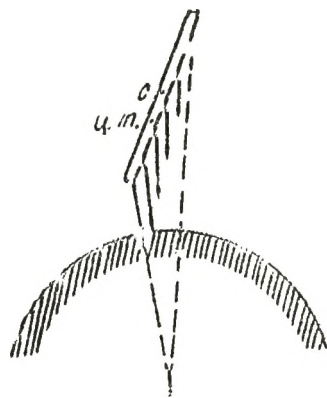
Бірақ жай жақшаның ішінде тұрған қосынды  $m$  дене массасының  $C$  инерция центрінің  $r_c$  радиус-векторына көбейтіндісіне тең. Сондықтан

$$M = [(mrc) \cdot g] = [rc \cdot (mg)] = [rc, P], \quad (41.3)$$

яғни кез келген нүктеге қатысты ауырлық күшінің қосынды моменті  $C$  нүктесіне түсірілген  $mg$  күшінің моментіне дәл келеді.

Сонымен, ауырлық күшінің тең әсерлі күші  $p = mg$ -ге тең және ол дененің инерция центріне түсірілген.

(41.3) формуласынан инерция центріне қатысты ауырлық күшінің моменті нольге тең екендігі шығады (бұл жағдайда  $rc = 0$ ). Өзіне қатысты ауырлық күш моменті нольге тең болатын нүкте дененің ауырлық центрі деп аталады. 23-параграфта атап көрсеткеніміздей, ауырлық центрі дененің инерция центріне дәл келеді. Шындығында, мұндай пікір, ауырлық күшінің өрісі берілген дененің шегінде біртекті деп есептеуге болатын, яғни әр түрлі элементар массаларға түсірілген күштердің бағыттары бірдей әрі массаға пропорционал болатын жағдайда ғана дұрыс болады. Бұл шарт өлшемдері жер шарының өлшемдерінен әлдеқайда кіші денелер үшін орындалады. Егер өлшемі Жер өлшемімен салыстырылатын болса, шынын айтқанда, ауырлық центрі инерция центріне дәл келмейді. Мұны жай мысалмен түсіндірейік. Біртекті ұзын стержень Жер маңында тұр делік (109-сурет). Стерженьді суретте көрсетілген қалыпта орналастырғанда оның әр түрлі элементтеріне түсірілген ауырлық күштері шамамен параллель болады. Ал теңдес элементтерге түсірілген күш шамасы Жерден қашықтығына қарай  $1/r^2$  заңы бойынша өзгереді ( $r$  — элементтің Жер центрінен қашықтығы). Бұл жағдайда ауырлық центрінің инерция центріне қатысты стерженьнің Жерге жақынырақ ұшына қарай ығысатындығы сөзсіз.



109-сурет.

Инерциялы системаға қатысты ілгерілемей қозғалыс жасайтын инерциялы емес санақ системасындағы дене қозғалысын қарастырған кезде енгізілетін инерция күші де ауырлық күшіндегідей қасиетке (біртекті өрісі жағдайында) ие болады. Шынында, элементар массаға түсірілген инерция күші —  $\Delta m_i w_0$  шамасына тең, яғни бағыты бірдей және массаға пропорционал болады (іл-

герілемелі қозғалыс жасайтын инерциялы емес системаның барлық нүктелері үшін  $w_0$  бірдей болады) Бізді (41.3) формулаға келтірген пікірді қайталай отырып, инерцияның қорытқы күші —  $mw_0$  ( $m$  — дене массасы) шамасына тең және ол күштің инерциялы центріне түсірілгендігін көрсетуге болады.

Ілгерілемелі қозғалыс жасайтын инерциялы емес санақ системасымен байланысқан және дененің инерция центрі арқылы өтетін оське (яғни инерциялы системада ілгерілемелі қозғалыс жасайтын оське) қатысты инерция күшінің моменті нольге тең (бұл жағдайда, біздің жоғарыда көргеніміздей, инерцияның қорытқы күші инерция центріне түсірілген). Сондықтан (41.2) теңдеуін, инерция күшін ескермей-ақ, осындай оське қатысты жазуға болады. Инерция центрі арқылы өтетін және инерциялы санақ системасына қатысты өз бағытын өзгертпейтін (бұрылмайтын) ось жөнінде ғана осылай істеуге болатындығын тағы да ескерте кетейік. Жазық қозғалыс кезіндегі осындай ось инерция центрі арқылы өтетін және қозғалысы болатын жазықтыққа перпендикуляр ось болады.

**Қатты дененің тепе-теңдік шарты.** Егер ілгерілемелі қозғалысты немесе айналысты тудыратын себеп болмаса, онда мұндай жағдайда дене тыныштық күйде қала береді. Бұл үшін (41.1) және (41.2) теңдеулеріне сәйкес мынадай екі шарттың:

1) денеге түсірілген барлық сыртқы күштердің қосындысы нольге тең болуға тиіс:

$$\sum F_i = 0, \quad (41.4)$$

2) кез келген қозғалмайтын оське қатысты сыртқы күштердің қорытқы моменті нольге тең болуға тиіс:

$$\sum M_i = 0 \quad (41.5)$$

деген шарттардың орындалуы қажет және жеткілікті болады.

Практика жүзінде (41.5) шартының бір жазықтықта жатпайтын және қозғалмайтын кез келген үш ось үшін (мысалы,  $x$ ,  $y$  және  $z$  координата осьтері үшін) орындалуы жеткілікті екен. Сонда ол шарт кез келген басқа осьтер үшін де орындалатын болады.

(41.4) және (41.5) қатыстары қатты дененің тепе-теңдік шарттары болып табылады.

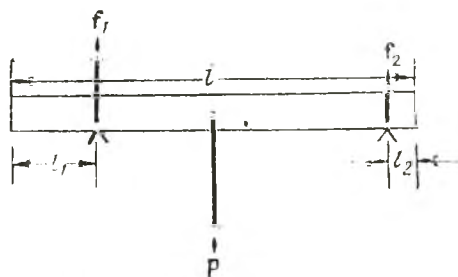
## Қатты дене механикасының заңдарын қолдануға арналған мысалдар

**1-мысал.** Екі тіректе жатқан біртекті балка берілген (110-сурет) Тіректің  $f_1$  және  $f_2$  реакцияларын анықтау керек.

Ауырлық күшінің тең әсерлі күші  $P$ -ге тең және ол инерция центріне түсірілген. Сонда балка қозғалмайды. Сондықтан (41.4) қатысына сәйкес  $P$   $f_1$  және  $f_2$  күштерінің қосындысы нольге тең болуға тиіс. Осыдан мынау шығады:

$$P = f_1 + f_2,$$

мұндағы  $P$   $f_1$  және  $f_2$  — өздеріне сәйкес күштердің модульдары.



110-сурет.

Сондай-ақ, кез келген оське қатысты күштердің балкаға әсер ететін барлық қорытқы моменттері де нольге тең болуға тиіс [(41.5) қатысты қараңыздар]. Дербес жағдайда, тіректің сол жақтағы нүктесіне қатысты момент нольге тең болуға тиіс, сонда:

$$P \left( \frac{l}{2} - l_1 \right) = f_2 (l - l_1 - l_2).$$

Сонымен, біз  $f_1$  және  $f_2$  күш модульдары белгісіз екі тендеу таптық. Оларды шешіп, мынаны табамыз:

$$f_1 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)};$$

$$f_2 = \frac{P}{2} \frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}.$$

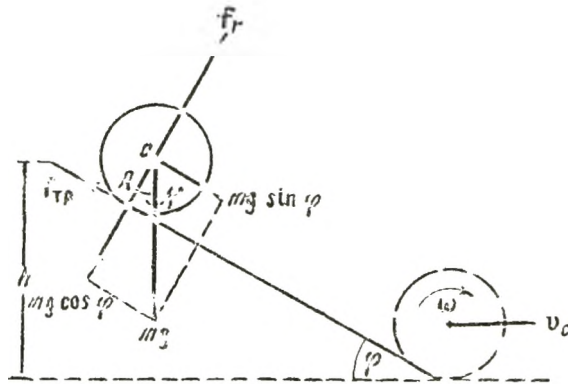
**2-мысал.** Радиусы  $R$  және массасы  $m$  біртекті цилиндр көлбеу жазықтықтан сырғымай домалайды. Жазықтықтың көлбеу бұрышы  $\varphi$ -ге тең (11-сурет), ал биіктігі  $h$  ( $h \gg R$ ). Цилиндрдің бастапқы жылдамдығы нольге тең. Цилиндр айналысының инерция центрінің жылдамдығын және бұрыштық жылдамдығының цилиндрдің горизонталь учаскеге шыққан мезетінде табу керек.

Оны шешудің екі вариантын қарастырайық.

Шешудің 1 тәсілі. Цилиндр үш күштің әсерімен қозғалады:  $P = mg$ ,  $f_{yH}$  — үйкеліс күші және көлбеу

жазықтықтың  $f_r$  реакциясы.  $f_r$  реакциясы, Ньютонның үшінші заңына сәйкес, шамасы  $mg \cos \varphi$  болатын  $P$  күшінің нормаль құраушысының модулына тең.

Цилиндр мен көлбеу жазықтықтың арасындағы үйкеліс олардың жанасу нүктелерінде пайда болады. Цилиндрдің осы нүктелері (олар айналыстың лездік осін түзеді) уақыттың әрбір моментінде қозғалмайтын болғандықтан, біздің сөз етіп отырған үйкеліс күшіміз тыныштық үйкеліс күші болады. 19-параграфта белгілі болғанындай, тыныштық үйкеліс күшінің шамасы нольден  $f_0$  мәнінің максимумына дейінгі аралықта болады, ал



111-сурет.

$f_0$ -дің мәні үйкеліс коэффициентінің бір-біріне жанасатын денелерді қысып тұратын нормаль қысым күшіне көбейтіндісімен анықталады ( $f_0 = kmg \cos \varphi$ ). Бұл жағдайда үйкеліс күші сырғанау болмайтындай мағынада қабылданады. Жанасу нүктелерінің сызықтық жылдамдығы нольге тең болған жағдайда және өз кезегінде инерция центрінің  $v_c$  жылдамдығы уақыттың әрбір мезетінде цилиндр айналысының  $\omega$  бұрыштық жылдамдығы мен цилиндрдің  $R$  радиусының көбейтіндісіне

$$v_c = \omega R \quad (11.6)$$

тең болатын шарт орындалған жағдайда, цилиндрдің жазықтық бойымен тербелуі кезінде сырғанау пайда болмайды.

Алдыңғыға сәйкес инерция центрінің  $\omega_c$  үдеуі  $\beta$  бұрыштық жылдамдықты  $R$ -ге көбейткенге тең:

$$\omega_c = \beta R. \quad (11.7)$$

Егер осы шарттарды сақтауға қажетті  $f_{\text{н}}$  үйкеліс күші  $f_0 = kmg \cos \varphi$ -дің максимум мәнінен артып кетпесе,

онда цилиндр сырғанамай домалайтын болады. Олай болмаған жағдайда сырғанамай домалау мүмкін емес.

Сырғанамаған кезде<sup>1</sup> қозғалу бағыты проекцияланған (41.1) теңдеуінің түрі мынадай болады:

$$m\omega_c = mg \sin \varphi - f_{\gamma\text{н}}. \quad (41.8)$$

Цилиндр осіне қатысты жазылған (41.2) теңдеуінде тек үйкеліс күшінің моменті ғана нольден өзгеше болады. Ал басқа күштер, оның ішінде инерцияның қорытқы күшінің цилиндр осі арқылы өтетін бағыттары болады, осының салдарынан олардың осы оське қатысты моменттері нольге тең. Сонымен, (40.2) теңдеуі былай жазылады:

$$I\beta = Rf_{\gamma\text{н}} \quad (41.9)$$

мұндағы  $I$  — цилиндрдің өз осіне қатысты инерция моменті, ол тұтас біртекті цилиндр үшін  $\frac{1}{2}mR^2$  шамасына тең болады.

(41.8) және (41.9) теңдеулерінде үш белгісіз шама бар:  $f_{\gamma\text{н}}$ ,  $\beta$  және  $\omega_c$ . Бірақ соңғы екі шаманың арасында сырғанаудың жоқтығынан шығатын (41.7) байланысы болады. (41.7) және (41.9) теңдеулерді бірге шешіп ( $I = \frac{1}{2}mR^2$  екенін ескере отырып), мынаны табамыз:

$$f_{\gamma\text{н}} = \frac{1}{3}mg \sin \varphi, \quad (41.10)$$

$$\omega_c = \frac{2}{3}g \sin \varphi, \quad (41.11)$$

$$\beta = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \sin \varphi. \quad (41.12)$$

Енді, біз цилиндрдің сырғанамай домалайтындығын қамтамасыз ететін (41.10) тыныштық үйкеліс күшінің шамасын біле отырып, осындай домалаудың мүмкін болатын шартын анықтауға болады. Сырғанамай домалау үшін (41.10) күші біздің бұрыннан білетініміздей,  $kmg \cos \varphi$  шамасына тең  $f_0$  тыныштық үйкеліс күшінің максимум мәнінен артпауға тиіс:

$$\frac{1}{3}mg \sin \varphi \leq kmg \cos \varphi.$$

Осыдан мынау шығады:

$$\operatorname{tg} \varphi \leq 3k.$$

<sup>1</sup> Цилиндр сырғанаған кезде (41.8) теңдеуіндегі  $f_{\gamma\text{н}}$  күші тыныштық үйкеліс күші емес, сырғанау үйкеліс күші болады.



Егер көлбеу жазықтықтың  $\varphi$  тангенс бұрышы цилиндр мен жазықтық арасындағы тыныштық үйкеліс коэффициентінің үш еселенген мәнінен асып кетсе, онда цилиндр үйкеліссіз домалай алмайды.

(41.11) теңдеуінен цилиндр инерция центрінің бір қалыпты үдемелі қозғалатындығы келіп шығады.  $\omega_C$  үдеуін біле отырып, цилиндрдің  $t_g$  домалау уақытын, яғни цилиндрдің  $h/\sin \varphi$  шамасына тең жүретін жолының уақытын табуға болады. Бұл жол  $\omega_C$  және  $t_g$  шамаларымен мынадай қатыспен байланысқан:

$$\frac{h}{\sin \varphi} = \frac{\omega_C t_g^2}{2},$$

осыдан,  $\omega_C$  үшін (41.11) мәнін қойып, мынаны аламыз:

$$t_g = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Бұл уақытта  $\omega_C$  сияқты, цилиндрдің массасы мен радиусына тәуелді емес<sup>1</sup>; ол тек жазықтықтың көлбеу  $\varphi$  бұрышы мен оның  $h$  жиегі деңгейлерінің айырымымен ғана анықталады.

Цилиндр горизонталь учаскеге шыққан кезде инерция центрінің жылдамдығы мынаған тең:

$$v_C = \omega_C t_g = \sqrt{\frac{4}{3} gh},$$

ал цилиндрдің бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \beta t_g = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} gh}.$$

Күш түсірілген цилиндр нүктелері уақыттың әрбір моментінде қозғалмайтындықтан (41.10) үйкеліс күші цилиндрге жұмыс істете алмайтынын ескерте кетелік.

Егер цилиндрге алдын ала біршама ілгерілемелі қозғалыс және соған сәйкес (сырғанау пайда болмайтындай) бұрыштық жылдамдық берілсе, онда горизонталь ( $\varphi=0$ ) жазықтықта (41.11) және (51.12) формулалары бойынша осы цилиндр үдеусіз қозғалатын болады. Шынында да, қозғалыс баяу болады. Мұндай баяулыққа тербелудің үйкеліс күші себепші болады, оның моменті  $\varphi$  бұрыштық жылдамдығын азайтатындай және күштің өзі соған сәйкес (тағы да сырғанау пайда болмайтын-

<sup>1</sup> Бұл тек біртекті тұтас цилиндр үшін ғана орын алады.

дай) инерция центрінің баяулығын тудыратындай болып бағытталған. Тербелу үйкеліс күші домалайтын денеге теріс жұмыс істейді.

Цилиндрдің көлбеу жазықтықтан домалауы туралы есепті шешкенде біз тербелу үйкелісін елемедік.

Шешудің 2 тәсілі. Үйкеліс күші жұмыс істемейтін болғандықтан (тербелу үйкелісін елемейміз), цилиндрдің толық энергиясы тұрақты болып қалады. Бастанқы мезетте кинетикалық энергия нольге тең, ал потенциалдық энергия  $mgh$ -қа тең. Домалаудың ақырында потенциалдық энергия нольге тең болады, оның есесіне мынаған тең [(40.9) формуласын қараңыздар] кинетикалық энергия пайда болады:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}.$$

Цилиндр сырғанамайтын болғандықтан,  $v_C$  және  $\omega$  шамалары  $v_C = \omega R$  қатысымен байланысқан. Кинетикалық энергияға арналған өрнекке  $\omega = \frac{v_C}{R}$  және  $I_C = \frac{1}{2}mR^2$  шамаларын қойып, мынаны шығарып аламыз:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

Цилиндрдің домалауының басы мен аяғындағы толық энергиясы бірдей болуға тиіс:

$$\frac{3}{4}mv_C^2 = mgh,$$

осыдан:

$$v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

ал бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

3-мысал. Массасы  $m$  денеге өте қысқа  $\Delta t$  уақыты аралығы ішінде  $f$  тұрақты күші әсер етеді.  $\Delta t$  уақыт аралығынан басқа, уақыттың барлығында да оған ешбір дене әсер етпейді. Денеге  $f\Delta t$  импульсы берілгенге дейін ол тыныш қалыпта тұрады. Күштің әсері тоқталғаннан кейін дененің қалай қозғалатындығын анықтау керек.

Бұл жағдайда (41.1) теңдеуінің түрі мынадай болады;

$$mv_C = f,$$

осыдан

$$w_c = \frac{1}{m} f \quad (41.13)$$

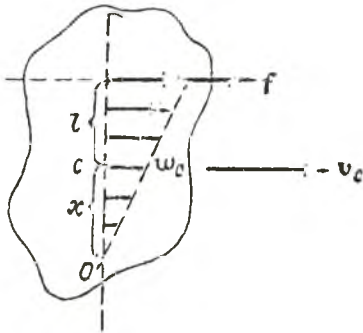
Демек, күш әсер етіп тұрғанда, дененің инерция центрі күштің әсер ететін бағытында бір қалыпты үдемелі қозғалыс жасайды.

Инерция центріне қатысты  $f$  күш иінін  $l$  әрпімен белгілейік (112-сурет).  $C$  инерция центрі арқылы, өн бойымен күш әсер ететін сызық және дененің инерция центрі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр болатындай  $OO$  осін жүргізейік. Осы оське қатысты (41.2) теңдеуінің түрі мынадай болады:

$$I_c \beta = M,$$

мұндағы  $I_c$  — дененің  $OO$  осіне қатысты инерция моменті, ал  $M = fl - f$  күшінің сол оське қатысты моменті. Осы теңдеуді  $\beta$ -ға қатысты шешіп, мынаны табамыз:

$$\beta = \frac{M}{I_c} = \frac{fl}{I_c}. \quad (41.14)$$



112-сурет.

Сонымен, күш әсер етіп тұрғанда  $\Delta t$  уақытының ішінде дене былай қозғалады: оның инерция центрі күш әсер ететін бағытта (41.13) тұрақты үдеуімен түзу сызықты қозғалыс жасайды және сонымен қабат инерция центрі

арқылы өтетін осьтен дене (41.14) тұрақты бұрыштық жылдамдығымен айналады.  $\Delta t$  уақыты аралығының соңында инерция центрі жылдамдығының мәні мынаған жетеді:

$$v_c = w_c \Delta t = \frac{f \Delta t}{m}.$$

ал бұрыштық жылдамдығы мынаған тең болады:

$$\omega = \beta \Delta t = \frac{M \Delta t}{I_c} = \frac{fl \Delta t}{I_c}.$$

$v_c$  мен  $\omega$ -ның біз тапқан мәндері әсер ететін күш тоқталғаннан кейінгі дененің қозғалысын анықтайды.

Күштің әсер еткен уақытының ішінде күштің  $l$  иінін барлық  $\Delta t$  уақыты аралығының ішінде дәлдігі жетерліктей дәрежеде тұрақты болатындай дене күш әсер еткен

уақыт ішінде аз ғана бұрышқа бұрылатын жағдайда ғана алдыңғы алынған нәтиже дұрыс болады.

$C$  инерция центрінен

$$\omega x = v_C. \quad \text{яғни} \quad \beta x = \omega_C \quad (41.15)$$

шартымен анықталатын  $x$  қашықтығында жататын  $O'$  нүктесінің жылдамдығы нольге тең болатынын (112-сурет) оңай көруге болады. Демек,  $O$  нүктесі арқылы өтетін ось айналыстың лездік осі болады. Біздің  $\omega_C$  және  $\beta$  үшін тапқан өрнегімізді (41.15) шартына қойып, мынаны табамыз:

$$x = \frac{I_C}{ml}.$$

Күштің әсер етуі нәтижесінде дене кинетикалық энергия алады:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{f \Delta t}{m} \right)^2 + \frac{I_C}{2} \left( \frac{f l \Delta t}{I_C} \right)^2 = \frac{I_C + ml^2}{2ml} (f \Delta t)^2.$$

$T$ -нің  $l$ -ге тәуелділігі былай түсіндіріледі: күш түсірілген нүктенің  $\Delta t$  уақыты ішінде жүрген жолы  $l$  өскен сайын арта түседі, сондықтан денеге әсер еткен күшпен істелетін жұмыс та артады.

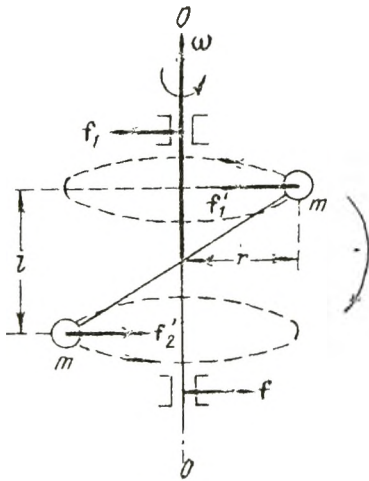
## § 42. Еркін осьтер. Инерцияның бас осі

Егер қандай да болсын денені кез келген осьтен айналысқа келтіріп, содан кейін өзінің еркінше қойсақ, онда кеңістіктегі айналу осінің орны, жалпы алғанда, өзгереді: инерциялы санақ системасына қатысты ось не бұрылады, не орын ауыстырады. Дененің еркін алынған айналу осін өзгеріссіз қалыпта ұстап тұру үшін, оған белгілі бір күш түсіру керек.

Мысалы, егер дене 113-суреттегідей формада болса және ол  $OO$  осінен  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналса, онда айналыс осін қозғалмайтындай етіп тұру үшін, оған  $M = m\omega^2 rl$  айналдырушы моментін қамтамасыз ететін күш түсіру қажет. Шынында да, радиусы  $r$  шеңбер бойымен  $m$  массасының қозғалысын жүзеге асыру үшін оған әрқайсысы  $m\omega^2 r$ -ге тең болатын  $f_1$  және  $f_2$  күштері түсірілуіне тиіс. Бұл күштер  $M = m\omega^2 rl$  моментімен қос күштер түзеді. Егер оське тиісті  $f_1$  және  $f_2$  күштерімен

<sup>1</sup> Бұл күштердің бағыттары дененің осьтен бұрылуына байланысты өзгертін болады.

әсер ететін, мысалы, подшипниктердегі осьті орнықтырып, осындай момент тудырмаса, онда айналу осі стрелкамен көрсетілген бағытта бұрылады.



113-сурет.

Егер  $m$  массасын байланыстыратын стержень  $OO$  айналу осіне перпендикуляр болса және масса осьтен әр түрлі  $r_1$  және  $r_2$  қашықтықтарында болса (114-сурет), онда осьтердің кеңістікте орын ауыстыруын болдырмау үшін подшипниктер оське бірдей бағытталған  $f_1$  және  $f_2$  күштерімен әсер етуге тиіс, ал осы күштердің модульдарының қосындысы центрге тартқыш  $f'_1$  және  $f'_2$  күштері модульдарының айырымына тең:

$$f_1 + f_2 = m\omega^2(r_1 - r_2)$$

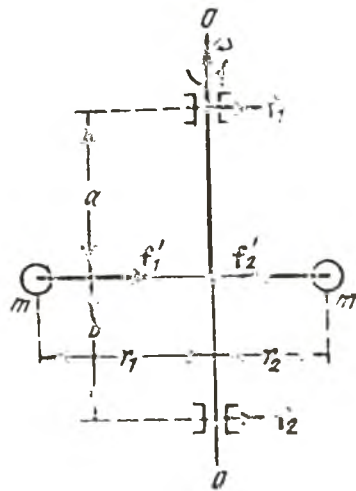
( $a$  және  $b$  кесінділері тең болғанда  $f_1$  және  $f_2$  күштері шамасы бойынша бірдей болады; олай болмаған жағдайда  $f_1 a = f_2 b$  шарты орындалуға тиіс).

Сырттан қандай да болсын күш әсер етпейінше өз қалпын кеңістікте сақтап қалатын айналу осі дененің еркін осі деп аталады. 114-суретте кескінделген жағдайда,  $r_1 = r_2$  болғанда  $OO$  осі еркін ось болатындығы сөзсіз.

Кез келген дене үшін осьтері еркін осьтер бола алатын дененің инерция центрі арқылы өтетін өз ара перпендикуляр бар екендігін дәлелдеуге болады; олар дененің инерциясының бас осі деп аталады.

Біртекті параллелепипедте (115-сурет) инерцияның бас осьтері оның қарама-қарсы жақтарының центрлері арқылы өтетін  $O_1O_1$ ,  $O_2O_2$  және  $O_3O_3$  осьтері болатындығы сөзсіз.

Осьтік симметриясы болатын денеде (мысалы, бір-

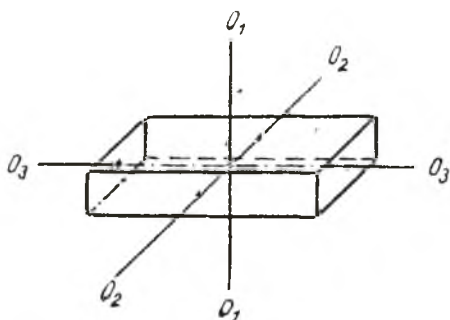


114-сурет.

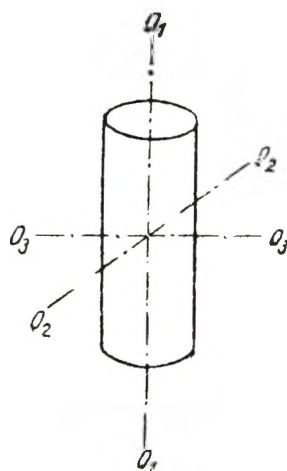
текті<sup>1</sup> цилиндрде) инерцияның бас осьтерінің біреуі симметрия осі болады, ал басқа екі осі ретінде симметрия осіне перпендикуляр жазықтықта жатқан және дененің инерция центрі арқылы өтетін, өз ара перпендикуляр кез келген екі осьті алуға болады (116-сурет). Сонымен, осьтік симметриясы бар денеде инерцияның бас осьтерінің тек біреуі ғана белгіленген.

Тығыздығы тек центрден қашықтығына ғана байланысты болатын, центрлік симметриясы бар денеде, яғни шарда инерцияның бас осьтері инерция центрі арқылы өтетін, өз ара перпендикуляр кез келген үш ось болады. Сондықтан инерцияның бас осьтерінің бірде-біреуі белгіленбеген.

Дененің бас осьтерге қатысты инерция моменті жалпы жағдайда түрліше болады:  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . Осьтік симметриясы бар дене



115-сурет.



116-сурет.

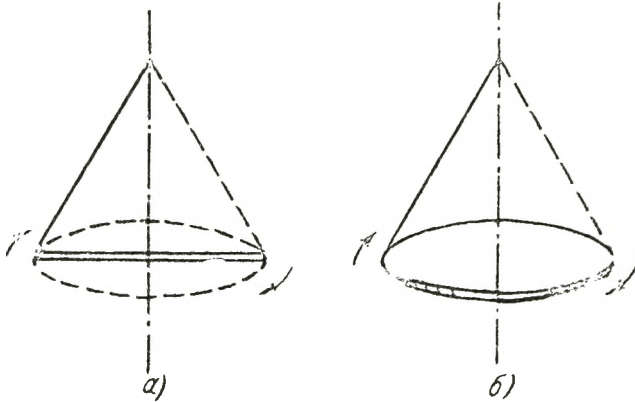
үшін екі инерция моментінің шамасы бірдей, ал үшіншісі, жалпы айтқанда, олардан өзгеше болады:  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Ең ақырында, дененің центрлік симметриясы болған жағдайда барлық үш момент те бірдей болады:  $I_1 = I_2 = I_3$ .

Егер дене қандай да болсын сырттан әсер етсін ықпал болмаған жағдайда айналса, онда инерция моментінің максимум және минимум мәндеріне сәйкес келетін бас осьтерден айналатын айналыс қана орнықты болып қалады. Ал шамасы бойынша аралық моментке сәйкес келетін осьтен айналатын айналыс орнықты болмайды. Бұл айналу осінің осындай бас осьтен болар-болмас ауытқыған кезінде пайда болатын күштер осы ауытқудың шамасы арта түсетін бағытта әсер етеді деген сөз.

<sup>1</sup> Дененің тығыздығы әрбір кимада симметрия осінен қашықтығының функциясы болса да жеткілікті болады.

Осыдан пайда болатын күштің ықпалымен айналыстың орнықты осьтен ауытқуы кезінде дене өзіне сәйкес келетін бас осьтен айналу қалпына қайта оралады.

Формасы параллелепипед болатын қандай да болсын денені (мысалы, сіріңке қорабын) жоғары көтеріп, тастап, сонымен қатар оны айналысқа<sup>1</sup> келтіре отырып, жоғарыда айтылғандарға көз жеткізуге болады. Мұнда



117-сурет.

дене құлап келе жатқанда оның параллелепипедтің ең үлкен немесе ең кіші жақтары арқылы өтетін осьтен айнала алатындығы байқалады. Ал денені параллелепипед жағынан ортасы арқылы өтетін осьтен айналатындай етіп жоғары көтеріп тастау ойдағыдай болып шықпайды.

Сыртқы ықпалдың, мысалы, айналатын дене ілінген жіптің тигізетін әсері бар кезде, тек инерция моментінің ең үлкен мәніне сәйкес келетін бас осьтен айналатын айналыс қана орнықты болып шығады. Осындай себептен бір ұшын жіпке байлап асып қойған жіңішке стерженьді тез айналдырғанда ол сайып келгенде осы стерженьнің ортасы арқылы өтетін оған перпендикуляр осьтен айнала алады (117 а-сурет) Бір жиігі жіпке байланып асып қойылған дискі де әлгі стержень сияқты айналады (117 б-сурет).

### § 43. Қатты дененің импульс моменті

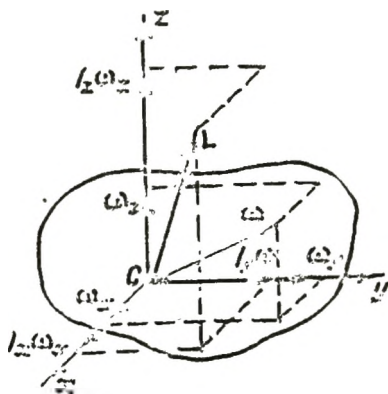
38-параграфта табылған қатты дененің импульс моментінің өрнегі

<sup>1</sup> Бұл жағдайда ауырлық күшінің әсері негізгі болып табылмайды. Ол тек дененің айналумен бірге төмен түсуін қамтамасыз етеді.

$$L_z = I_z \omega \quad (43.1)$$

тек дене қозғалмайтын осьтен, яғни кеңістікте подшипниктер ұстап тұратын осьтен немесе еркін осьтен айналған уақытта ғана дұрыс болады. Басқа жағдайларда  $L$  мен  $\omega$ -ның арасындағы байланыс едәуір күрделенеді, атап айтқанда  $L$  импульс моментінің векторы бағыты бойынша  $\omega$  бұрыштық жылдамдығының векторымен дәл келмейді.

Координата осьтерін<sup>1</sup> дене инерциясының бас осьтері бойынша бағыттайық.  $\omega$  векторы осы осьтердің бірде-біреуіне дәл келмесін делік (118-сурет). Сонда оның  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  осьтері бойынша құраушылары, жалпы айтқанда, нольден өзгеше болады.  $I_z \omega_z$  көбейтіндісі (43.1) өрнегіне сәйкес  $L$  векторының  $z$  осі бойындағы құраушысын береді. Осы сияқты  $I_x \omega_x$  көбейтіндісі  $L_x$  құраушысын, ал  $I_y \omega_y$  көбейтіндісі  $L_y$  құраушысын береді. Егер бас осьтерге қатысты ( $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ) инерция моменттері өз ара тең болмаса, онда  $L = L_x + L_y + L_z$  қорытқы векторы, 118-суреттен көрініп тұрғанындай, бағыты бойынша  $\omega$  векторымен дәл келмейді.  $\omega$  векторы тек бас осьтердің біреуінің бойымен, айталық  $z$  осінің бойымен бағытталған жағдайда ғана  $\omega$ -ның басқа осьтер бойындағы құраушылары (яғни  $\omega_x$  және  $\omega_y$ ) нольге тең болады, осының нәтижесінде  $L_x$  және  $L_y$  құраушылары да нольге тең болады сөйтіп, біз (43.1) формуласына келіп тірелеміз.



118-сурет.

Сонымен, егер координата осьтері ретінде дене инерциясының бас осьтерін таңдап алсақ, онда  $\omega$  және  $L$  векторының арасындағы байланыс мынадай болады:

$$L = I_x \omega_x + I_y \omega_y + I_z \omega_z \quad (43.2)$$

$\omega_x = \omega_x \mathbf{i}$  т. с. с. екендігін еске түсіріп, соңғы өрнекке мынадай түр беруге болады:

$$L = (I_x \omega_x) \mathbf{i} + (I_y \omega_y) \mathbf{j} + (I_z \omega_z) \mathbf{k},$$

<sup>1</sup> Бұл жерде денемен қатаң байланысқан және онымен қоса айналатын ось есте болу керек.



осыдан  $L$  және  $\omega$  векторларының координата осьтеріне түсірілген проекцияларының арасындағы байланыс төмендегідей қатыстармен берілетіндігі шығады:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (43.3)$$

Координата осьтері дене инерциясының бас осьтерімен дәл келмеген уақытта мұндай байланыс одан да гөрі күрделірек болады. Бұл жағдайда  $L$  және  $\omega$  проекцияларының арасындағы қатыс мынадай болып шығады:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (43.4)$$

$I_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) тоғыз шама инерция тензоры деп аталатын, яғни екінші рангінің симметриялы<sup>1</sup> тензорын құрайды.  $I_{ik}$  тензорының компоненттері координата осьтерін тандап алуға тәуелді болады. Егер координата осьтері дене инерциясының бас осьтерімен дәл келсе, онда  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  және  $I_{zz}$  -тен басқа барлық компоненттер нольге айналады да, (43.4) формуласы (43.3) формуласына айналады [(43.3) формуласындағы  $I_{xx}$  шамасы  $I_x$  арқылы т. с. с. белгіленген].

Біздің материалдық нүктелер системасы үшін алған (37.11) теңдеуіміз қатты дене үшін де орынды болады. Бұл жағдайда  $L$ -ді (43.4) формулаларымен анықталатын координата осьтеріне түсірілген проекциялары бар вектор деп ұғыну керек.

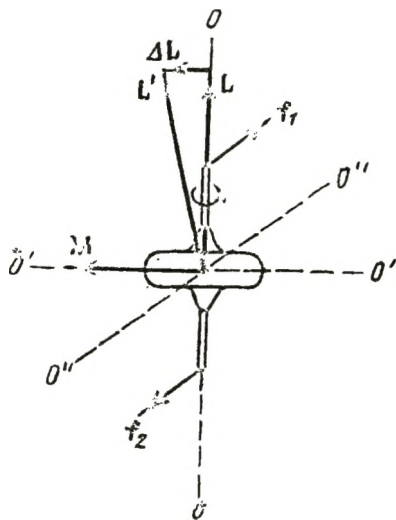
Қорытындысында инерцияның бас осьтерінің бірдебіреуіне дәл келмейтін әрі қозғалмайтын  $z$  осінен дененің айналу жағдайын қарастырайық. Мұнда ось тек оған сыртқы күштер әсер еткенде ғана қозғалмайтын болуы мүмкін (мысалы, 113-суретті қараңыздар). Осы күштердің  $z$  осіне қатысты моменттері нольге тең (өн бойымен күш әсер ететін бағыт ось арқылы өтеді), алайда осы осьте жатқан кез келген  $O$  нүктесіне қатысты күш моменттері нольден өзгеше болады. Осындай себептен дененің  $z$  осіне қатысты  $L_z$  импульс моменті өзгеріссіз қалады ( $\frac{d}{dt} L_x = M_z$ ,  $M_z = 0$ ), бағыты бойынша дәл келмейтін  $L$  импульсының  $O$  нүктесіне қатысты моменті, оған перпендикуляр бағытта әсер ететін сыртқы

<sup>1</sup> Егер тензордың компоненттері  $I_{ik} = I_{ki}$  шартын қанағаттандырса, ондай тензор симметриялы тензор деп аталады.

$M \left( \frac{d}{dt} L = M \neq 0 \right)$  күштері моментінің ықпалымен, кеңістікте денемен қоса бұрылады.

#### § 44. Гироскоптар

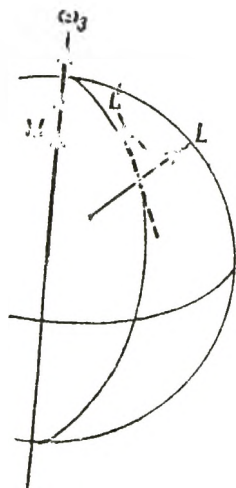
Гироскоп (немесе зырылдауық) деп, симметрия осінен өте зор жылдамдықпен айналатын шомбал симметриялы денені айтады. Симметрия осі гироскоп инерциясының бас осьтерінің бірі болып табылады, сондықтан гироскоп импульсының моменті бағыты бойынша айналу осімен дәл келеді. Гироскоп осінің кеңістіктегі бағытын өзгерту үшін, (37.11) теңдеуіне сәйкес оған сыртқы күштердің моментімен әсер ету керек. Сонда гироскоптың эффектісі деп аталатын мынадай құбылыс байқалады: гироскоптың  $OO$  осін  $O'O'$  түзуінен бұрылуына мәжбүр етуге тиісті күштің әсерімен (119-сурет) гироскоп осі  $O''O''$  түзуінен бұрылады ( $OO$  осі мен  $O'O'$  түзуі чертеж жазықтығында жатады, ал  $O''O''$  түзуі мен  $f_1$  және  $f_2$  күштері осы жазықтыққа перпендикуляр болады деп ұйғарылады)



119-сурет.

Бір қарағанда «табиғи емес» сияқты болып көрінетін гироскоптың өзгерісі айналмалы қозғалыс динамикасының заңдарына, яғни сайып келгенде, Ньютон заңына толық сәйкес келетіндігін байқау қиын емес. Шындығында да,  $f_1$  және  $f_2$  күш моментері  $O'O'$  түзуінің бойымен бағытталған.  $\Delta t$  уақыты ішінде гироскоптың импульс моменті  $\Delta L = M \Delta t$  өсімше алады, бұл өсімшенің бағыты  $M$  векторының бағытындай болады. Гироскоптың  $\Delta t$  уақыт өткеннен кейінгі импульс моменті чертеж жазықтығында жатқан  $L' = L + \Delta L$  қорытқы импульс моментіне тең болады.  $L'$  векторының бағыты гироскоптың айналу осінің жаңа бағытымен дәл келеді. Сонымен, гироскоптың айналу осі  $O''O''$  түзуінен бұрылады, сонда  $M$  және  $L$  векторларының арасындағы бұрыш азаяды. Егер гироскопқа бағыты бойынша тұрақты сыртқы күштерінің  $M$  моментімен ұзақ

уақыт әсер етсе, онда гироскоптың осі ең ақырында былай орнығады: гироскоптың меншікті айналысының осі мен бағыты сыртқы күштердің әсерімен айналатын айналыстың осі мен бағытына дәл келеді ( $L$  векторы бағыты бойынша  $M$  векторының бағытымен дәл келеді)



120-сурет.

Гироскоптың жоғарыда баяндалған өзгерісі гироскоптық компас (гироскомпас) деп аталатын прибордың негізін қалаған. Бұл прибор осі горизонталь жазықтықта еркін бұрыла алатын гироскоп болып есептеледі (120-сурет). Жердің бір тәуліктегі айналуының салдарынан гироскоптық компас оны жер осінен айналатын айналысқа еліктіріп әкетуге тырысатын (бұл 119-суреттегі  $f_1$  және  $f_2$  күштерінің гироскопты  $O'O'$  осінен айналатын айналысқа еліктіріп әкетуге тырысатыны сияқты) күштердің ықпалында болады. Осының нәтижесінде гироскоптың осі, гироскоптың  $L$  импульс моменті векторы мен Жердің  $\omega_{жс}$

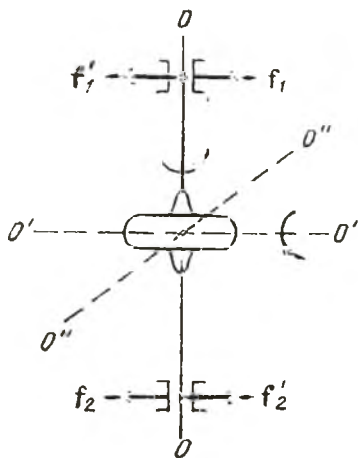
бұрыштық векторының арасындағы бұрыш азаятындай болып бұрылады. Бұл жағдай  $L$  мен  $\omega_{жс}$  -ның арасындағы бұрыш минимум мәніне жеткенге, яғни гироскоптың осі меридиан жазықтығында орныққанға дейін созыла береді (мұның жоғарыда қарастырылған жалпы жағдайдан айырмашылығы гироскоптың компас осінің бұрылуының былай шектелгендігінде: бұл осьтің тек горизонталь жазықтықта ғана орналасуы мүмкін)

Гироскоптық компастың магниттік тілі бар компас-тан қолайлы айырмашылығы сол, оның көрсетуіне магниттік қисаю (бұрылу<sup>1</sup>) деп аталатын түзетуді енгізудің қажеті жоқ, сондай-ақ магнит тілінің маңында орналасқан ферромагниттік заттардың (мысалы, кемеңің болат корпусының т. б.) осы тілге тигізетін әсерін теңгеру үшін шара қолданудың қажеті болмайды. Сондықтан қазіргі уақытта навигация ісінде көбінесе гироскомпастар қолданылады.

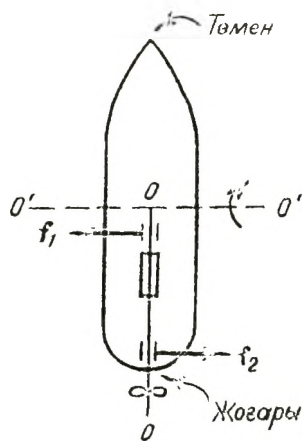
**Гироскоптық күштер.** Гироскоптың осін берілген жағдайға қарай бұруға әрекет жасаған кезде гироскоптық

<sup>1</sup> Магниттік бұрылу деп магниттік және географиялық меридиандардың арасындағы бұрышты айтады.

эффе́кт салдарынан, гироскоптың осі айналып тұратын тірекке әсер ететін гироскоптық күштер пайда болады. Мысалы, гироскоптың  $OO$  осін  $O'O'$  түзуінен бұрылуға мәжбүр еткенде (121-сурет)  $OO$  осі  $O''O''$  түзуінен бұрылуға тырысады. Осы айналысты болдырмау үшін, гироскоптың осіне подшипниктер жағынан әсер ететін  $f_1$  және  $f_2$  күштерін түсіру керек. Ньютонның үшінші заңы бойынша ось подшипниктерге гироскоптық күштер болып есептелінетін  $f_1$  және  $f_2$  күштермен әсер етеді.



121-сурет.



122-сурет.

Мысалы, кемелердегі бу турбиналарының подшипниктерін конструкциялағанда гироскоптық күштердің болатындығын ескеруге тура келеді. Турбинаның роторы гироскоп болып табылады. Кеме киль бойымен (ұзына бойымен) шайқалғанда турбинаның осін  $O'O'$  түзуінен бұрылуға мәжбүр етеді (122-сурет). Бұл осьтің подшипниктерге қосымша, кейде едәуір қысым түсіретін  $f_1$  және  $f_2$  гироскоптық күштердің пайда болуына әкеп соғады.

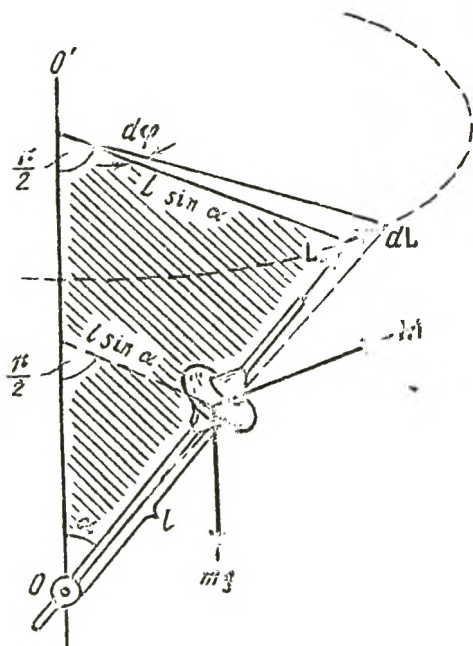
**Гироскоп прецессиясы.** Гироскопқа әсер ететін сыртқы күштердің моменті шамасы бойынша тұрақты бола отырып, гироскоптың осімен бір мезгілде бұрылып, осы осьпен үнемі тік бұрыш жасаған жағдайда гироскоп қозғалысының ерекше түрі орын болады. Мысалы, осі ауырлық күшінің өрісінде болатын топсадан айналатын гироскоп осындай жағдайда болады (123-сурет).

Гироскопқа түсірілген сыртқы күштердің моменті шамасы бойынша мынаған тең:

$$M = mgl \sin \alpha, \quad (44.1)$$

мұндағы  $m$  — гироскоп массасы,  $l$  — топсадан гироскоптың инерция центріне дейінгі ара қашықтығы,  $\alpha$  — гироскоп осі мен вертикаль арасында пайда болған бұрыш.  $M$  моменті гироскоп осі арқылы өтетін вертикаль жазықтыққа перпендикуляр бағытталған (123-суретте бұл жазықтық штрихталған) Гироскоптың  $L$  импульс моменті  $M$  күш моментінің әсерімен  $dt$  уақыты ішінде

$$dL = M dt \quad (44.2)$$



123-сурет.

өсімшесін алады, бұл өсімше бағыты бойынша  $M$  векторымен дәл келеді, яғни  $L$  векторына перпендикуляр болады.  $dL$  өсімшесін алғаннан кейін,  $L$  векторының душар болған өзгерісі гироскоп осінің  $OO'$  түзуінен  $\alpha$  бұрышының өзгермейтін бұрылысына сәйкес келеді. Бұл жағдайда гироскоп осі арқылы өтетін вертикаль жазықтық  $d\varphi$  бұрышына бұрылады. Мұнымен қатар  $M$  векторы да горизонталь жазықтықта осындай бұрышқа бұрылады. Осының нәтижесінде  $dt$  уақыт өткен

соң  $L$  және  $M$  векторларының өз ара орналасатын орны бастапқы моменттегідей болады.

$dt$  уақытының кезектегі элементінде  $L$  векторы тағы да  $dL$  өсімшесін алады, бұл өсімше  $L$  векторының жаңа мәніне («алғашқы» элементар бұрылыстан кейін пайда болған) перпендикуляр болады т. с. с. Ақыр аяғында гироскоптың осі вертикальдан  $O$  топсасы арқылы өтетін аша бұрышы  $2\alpha$ -ға тең конус жасап, үздіксіз айналатын болады. Сонда  $L$  векторы тек бағыты бойынша ғана өзгереді, ал шамасы бойынша ол тұрақты болады, өйткені  $dL$  элементар өсімше  $L$  векторына үнемі перпендикуляр болады.

Гироскоптың жоғарыда сипатталған қозғалысы прецессия деп аталады да, сыртқы күштердің әсе-

рінен конус жасап өтетін гироскоп осінің қозғалысы болып табылады (дербес жағдайда  $\alpha = \pi/2$  болғанда конус жазықтыққа айналады)

Прецессия кезінде  $L$  векторының сипаты шеңбер бойындағы бір қалыпты қозғалыс кезіндегі жылдамдық векторының сипатындай болады. Соңғы жағдайда жылдамдықтың элементар өсімшесі  $dv$  үнемі  $v$  векторына перпендикуляр және  $w dt$  мәніне тең болады, мұндағы  $|w|$  тұрақты. Гироскоп жағдайында  $dL$  өсімшесі  $L$  векторына перпендикуляр және  $M dt$  мәніне тең, мұндағы  $|M|$  тұрақты келеді.

Конус осі мен гироскоп осі арқылы өтетін жазықтық айналысының бұрыштық жылдамдығы прецессия жылдамдығы деп аталады. Сонда прецессияның бұрыштық жылдамдығы мынаған тең болатындығы айқын:

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt},$$

мұндағы  $d\varphi$  — жоғарыда көрсетілген жазықтықтың  $dt$  уақыты ішінде бұрылатын бұрышы. Бұл бұрышты  $|dL|$ -дің  $L \sin \alpha$ -ге қатынасы ретінде көрсетуге болады ( $L$  векторының басы  $O$  топсасымен үйлестірілген деп ұйғарылғандығын 123-суреттен қараңыздар):

$$d\varphi = \frac{|dL|}{L \sin \alpha}. \quad (44.3)$$

(44.2) және (44.1) тендеулеріне сәйкес

$$|dL| = M dt = mgl \sin \alpha dt.$$

Осы өрнекті (44.3) қатынасына қойып және  $L$ -ді  $I\omega$  арқылы алмастырып, мынаны шығарып аламыз:

$$d\varphi = \frac{mgl \sin \alpha dt}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgl}{I\omega} dt.$$

Осыдан прецессияның бұрыштық жылдамдығы шығады:

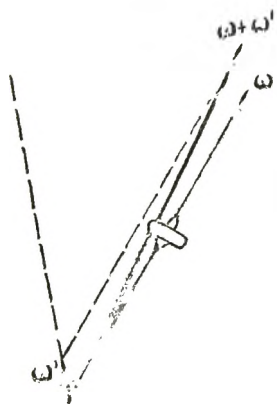
$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (44.4)$$

(44.4) формуласынан прецессияның жылдамдығы горизонтқа қатысты гироскоп осінің еңкею бұрышына тәуелді болмайтындығын көрсетеді.

$I\omega$  импульс моменті әдетте өте зор болғандықтан, прецессияның  $\omega'$  жылдамдығы аз болады, сонымен қатар  $\omega$  неғұрлым үлкен болса,  $\omega'$  соғұрлым аз болады. Гироскоптың айналу кезіндегі  $\omega$  бұрыштық жылдамдығы

азайған сайын  $\omega'$  прецессия жылдамдығы арта түседі.

Прецессия жағдайында гироскоптың импульс моменті оның симметрия осімен дәл келмейтіндігін ескерген жөн, өйткені гироскоптың қозғалысы екі айналыстың — симметрия осінен  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен айналатын және вертикаль осьтен прецессияның  $\omega'$  бұрыштық жылдамдығымен айналатын айналыстың қосындысы болып табылады.



124-сурет.

Қорытқы бұрыштық жылдамдық  $\omega + \omega'$  қосындысына тең болады (124-сурет) Алайда  $\omega' \ll \omega$  болғандықтан, жуықтап есептегенде  $\omega + \omega' \approx \omega$  және  $L = I\omega$  деуге болады. (44.4) формуласын прецессияның бұрыштық жылдамдығы үшін қорытып шығарғанда біз осындай жуық мәндерді пайдаландық.

## § 45. Қатты дененің деформациясы

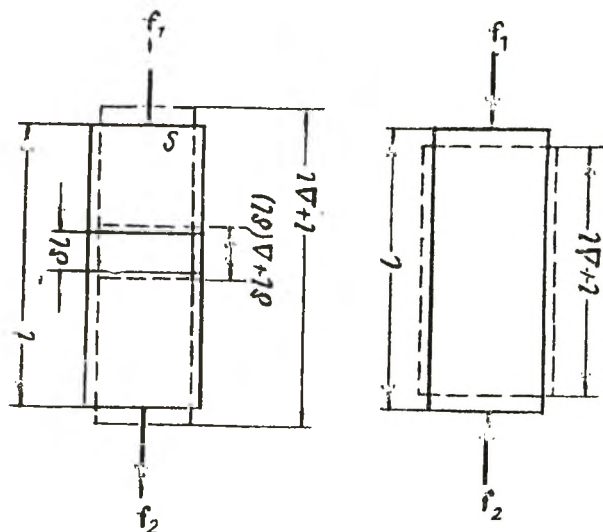
Күштердің әсерімен дененің деформациясы болатындығы, яғни олардың өлшемі мен формасының өзгеретіндігі жоғарыда атап көрсетілген. Егер деформацияны тудыратын күштердің әсері тоқталғаннан кейін дене алғашқы өлшемі мен формасына қайтып келетін болса, ондай деформация серпімді деформация деп аталады. Біз негізгі серпімді деформацияларды қысқаша қарастырумен шектелейік.

Деформацияны тудыруға себепші болатын күш әрбір нақты денеге тән біршама шектен асып кетпеген жағдайда ғана серпімді деформация болады. Осы шектен асып кеткенде дене қалдық немесе пластикалық деформация алады, ал олар күштің әсері тыйылғаннан кейін де денеде сақталып қалады.

Қатты дененің серпімді деформацияларының барлық мүмкін болатын түрлерін негізгі екі — созылу (немесе сығылу) және ығысу деформациясына топтастыруға болады.

**Бойлық созылу (немесе бір жақты сығылу) деформациясы.** Егер қимасы тұрақты әрі біртекті стерженьнің ұштарына, әсері барлық қима бойымен бір қалыпты та-

ралатын әрі стержень осінің бойымен бағытталған  $f_1$  және  $f_2$  ( $f_1=f_2=f$ ) күштерін түсірсек, онда стерженьнің  $l$  ұзындығы оң (созылу кезінде) немесе теріс (сығылу кезінде)  $\Delta l$  өсімшесін алады (125-сурет) Бұл жағдайда стерженьнің еркінше алынған әрбір  $\delta l$  элементі  $\Delta(\delta l)$



125-сурет.

өсімшесін алады, ал бұл өсімше элементтің ұзындығына пропорционал болады, демек, стерженьнің барлық элементтері үшін  $\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}$  қатынасы бірдей болып шығады. Сондықтан стерженьнің деформациясын сипаттайтын шама ретінде оның ұзындығының салыстырмалы өзгеруін алған дұрыс болады:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (45.1)$$

$\varepsilon$  салыстырмалы ұзындығы, өзінің анықтамасынан көрініп тұрғанындай, өлшемсіз шама болады. Созылу жағдайында ол оң, ал сығылу жағдайында ол теріс шама болады.

Тәжірибенің көрсетуіне қарағанда, берілген материалдан жасалған стержень үшін серпімді деформация кезіндегі салыстырмалы ұзару стерженьнің көлденең қимасының бірлік ауданына түсетін күшке пропорционал болады:

$$\varepsilon = \alpha \frac{f}{S}. \quad (45.2)$$



$\alpha$  пропорционалдық коэффициенті серпімділік коэффициенті деп аталады. Ол тек стержень материалының қасиетіне ғана тәуелді болады.

Күш пен осы күш әсер ететін бет шамасының қатынасына тең шама кернеу деп аталады. Дене бөлшектерінің бір-біріне өз ара әсерлесуі арқасында кернеу дененің барлық нүктесіне беріледі — стерженьнің барлық көлемі кернеу түскен күйде болып шығады. Егер күш бетке нормаль бойымен бағытталса, ондай кернеу қалыпты кернеу деп аталады. Егер күш осы күш түсетін бетке жанама бойымен бағытталса, ондай кернеу тангенциаль кернеу деп аталады. Қалыпты кернеуді  $\sigma$  әрпімен, тангенциаль кернеуді  $\tau$  әрпімен белгілеу қабылданған.

Қарастыруға

$$\sigma = \frac{f}{S} \quad (45.3)$$

қалыпты кернеуін енгізіп, (45.1) теңдеуді былай жазуға болады:

$$\varepsilon = \alpha \sigma. \quad (45.4)$$

Сонымен, салыстырмалы ұзару қалыпты кернеуге пропорционал болып шығады. (45.4) теңдеуінен мынадай қорытынды шығады.  $\alpha$  серпімділік коэффициенті сан жағынан, кернеу кезіндегі, бірлік салыстырмалы ұзаруға тең болады.

Материалдың серпімді қасиеттерінің сипаттамасы үшін  $\alpha$  серпімді коэффициентімен қатар, оған кері Юнг модулы деп аталатын  $E = 1/\alpha$  шамасы пайдаланылады.

(45.4) формуласындағы  $\alpha$ -ны  $E$  арқылы алмастырып, мынаны аламыз:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (45.5)$$

бұдан Юнг модулы, салыстырмалы ұзаруы бірге (бір бүтінге) тең болатындай (яғни ұзындықтың өсімшесі  $\Delta l$  бастапқы  $l$  ұзындығына тең болатындай), қалыпты кернеуге тең, ал осындай үлкен серпімді деформацияның болуы мүмкін емес (шынында да, одан едәуір аз кернеу кезінде стержень үзіледі, ал серпімділік шегіне одан да ерте жетеді).

(54,1) және (45.5) қатыстарын ескере отырып, (45.3) қатысын мынадай түрге келтіруге болады:

$$f = \frac{ES}{l} \Delta l = k \Delta l, \quad (45.6)$$

мұндағы  $k$  — берілген стержень үшін тұрақты коэффициент.

(45.6) қатысына сәйкес серпімді деформация кезіндегі стерженьнің ұзаруы стерженьге әсер ететін күшке пропорционал болады. (45.6) қатысы берілген деформацияға арналған Гук заңын көрсетеді. Бұл заң серпімділік шегіне жетпеген кезге дейін ғана орындалады.

Стержень ұзындығының деформация кезінде өзгеруі стерженьнің  $d$  көлденең өлшемінің соған сәйкес өзгеруімен қосарланады (125-сурет). Бұл өзгерісті салыстырмалы көлденең ұлғаюмен немесе сығылумен сипаттау қабылданған:

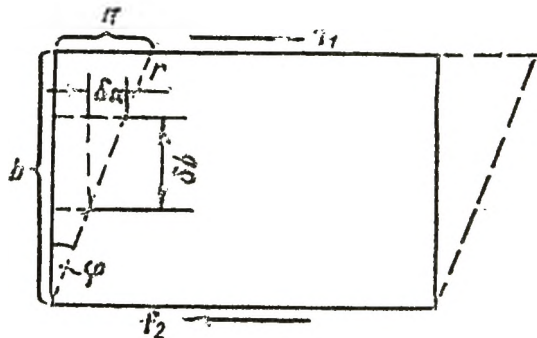
$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}. \quad (45.7)$$

$\varepsilon$  мен  $\varepsilon'$ -тің әрқашанда әр түрлі таңбалы: созылғанда  $\Delta l$  оң, ал  $\Delta d$  теріс, сығылғанда  $\Delta l$  теріс, ал  $\Delta d$  оң болатыны сөзсіз. Тәжірибенің көрсетуіне қарағанда,  $\varepsilon'$ -тің мәні  $\varepsilon$ -ге пропорционал болады:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (45.8)$$

мұндағы  $\mu$  — материалдың тек қасиетіне тәуелді болатын оң коэффициент. Оны көлденең сығылу коэффициенті немесе Пуассон коэффициенті деп атайды.

**Ығысу деформациясы.** Формасы тік бұрышты параллелепипед болатын біртекті денені алайық та, оның қарама-қарсы жатқан жақтарына  $f_1$  және  $f_2$  ( $f_1 = f_2 = f$ ) күштерін түсірейік, ал күштер осы жақтарға параллель бағытталған (126-сурет). Егер күштің әсері  $S$ -тің тиісті жағының барлық бетіне бір қалыпты таралатын болса, онда осы жақтарға параллель болатын кез келген қимада тангенциаль кернеу пайда болады:



126-сурет.

$$\tau = \frac{f}{S}. \quad (45.9)$$

Осы кернеудің әсерімен дене 126-суретте көрсетілгендей жоғары жақ төменгі жақпен салыстырғанда біршама  $a$  қашықтығына ығысатындай деформацияланады. Егер денені ойша элементар горизонталь қабаттарға ұсақтап бөлсек, онда әрбір қабат өзінің көрші қабатымен салыстырғанда ығысқан болып шығады. Осы себептен деформацияның мұндай түрі ығысу деформациясы деген атқа ие болған.

Ығысу деформациясы кезінде, бастапқысында горизонталь қабатқа перпендикуляр болатын кез келген түзу біршама  $\varphi$  бұрышына бұрылады. Демек, еркінше алынған екі қабаттың  $da$  ығысуының осы қабаттардың  $db$  ара қашықтығына қатынасы кез келген қос қабат үшін бірдей болады. Осы қатынасты ығысу деформациясының сипаттамасы ретінде алуға болады:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (41.10)$$

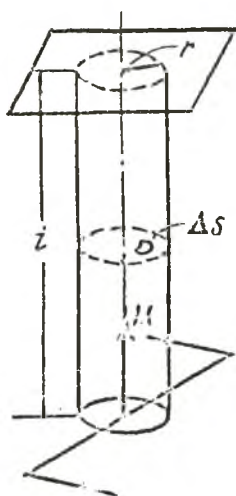
$\gamma$  шамасы салыстырмалы ығысу деп аталады.  $\varphi$  бұрышы өте аз болғандықтан  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$  деуге болады. Сондықтан  $\gamma$  салыстырмалы ығысу  $\varphi$  ығысу бұрышына тең болып шығады. Тәжірибенің көрсетуіне қарағанда, салыстырмалы ығысу тангенциаль кернеуге пропорционал болады:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (45.11)$$

$G$  коэффициенті тек материалдың қасиетіне ғана тәуелді болады да, ығысу модулы деп аталады. Ығысу модулы ығысу бұрышы  $45^\circ$ -қа ( $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ) тең болатын тангенциаль кернеуге тең, мұнда осындай үлкен

деформация кезінде серпімділік шегі өз мәнінен асып кетпеуге тиіс.

Біз қарастырған негізгі деформациялардан басқа, дөңгелек стерженьнің бұралуды қарастырайық. Егер дөңгелек стерженьнің бір ұшын қозғалмастай етіп бекітіп, ал оның екінші ұшына стержень осінің бойымен бағытталған  $M$  айналдырушы моментін түсірсек (127-сурет), онда стержень оның төменгі табаны жоғарғы табанымен салыстырғанда біршама  $\varphi$  бұрышына бұрылатындай деформацияға ие болады.



127-сурет.

Бұралу кезіндегі деформация ығысу деформациясы болып табылатындығын көру қиын емес. Шындығында, егер стерженьді ойша оның осіне перпендикуляр болатын элементар қабаттарға ұсақтап бөлсек, онда стерженьнің бұрылуы осындай қабаттардың әрқайсысын, өзімен көршілес қабаттармен салыстырғанда, ығыстыруға әкеп соқтырады. Рас, бұл ығысу біркелкі болмайды:  $\Delta S$  қабатының учаскесі өзіне ұқсас көршілес қабаттың учаскесімен салыстырғанда көбірек ығысады, сонымен қатар ол стержень осінен неғұрлым қашық болса, соғұрлым көбірек ығысады.

Тиісті есептеулер жүргізіп, стерженьнің бұралу бұрышын, тәжірибенің нәтижесіне сәйкес

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} M \quad (45.12)$$

өрнегімен анықталатындығын көрсетуге болады, мұндағы  $l$  — стерженьнің ұзындығы,  $r$  — оның радиусы,  $G$  — ығысу модулы,  $M$  — айналдырушы момент.

Берілген стержень үшін  $M$ -нің жанындағы тұрақты көбейткішті  $k$  әрпімен белгілеп, (45.12) қатысты мынадай түрге келтіруге болады:

$$\varphi = kM. \quad (45.13)$$

Соңғы қатыс бұралу кезіндегі Гук заңын өрнектейді. Берілген материалдан жасалған стерженьнің ұзындығы тұрақты болғанда  $k$  пропорционалдық коэффициент стерженьнің қалыңдығына ( $1/r^4$  болғандықтан) аса тәуелді болады.

**Серпімді деформацияның энергиясы.** Серпімді деформацияланған дене, мысалы, созылған немесе сығылған стержень деформацияланбаған күйіне қайта оралғанда, сығылған немесе созылған пружина сияқты сыртқы денелер жұмыс істей алады, яғни ол біршама энергия қорына<sup>1</sup> ие болады. Бұл энергия дене элементтерінің өз ара орналасуына қарай пайда болатындықтан, ол потенциалдық энергия болып табылады. Деформацияланған дененің энергия қоры деформация кезіндегі сыртқы күштердің істейтін жұмысына тең болса керек.

Стерженьнің серпімді созылған (сығылған) энергиясын есептеп шығарайық. Созылған кезде стерженьге шамасы (45.6) өрнегімен анықталатын күшпен әсер ету қажет. Бұл күштің жұмысы мынаған тең:

<sup>1</sup> (27.13) формуланы және соған сәйкес келетін тексті қараңыздар.

$$A = \int_0^{\Delta l} f dx,$$

мұндағы  $x$  әрпімен стерженьнің абсолют ұзаруы белгіленген, ол деформация процесінде  $O$ -ден  $\Delta l$ -ге дейін өзгереді.

$x$  ұзаруына сәйкес келетін  $f$  күші (45.6) өрнегіне сәйкес мынаған тең:

$$f = kx = \frac{ES}{l} x.$$

Демек,

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = U^1.$$

Осыдан шыққан өрнектің алымы мен бөлімін  $l$ -ге көбейтіп, сонан кейін  $\Delta l/l$  қатынасын  $\epsilon$  салыстырмалы ұзаруымен алмастырып және ең ақырында  $Sl$  стерженьнің  $V$  көлемін беретіндігін ескеріп, мынаны шығарып аламыз:

$$U = \frac{E\epsilon^2}{2} V \quad (45.14)$$

Енді  $u$  энергия тығыздығын қарастырайық, мұны  $\Delta U$  энергиясының өзі осының ішінде болатын  $\Delta V$  көлеміне қатынасы ретінде анықтайық:

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V}.$$

Бұл жағдайда стержень біртекті болғандықтан деформация да бір қалыпты, яғни стерженьнің әр түрлі нүктелерінде бірдей болады, сондай-ақ (45.14) энергиясы да стерженьде тұрақты тығыздықпен бір қалыпты таралған. Сондықтан былай деуге болады:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\epsilon^2}{2}. \quad (45.15)$$

(45.15) өрнегі созылған кездегі (немесе сығылған кездегі) серпімді деформация энергиясының тығыздығын береді. Осыған ұқсас ығысу кезіндегі серпімді деформация энергиясының тығыздығын былай алуға болады:

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}. \quad (45.16)$$

---

<sup>1</sup> Потенциальлық энергияның есептеп табылған жұмысын теңестіре отырып, біз деформацияланбаған дененің энергиясын нольге тең деп есептедік.

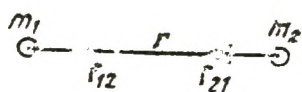
## VI ТАРАУ БҮКІЛ ӘЛЕМДІК ТАРТЫЛЫС

### § 46. Бүкіл әлемдік тартылыс заңы

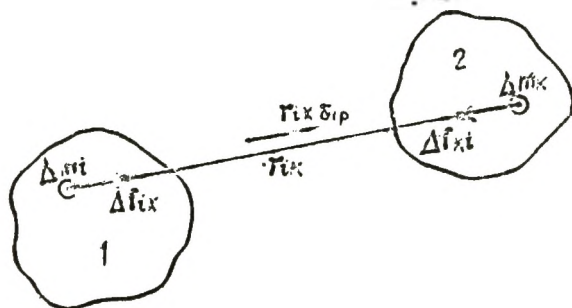
Табиғаттағы барлық денелер бір-біріне тартылады. Осы тартылыс бағынатын заңды Ньютон анықтап, бүкіл әлемдік тартылыс заңы деп аталған. Осы заң бойынша *екі дененің бір-біріне тартылатын күші осы денелердің массаларына тура пропорционал, ал олардың ара қашықтығының квадратына кері пропорционал болады:*

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (46.1)$$

мұндағы  $\gamma$  — гравитациялық тұрақты деп аталатын пропорционалдық коэффициент. Бұл күш бір-бі-



128-сурет.



129-сурет.

ріне әсер ететін денелер арқылы өтетін түзудің бойымен бағытталған (128-сурет). (46.1) формуласы шамасы бойынша бір-біріне тең  $f_{12}$  және  $f_{21}$  күштердің сандық мәнін береді.

(46.1) қатысында сөз болған денелер материялық нүктелер болса керек. Материялық нүктелер ретінде қа-

растырылмайтын денелердің өз ара әсер ету күшін анықтау үшін оларды  $\Delta m$  элементар массаларға, яғни әрқайсысын материялық нүкте үшін қабылдарлықтай болатын шағын көлемге бөлген жөн (129-сурет) (46.1) формуласына сәйкес 1 дененің  $i$ -інші элементар массасы 2 дененің  $k$ -шы элементар массасына мынадай күшпен тартылады:

$$\Delta \mathbf{f}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik} \text{ бір}, \quad (46.2)$$

мұндағы  $\mathbf{r}_{ik}$  бір. — бағыты  $\Delta m_i$ -ден  $\Delta m_k$ -ға дейінгі бірлік вектор, ал  $r_{ik}$  — осы элементар массалардың ара қашықтығы.

(46.2) қатысын  $k$ -ның барлық мәні бойынша қосындылап, 2 дене тарапынан 1 денеге жататын  $\Delta m_i$  элементар массаға әсер ететін барлық қорытқы күштерді шығарып аламыз:

$$\Delta \mathbf{f}_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik} \text{ бір}. \quad (46.3)$$

Ең ақырында, (46.3) қатысты индексінің барлық мәні бойынша қосындылап, яғни бірінші дененің барлық элементар массаларына түсірілген күшті қосып, 2 дененің 1 денеге әсер ететін күшін шығарып аламыз:

$$\mathbf{f}_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik} \text{ бір}. \quad (46.4)$$

Қосындылау  $i$  және  $k$  индекстерінің барлық мәні бойынша жүргізіледі. Демек, егер 1 денені  $N_1$ , ал 2 денені  $N_2$  элементар массаларға бөлсек, онда (46.4) қосындысында  $N_1 N_2$  қосылғыштар болады.

Ньютонның үшінші заңы бойынша 1 дене 2 денеге —  $\mathbf{f}_{12}$  күшіне тең болатын  $\mathbf{f}_{21}$  күшімен әсер етеді.

Іс жүзінде (46.4) қатысын қосындылау интегралдауға әкеледі әрі, жалпы айтқанда, өте күрделі математикалық есеп болып табылады. Егер өз ара әсер ететін денелер біртекті шарлар<sup>1</sup> болса, онда (46.4) қатысына сәйкес есептеп шығару мынадай нәтиже береді:

$$\mathbf{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} \text{ бір}, \quad (46.5)$$

<sup>1</sup> Әрбір шардың шегіндегі массалардың таралуының центрік симметриясы, яғни тығыздығы шар центрінен қашықтығының функциясы болса да жеткілікті.

мұндағы  $m_1$  және  $m_2$  — шар массалары,  $r$  — олардың центрінің ара қашықтығы,  $r_{1201p}$  — бірінші шардың центрінен екіншісінің центріне дейінгі бағыты болатын бірлік вектор. Сонымен, шарлар материялық нүктелер ретіне өз ара әсерлеседі, ал олардың массалары шар массаларына тең және олардың центрлерінде орналасқан.

Егер денелердің біреуі радиусы  $R$  өте зор шар (мысалы, жер шары) ретінде берілсе, ал екіншісі шар болмаса да, өлшемі  $R$ -ден әлдеқайда кем, бірақ шар бетіне жақын жатқан дене болса, онда олардың өз ара әсеретуі (46.5) формуласымен сипатталады, мұнда  $r$ -дің орнына шар радиусын алу қажет (екінші денеден шардың бетіне дейінгі қашықтықты, сондай-ақ екінші дененің өлшемін  $R$ -мен салыстырғанда елемеуге болады).

(46.1) теңдеуіндегі  $\gamma$  пропорционалдық коэффициенті де Ньютонның екінші заңының теңдеуіндегі пропорционалдық коэффициент сияқты алу орынды болады (яғни оны күшті өлшеу бірлігін таңдап алу есесінен бірге тең деп алу керек), өйткені бұл жағдайда әр түрлі физикалық құбылыстарды қарастырғанда бір шаманың — күштің әр түрлі өлшеу бірліктерін пайдалануға тура келер еді. Егер де (46.1) формуласына енетін шамаларды өлшеу үшін бұрын тағайындалған бірліктерді пайдаланатын болсақ, онда  $\gamma$  гравитациялық тұрақты (сандық мәні тәжірибе жолымен тағайындалуға тиісті) өлшемі бар шама болып шығады. (46.1) формуласына сәйкес  $\gamma$ -ның өлшемділігі мынаған тең:

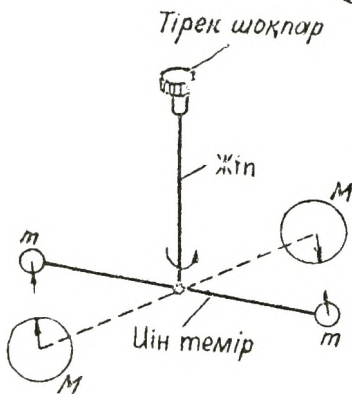
$$[\gamma] = \frac{[f][r^2]}{[m^2]} = \frac{\frac{ML}{T^2} L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2} L^3 M^{-1} T$$

$\gamma$ -ның сандық мәні, массалары белгілі денелердің бір-біріне тартылатын күшін өлшеу жолымен анықталған. Осындай өлшеу кезінде көп қиыншылықтар кездеседі, өйткені массалары тікелей өлшенетін денелер үшін тартылыс күштері өте-мөте аз болып шығады. Мысалы, әрқайсысының массасы 100 кг, бір-бірінен қашықтығы 1 м болатын екі дене бір-біріне шамамен  $10^{-6}$  н, яғни шамамен  $10^{-4}$  Г күшпен өз ара әсер етеді.

$\gamma$  тұрақтысының мәнін анықтау үшін ең алғаш ойдағыдай өлшеу жүргізген Кавендиш (1798 ж.) болды. Ол күшті өлшеу үшін өте сезгіш иірілмелі таразы әдісін қолданды (130-сурет) Жеңіл күйентенің ұштарына бекітілген екі қорғасын шар  $m$  (әрқайсысының массасы 729 г)



симметриялы орналастырылған  $M$  шарларының (әрқайсысының массасы  $158 \text{ кг}$ ) жанына қойылған. Күйенте серпімді жіпке асып қойылған, шарлардың бір-біріне тартылу күшін осы жіптің бұралуы арқылы өлшеуге болады. Жіптің жоғарғы ұшы орнату бүркеншігіне бекітілген, ал осы бүркеншікті бұру арқылы  $m$  және  $M$  шарларының ара қашықтығын өзгертуге болады. Әр түрлі әдістермен анықталғандардың ішінде  $\gamma$ -ның анағұрлым нақтылы мәнін мынадай деп есептейді:



130-сурет.

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2.$$

Егер (46.5) формуласына  $m_1 m_2$  және  $r$ -лердің бірге (бір бүтінге) тең мәндерін қойсақ, онда күш сан жағынан  $\gamma$ -ның өзіне тең болып шығады. Сонымен, әрқайсысының массалары  $1 \text{ кг}$ , центрлерінің бір-бірінен қашықтығы  $1 \text{ м}$  болатын екі шар өз ара  $6,670 \cdot 10^{-11} \text{ н}$ -ға тең күшпен тартылады.

лерінің бір-бірінен қашықтығы  $1 \text{ м}$  болатын екі шар өз ара  $6,670 \cdot 10^{-11} \text{ н}$ -ға тең күшпен тартылады.

## § 47. Ауырлық күші үдеуінің географиялық ендікке тәуелділігі

Дененің жер бетімен салыстырғандағы қозғалысын оқып зерттегенде Жермен байланысты санақ системасы инерциалы емес екендігі есте болу керек. Орбита бойындағы қозғалысқа сәйкес келетін үдеу Жердің тәуліктік айналысымен байланысты үдеуге қарағанда едәуір аз болады. Сондықтан Жерге байланысты санақ системасы инерциалы системамен салыстырғанда  $\omega$  тұрақты бұрыштық жылдамдығымен айтарлықтай дәл айналады деуге болады. Демек, дененің Жермен салыстырғандағы қозғалысын қарастырғанда инерцияның центрден тепкіш күшін енгізу керек:

$$f_{in} = m\omega^2 r,$$

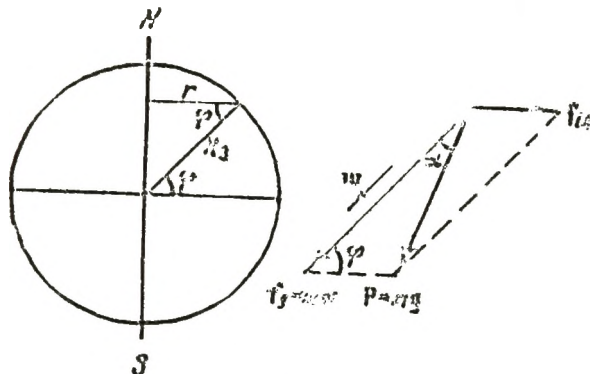
мұндағы  $m$  — дененің массасы,  $r$  — дененің Жер осінен қашықтығы (131-сурет).

Дененің Жер бетінен биіктігі онша үлкен емес жағдайлармен шектеле отырып,  $r$ -ді  $R \cos \varphi$ -ге тең деп алуға болады (мұндағы  $R$  ж — Жер радиусы,  $\varphi$  — география-

лық ендік). Сонда инерцияның центрден тепкіш күшінің өрнегі мынадай түрге келеді:

$$f_{in} = m\omega^2 R_{ж} \cos \varphi. \quad (47.1)$$

Жерге қатысты байқалатын дененің  $g$  еркін түсу үдеуі екі күштің — дененің Жерге тартылатын  $f_g$  күші



131-сурет.

мен  $f_{in}$  күшінің — әсер етуінен пайда болады. Осы күштердің

$$P = f_g + f_{in}$$

қорытқы күші ауырлық күш болады (18-параграфты қараңыздар).  $P$  күші массасы  $m$  болатын денеге  $g$  үдеуін беретін болғандықтан, мына қатыс орынды болады:

$$P = mg. \quad (47.2)$$

$P$  ауырлық күшінің  $f_g$  Жерге тартылу күшінен айырмашылығы онша үлкен емес, өйткені инерцияның центрден тепкіш күші  $f_g$ -ге қарағанда едәуір аз болады. Мәселен, 1 кг-ға тең масса үшін  $m\omega^2 R_{ж}$  өрнегі шамамен 0,035 н-ға тең болса ( $\omega$ -ның мәні  $2\pi$ -ді 86400 секундқа бөлгенге тең, ал  $R_{ж}$  шамамен 6400 км болады), ал  $f_g$  шамамен 9,8 н-ға тең болады, яғни инерцияның экваторда байқалатын центрден тепкіш күшінің максимум мәніне қарағанда 300 есе дерлік көп болады.

$f_g$  және  $P$  бағыттарының арасындағы  $\alpha$  бұрышын синустар теоремасын қолдана отырып бағалауға болады:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{f_{in}}{P} = \frac{m\omega^2 R_{ж} \cos \varphi}{mg} \approx \frac{0,035}{9,8} \cos \varphi \approx 0,0035 \cos \varphi,$$

осыдан

$$\sin \alpha \approx 0,0035 \sin \varphi \cos \varphi \approx 0,0018 \sin 2\varphi.$$

Кішкене бұрыштың синусын шамамен бұрыштың өзінің мәнімен алмастыруға болады:

$$\alpha \approx 0,0018 \sin 2\varphi. \quad (47.3)$$

Сонымен,  $\varphi$  ендікке байланысты  $\alpha$  бұрыш нольден ( $\varphi=0$  болатын экваторда, және  $\varphi=90^\circ$  болатын полюстерде) 0,0018 радианға немесе  $6'$ -қа дейінгі ( $45^\circ$  ендікте) аралықта өзгереді.

$P$  күшінің бағыты тіктеуіш бағыты деп аталатын және жүкпен керілген жіптің бағытымен дәл келеді.  $f_g$  күші Жер центріне бағытталған. Демек, тіктеуіш жіп тек полюстер мен экваторда ғана Жер центріне бағытталған, ал аралық ендіктерде (47.3) өрнегімен анықталатын бұрышқа ауытқиды.

$f_g - P$  айырымы полюстерде нольге тең, ал экваторда  $f_g$  күшінің 0,3 процентіне тең максимум мәніне жетеді. Жер шарының сығылық болуының салдарынан полюстерде  $f_g$  күші өз-өзінен ендікке байланысты біршама құбылады да, экваторда болғанда полюстердегісінен шамамен 0,2% кем болады. Қорыта келгенде,  $g$  еркін түсу үдеуі ендікке байланысты экватордағы  $9,780 \text{ м/сек}^2$  мәнінен полюстердегі  $9,832 \text{ м/сек}^2$  мәніне дейінгі аралықта өзгереді.  $g=9,80665 \text{ м/сек}^2$  мәні қалыпты (стандарттық) мән ретінде қабылданған.

Инерциялы, мысалы, гелиоцентрлік санақ системасына қатысты еркін түсетін дене  $g$  үдеуімен емес,  $f_g$  сияқты бағытталған және шамасы бойынша  $f_g/m$  мәніне тең  $w$  үдеуімен қозғалатындығын ескерейік. Әр түрлі денелер үшін  $g$  үдеуінің теңдігінен  $w$  үдеуінің теңдігі шығатындығын байқау қиын емес (131-суретті қараңыздар). Шынында, әр түрлі денелер үшін  $f_g$  және  $P$  векторларынан құрылған үшбұрыштар ұқсас болып келеді (Жер бетінің берілген нүктесінде болатын барлық денелер үшін  $\alpha$  және  $\varphi$  бұрыштары бірдей болады) Демек,  $w/g$  қатынасымен дәл келетін  $f_g/P$  қатынасы барлық денелер үшін бірдей болады, осыдан  $g$  бірдей болғанда  $w$  да бірдей болып шығады.

#### § 48. Инерциялық масса және гравитациялық масса

Масса әр түрлі екі заңда — Ньютонның екінші заңында және бүкіл әлемдік тартылыс заңында — қатысады. Бірінші жағдайда ол дененің инерциялық қасиетін,

ал екіншісінде гравитациялық қасиетті, яғни денелердің бірін-бірі тартатын қабілеттілігін сипаттайды. Осыған байланысты  $m_{in}$  инерциялы масса мен  $m_g$  гравитациялық (тартылыстық) массаны ажыратуға болмас па екен деген сұрақ туады.

Бұл сұрақтың жауабын тек тәжірибе ғана бере алады. Дененің еркін түсуін гелиоцентрлік санақ системасында қарастырайық. Жер бетіне жақын кез келген дене Жердің тарту күшіне душар болады, ол (46.5) формуласына сәйкес мынаған тең:

$$f = \gamma \frac{m_g M_{Ж}}{R_{Ж}^2}$$

( $m_g$  — берілген дененің гравитациялық массасы,  $M_{Ж}$  — Жердің гравитациялық массасы,  $R_{Ж}$  — жер шарының радиусы).

Осы күштің әсерінен дене  $\omega$  үдеуіне (бірақ  $g$  емес, алдыңғы параграфты қараңыздар) ие болады, ол үдеу  $f$  күшін  $m_{in}$  инерциялы массаға бөлгенге тең болуға тиіс:

$$\omega = \frac{f}{m_{in}} = \gamma \frac{M_{Ж}}{R_{Ж}^2} \frac{m_g}{m_{in}} \quad (48.1)$$

Тәжірибе көрсеткендей барлық денелер үшін  $\omega$  үдеуі бірдей болады ( $g$ -нің бірдейлігінен, біздің бұдан бұрын көргеніміздей  $\omega$ -нің бірдейлігі шығады). Демек,  $\gamma \frac{M_{Ж}}{R_{Ж}^2}$  көбейткіші де барлық дене үшін бірдей болады. Сондықтан  $m_g/m_{in}$  қатынасы да барлық денелер үшін бірдей болып шығады. Инерциялы масса мен гравитациялық масса арасындағы айырмашылықтың білінуі мүмкін басқа тәжірибелердің барлығының да нәтижесі алдындағыдай нәтижеге әкеледі.

Тәжірибе фактілерінің жиынтығы *барлық денелердің инерциялы массасы мен гравитациялық массасы бір-біріне дәлме-дәл пропорционал* екендігін көрсетеді. Бұл — өлшеу бірлігін тиісінше таңдап алғанда гравитациялық масса мен инерциялы масса теңбе-тең болады деген сөз, сондықтан физикада тек масса туралы айтылады. Гравитациялық масса мен инерциялы массаның теңбе-теңдігін Эйнштейн жалпы салыстырмалық теориясының негізі етіп алған.

(46.1) формуласындағы массаны біз әуелгі бастан-ақ дененің инерциялы массасымен дәл келеді деп ойлаға-

нымызды, осының нәтижесінде  $\gamma$ -ның сандық мәні  $m_g = m_{in}$  деп ұйғарғаннан анықталғандығын ескерте кетейік. Сондықтан (48.1) формуланы мынадай түрде жазуға болады:

$$\omega = \gamma \frac{M_{\text{Ж}}}{R_{\text{Ж}}^2}. \quad (48.2)$$

Соңғы қатыс  $M_{\text{Ж}}$  Жер массасын анықтауға мүмкіндік береді. Оған  $\omega$ ,  $R_{\text{Ж}}$  және  $\gamma$ -ның өлшенген мәндерін қойғанда Жер массасы үшін  $5,98 \cdot 10^{24}$  кг мәні шығады.

Әрі қарай  $R_{\text{ор}}$  жер орбитасының радиусын және Жердің Күнді толық айналатын  $T$  уақытын біле отырып, Күннің  $M_{\text{к}}$  массасын табуға болады [ $\omega^2 R_{\text{ор}}$  ( $\omega = 2\pi/T$ ) мәніне тең Жер үдеуі Жерді Күнге тартатын күштің әсерінен болады]. Демек,

$$M_{\text{Ж}} \omega^2 R_{\text{ор}} = \gamma \frac{M_{\text{Ж}} M_{\text{к}}}{R_{\text{ор}}^2},$$

бұдан Күн массасының есептеп шығарылуы мүмкін.

Басқа аспан денелерінің массалары да осы сияқты анықталған.

## § 49. Кеплер заңдары

Ньютонның бүкіл әлемдік тартылыс заңын анықтауы үшін планеталар қозғалысының Кеплер ашқан үш заңы негіз болған еді:

1. Барлық планеталар эллипс бойынша қозғалады, оның бір фокусында Күн болады.

2. Планеталардың радиус-векторы тең уақыттар ішінде бірдей аудандар сызады.

3. Планеталардың Күнді айналу периодтарының квадраттарының қатынасы олардың орбиталарының үлкен жарты осьтері кубтарының қатынасындай болады.

Кеплердің бірінші заңы планеталардың центрлік күштер өрісінде қозғалатындығын көрсетеді. Шынында, 37-параграфта көргеніміздей, центрлік күштер өрісіндегі дене траекториясы жазық қисық сызық — гипербола, парабола немесе эллипс — түрінде болады, оның фокусы күш центрлерімен дәл келеді.

Жеңілдік үшін орбита эллипс емес, шеңбер болады деп қабылдап (мұның болуы мүмкін, өйткені іс жүзінде барлық планеталар орбиталарының шеңберден айырмала-

шылығы аз болады), планета қозғалатын үдеуді мынадай түрде жазуға болады:

$$\omega = \frac{v^2}{r},$$

мұндағы  $v$  — планета қозғалысының жылдамдығы,  $r$  — орбита радиусы.

$v$  жылдамдықты  $2\pi r/T$  ( $T$  — планетаның Күнді айналу периоды) арқылы алмастырайық:

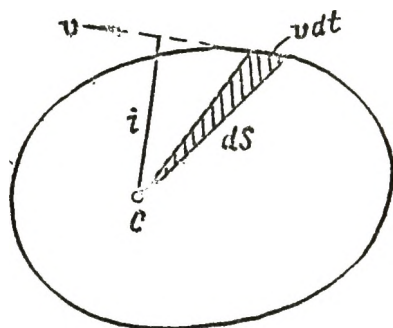
$$\omega = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Соңғы өрнектің негізінде Күн жағынан планета әсер ететін күштердің қатынасы мынадай болып жазылады:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \omega_1}{m_2 \omega_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}.$$

Кеплердің үшінші заңына сәйкес айналу периоды квадраттарының қатынасын орбита радиустары кубтарының қатынасымен алмастырып, мынаны шығарып аламыз:

$$f_1 : f_2 = \frac{m_1}{r_1^3} : \frac{m_2}{r_2^3}.$$



132-сурет.

Сонымен, Кеплердің үшінші заңынан мынадай қорытынды шығады: планетаның Күнге тартылатын күші планета массасына тура пропорционал, ал оның Күнге дейінгі қашықтығының квадратына кері пропорционал болады:

$$f = k \frac{m}{r^2}.$$

$k$  пропорционалдық коэффициент өз кезегінде  $M_K$  Күн массасына пропорционал болады деп ұйғарып, Ньютон бізге белгілі бүкіл әлемдік тартылыс заңын өрнектейтін мына формулаға тоқтаған:

$$f = \gamma \frac{m M_K}{r^2}.$$

Кеплердің екінші заңы импульс моментінің сақталу заңының салдары болып табылады. 132-суреттен көрініп тұрғанындай,  $dt$  уақыты ішінде радиус-вектор сызып шыққан  $ds$  ауданы  $vdt$  үшбұрыш табанының осы үшбұрыштың  $l$  биіктігіне көбейтіндісінің жартысына тең бо-

лады (мұндағы  $l$  биіктігі  $mv$  планета импульсының Күнге қатысты алынған пінімен дәл келеді):

$$dS = \frac{1}{2} lv dt = \frac{L}{2m} dt$$

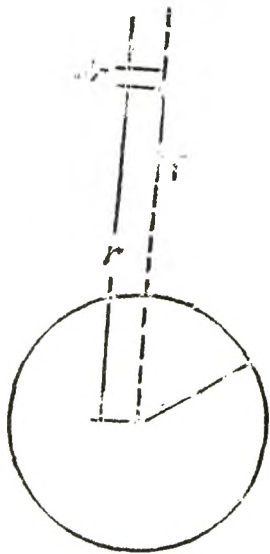
( $L$  — планета импульсының моменті, ол  $mv l$  мәніне тең).

$\frac{dS}{dt}$  өрнегі секторлық жылдамдық деп аталады. Сонымен, секторлық жылдамдық  $= \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$ .

Күштердің центрлік өрісіндегі импульс моменті тұрақты болып қалады, демек, планетаның секторлық жылдамдығы да тұрақты болып қалу керек. Бұл радиус-вектор тең уақыттар аралығында бірдей аудандар сызып шығады деген сөз.

## § 50. Космостық жылдамдықтар

Радиусы  $R_{\text{ж}}$  Жер радиусымен шамалас дөңгелек орбита бойымен Жерді айнала қозғалу үшін дене белгілі бір  $v_1$  жылдамдығына ие болуға тиіс, ал мұндай жылдамдықтың шамасын дене массасының осы денеге әсер ететін ауырлық күшінің центрге тартқыш үдеуіне көбейтіндісінің теңдік шартынан табуға болады:



133-сурет.

$$m \frac{v_1^2}{R_{\text{ж}}} = mg.$$

Осыдан

$$v_1 = \sqrt{gR_{\text{ж}}} \quad (50.1)$$

Демек, қандай да болсын дененің Жер спутнигі болуы үшін оған бірінші космостық жылдамдық деп аталатын  $v_1$  жылдамдығы берілуі қажет.  $g$  және  $R_{\text{ж}}$  мәндерін орнына қойғанда бірінші космостық жылдамдықтың келесі мәні

шығады:

$$v_1 = \sqrt{gR_{\text{ж}}} = \sqrt{9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/сек} = 8 \text{ км/сек}.$$

$v_1$  жылдамдығына ие болған дене Жерге құлап түспейді. Алайда бұл жылдамдық дененің Жерге тартылу

сферасынан шығып кетуі үшін, яғни Жерге тартылу елеулі роль атқармайтындай қашыққа Жерден ұзап кетуі үшін жеткілікті болмайды. Осыған қажетті  $v_2$  жылдамдығы екінші космостық жылдамдық деп аталады.

Екінші космостық жылдамдықты табу үшін дененің Жер бетінен шексіздікке қашықтап кетуіне қажетті Жерге тартылу күшіне қарсы істелетін жұмысты есептеп шығару керек, 26-параграфта біз центрлік күштер өрісіндегі жұмыс жолға тәуелді емес екендігін дәлелдедік. Енді дененің Жер центрі арқылы өтетін түзу бойымен орын ауыстырғанда істелетін жұмысын есептеп шығарайық (133-сурет)  $dr$  жолында істелетін элементар жұмыс мынаған тең:

$$dA = f dr = \gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{r^2} dr.$$

$r=R_{\text{Ж}}$  -ден  $r=\infty$ -ке дейінгі жолда істелген жұмысты интегралдау арқылы табамыз:

$$A = \int dA = \int_{R_{\text{Ж}}}^{\infty} \gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{r} \Big|_{R_{\text{Ж}}}^{\infty} = \gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{R_{\text{Ж}}}. \quad (50.2)$$

Ауырлық күші Жердің тарту күшіне тең болады деп жорамалдап, мынаны жазуға болады:

$$mg = \gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{R_{\text{Ж}}^2}, \text{ осыдан } \gamma \frac{mM_{\text{Ж}}}{R_{\text{Ж}}} = mgR_{\text{Ж}}.$$

Сонымен, (50.2) жұмысты мынадай түрде көрсетуге болады:

$$A = mgR_{\text{Ж}}. \quad (50.3)$$

Жерге тартылу күшін жеңіп, Жердің тарту күші әсерінен шығып кету үшін дене (40.3) жұмысын істеуге жетерліктей энергия қорына ие болуға тиіс. Осыған қажетті ең аз  $v_2$  жылдамдығы екінші космостық жылдамдық болады. Ол мына шартпен анықталады:

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_{\text{Ж}},$$

осыдан

$$v_2 = \sqrt{2gR_{\text{Ж}}} \quad (50.4)$$

(50.4) формуланы (50.1) формуламен салыстырғанда



екінші космостық жылдамдықтың бірінші космостық жылдамдықтан  $\sqrt{2}$  есе көп екендігі көрінеді. Сонда  $8 \text{ км/сек}$ -ты  $\sqrt{2}$  санына көбейтсек,  $v_2$  үшін шамамен  $11 \text{ км/сек}$  мәнін шығарып аламыз.

Алғаш рет космостық жылдамдыққа СССР-де қол жетті. 1957 жылғы 4 октябрьде Совет Одағында адамзат тарихында тұңғыш рет Жердің жасанды спутнигін ойдағыдай ұшыру жүзеге асырылды. 1959 жылдың 2 январында екінші шеп те алынды. Бұл күні совет жерінен космостық ракета ұшырылды, ол жердің тартылу сферасынан шығып, Күн системамыздың алғашқы жасанды планетасы болды. 1961 жылғы 12 апрельде Совет Одағында адам баласының жер жүзінде тұңғыш рет космос кеңістігіне ұшуы жүзеге асырылды. Тұңғыш совет космонавты Юрий Алексеевич Гагарин Жерді айнала ұшып, Жерге аман-есен қайтып қонды.

## VII ТАРАУ

### СҰЙЫҚТАР МЕН ГАЗДАРДЫҢ СТАТИКАСЫ

Механиканың сұйықтар мен газдарды зерттеумен шұғылданатын бөлімі гидромеханика және аэромеханика деп аталады. Олар өз кезегінде гидро- мен аэростатикаға (сұйықтар мен газдардың тепе-теңдігін зерттейді) және гидро- мен аэродинамикаға (сұйықтар мен газдардың қозғалысын зерттейді) бөлінеді. Бұл тарауда статика баяндалады.

#### § 51. Қысым

Сұйық пен газ тәрізді денелерге тән нәрсе, ығысуға кедергі жасамайды, сондықтан да олар өте аз күштің әсерінен де өз формасын өзгертеді. Сұйықтың немесе газдың көлемін өзгерту үшін, әрине, керісінше, шектеулі сыртқы күш талап етіледі. Сыртқы әсердің нәтижесінде көлемнің өзгеруі кезінде сұйық пен газда серпімді күштер пайда болады да, ең ақырында, сыртқы күштердің әсерімен теңеседі. Сұйықтар мен газдардың серпімді қасиеті мынадан білінеді: олардың жеке бөліктері бір-біріне немесе олармен жанасатын денеге сұйық пен газдың сығылу дәрежесіне тәуелді болатын күшпен әсер етеді. Мұндай әсер қысым деп аталатын шамамен сипатталады.

Тепе-теңдікте болатын сұйықты қарастырайық. Бұл—оның жеке бөліктері бір-біріне қатысты немесе өзіне шектесетін денелерге қатысты орын ауыстырмайды деген сөз. Сұйықтан ойша бір ауданды бөліп алайық (134-сурет). Сұйықтың осы ауданмен жанасатын бөліктері бір-біріне шамасы бойынша тең, бірақ қарама-қарсы ба-

ғытталған күшпен әсер етеді. Осы күштердің сипатын анықтау үшін әлгі ауданның бір жағындағы сұйықты ойша алып тастайық та, алып тасталған сұйықтың әсерін сұйықтың қалған бөліктерінің тепе-теңдік күйі бұзылмайтындай, бағыты мен шамасы сәйкес келетін күштермен алмастырайық. Бұл күштер  $\Delta S$ -ке нормаль болу керек, өйткені кері жағдайда олардың тангенциаль құраушысы сұйық бөлшектерін қозғалысқа келтірер еді де, тепе-теңдік бұзылған болар еді. Сондықтан, сұйықтың  $\Delta S$  ауданға әсер ететін барлық күштердің  $\Delta f$  тең әсерлі



134-сурет.

күші де осы ауданға нормаль бойынша бағытталған.  $\Delta f$  күшінің аудан бетінің бірлігіне қатынасы сұйықтағы қысым деп аталады. Сонымен,  $p$  қысымы анықтама бойынша мынаған тең:

$$p = \frac{\Delta f}{\Delta S}. \quad (51.1)$$

Егер сұйықтың  $\Delta S$  ауданға әсер ететін күші осы аудан бойынша бір қалыпты бөлінбесе, онда (51.1) өрнегі орташа қысымды анықтайды. Берілген нүктедегі қысымды табу үшін  $\Delta S$  ауданын нольге ұмтылдыру қажет. Демек, нүктедегі қысым мына өрнекпен анықталады:

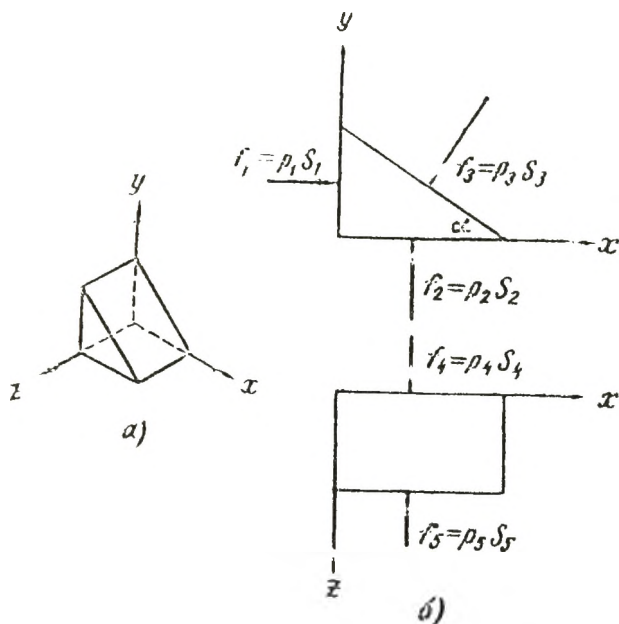
$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{df}{dS}. \quad (51.2)$$

Газдағы қысым да осы сияқты анықталады.

Қысым — скаляр шама, өйткені оның сұйықтың (немесе газдың) берілген нүктесіндегі шамасы қысым берілген  $\Delta S$  ауданының бағдарына тәуелді болмайды. Осы айтылған пікірді дәлелдеу үшін қатар принципін деп аталатынды пайдаланамыз: бұл принцип бойынша сұйықтың кез келген көлемін (тепе-теңдік шартын бұзбай) тығыздығы сұйықтың тығыздығына тең қатты денемен алмастыруға болады.

Қарастырылып отырған нүктенің маңайынан ойша үш жақты призма түріндегі сұйықтың қатайған бөлігін бөліп алайық. Бұл призманың перспективтегі кескіні 135 а-суретте, ал екі проекциядағы кескіні 135 б-суретте көрсетілген. Призманың әрбір жағына оған нормаль бойынша бағытталған беттік күш әсер етеді, ол сәйкес қысымның бет шамасына көбейтіндісіне тең. Сонымен

қатар, призмаға осы призманың салмағына тең көлемдік күш әсер етеді. Бет дененің сызықтық өлшемінің екінші дәрежесіне, ал көлем оның үшінші дәрежесіне пропорционал болғандықтан да, призманың өлшемін кішірейткен кезде көлемдік күш нольге беттік күштен гөрі әлдеқайда жылдамдырақ ұмтылатын болады. Сайып келгенде, бөліп көрсетілген көлемді нүктеге қабыстыра отырып, біздің шекке көшетіндігіміз есте болса, көлемдік



135-сурет.

күшті баяндауымыздың алғашқы кезінен-ақ елемеуге болады. Сонда тепе-теңдік шарты беттік күштің қосындысы нольге тең болуға тиіс деген қорытындыға келтіреді. 135, б-суреттегі  $x$ ,  $y$  және  $z$  осьтерінің проекцияларда көрсетілген тепе-теңдік шарты былай жазылады:

$$\rho_1 S_1 = \rho_3 S_3 \sin \alpha, \quad \rho_2 S_2 = \rho_3 S_3 \cos \alpha, \quad \rho_4 S_4 = \rho_5 S_5. \quad (51.3)$$

135, б-суретте көрініп тұрғанындай, призма жақтары беттерінің арасында мынадай қатыс болады:

$$S_1 = S_3 \sin \alpha, \quad S_2 = S_3 \cos \alpha, \quad S_4 = S_5,$$

осыларды ескергенде (51.3) формуласы мынадай түрге келеді:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3, \quad \rho_4 = \rho_5. \quad (51.4)$$

Бөліп алынған көлем нүктеге қабысатындағы шекке

көшу ұйғарымы салдарынан,  $p_1, p_2, p_3$  т. с. с. қысымдардың сұйықтың бір ғана нүктесіне қатысы бар деуге болады.

Призманың кеңістіктегі бағдарлануы мен  $\alpha$  бұрышы еркінше алынғандықтан, (51.4) формуласынан қысымның шамасы осы қысымның қатысы бар ауданның бағдарына тәуелді емес деген қорытынды шығады, дәлелдегіміз келгені де осы болатын.

Бір қарағанда векторлық шамаға (күшке) пропорционал қысымның скаляр шама болуы таң қаларлық. Алайда  $\Delta S$  ауданын да вектор ретінде қарастыруға болатындығы есте болу керек, өйткені ол вектордың  $\Delta S$ -ке бағытталған нормалы, яғни ауданға әсер ететін күш векторы сияқты бағыты болады. Демек, қысым шын мәнінде екі  $\Delta f$  және  $\Delta S$  коллинеарлы векторларының қатынасына тең, ал мұндай шама скаляр шама екендігі белгілі.

Қысымның бірліктері:

1) СИ системасында  $n/m^2$ ;

2) СГС системасында —  $дин/cm^2$  болып табылады.

Мұнымен қатар қысымды өлшеу үшін алдыңғы системадан тыс мынадай бірліктер жиі қолданылады:

1)  $1 кгс/cm^2$ -қа тең техникалық атмосфера (*ат* деп белгіленеді);

2) биіктігі 760 мм сынап бағанасындағы қысымға тең физикалық немесе қалыпты атмосфера (*атм* деп белгіленеді).

Физикада қысымды көбінесе миллиметр есебімен алынған сынап бағанасымен өлшейді. Қысымның әр түрлі бірліктерінің арасында мынадай қатыстар болады:

$$1 \text{ мм сын. бағ.} = 0,001 \text{ м} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/сек}^2 = 133 \text{ н/м}^2;$$

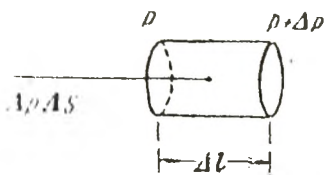
$$1 \text{ атм} = 760 \cdot 133 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 = 1,033 \text{ ат};$$

$$1 \text{ ат} = 9,81 \cdot 10^4 = 0,981 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 = 0,068 \text{ атм.}$$

## § 52. Қысымның тыныштықтағы сұйық пен газда таралуы

Егер де сұйықта (немесе газда) көлемдік күш болмаса, онда теңбе-теңдік шарты барлық көлемдегі қысымның тұрақтылығы болар еді (Паскаль заңы). Шынында, сұйықтан биіктігі  $\Delta l$  және  $\Delta S$  табаны еркінше бағытталған кішкене цилиндрлік көлем бөліп алайық (136-су-

рет). Егер де бір-бірінен  $\Delta l$  қашықтығында тұрған нүктелердегі қысымның айырмашылығы  $\Delta p$  болса, онда цилиндр осінің бойымен  $\Delta p \Delta S$  күші әсер етер еді, нәтижесінде сұйық қозғалысқа келіп, тепе-теңдік бұзылар



136-сурет.



137-сурет.

еді. Демек, көлемдік күш жоқ болған кезде тепе-теңдік күйінде сұйықтың кез келген жерінде  $\frac{\Delta p}{\Delta l}$  шарты орындалуға тиіс, осыдан  $p = \text{const}$  деген қорытынды шығады.

Көлемдік күш бар кездегі қысымның таралуын қарастырайық. Сұйықтан көлемі қатты горизонталь орналасқан цилиндр түріндегі кішкене  $\Delta S$  қимасын бөліп алайық (137-сурет). Көлемдік күш вертикаль бойымен бағытталғандықтан, цилиндр осінің бойымен тек екі күш ғана әсер ететін болады:  $p_1 \Delta S$  және  $p_2 \Delta S$ . Тепе-теңдік шартынан мынау шығады:  $p_1 = p_2$ ; демек, бір деңгейде (яғни бір горизонталь жазықтықта) жатқан сұйық нүктелеріндегі қысымның шамасы бірдей болады.

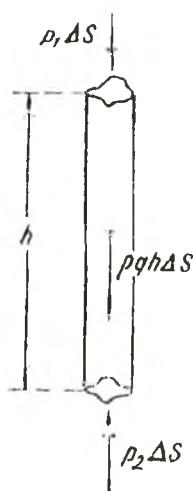
Енді сұйықтың қатайған цилиндрлік көлемін, оның осі вертикаль болатындай етіп, бөліп алайық (138-сурет) Бұл жағдайда цилиндр осінің бойымен оның табанына қысым күшінен басқа, тағы да  $\rho g h \Delta S$  көлемдік күші әсер ететін болады ( $\rho$  — сұйықтың тығыздығы,  $h$  — цилиндрдің биіктігі) да, тепе-теңдік шартының түрі мынадай болады:

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho g h \Delta S.$$

$\Delta S$ -ке қысқартып, мынаны табамыз:

$$p_2 = p_1 + \rho g h. \quad (52.1)$$

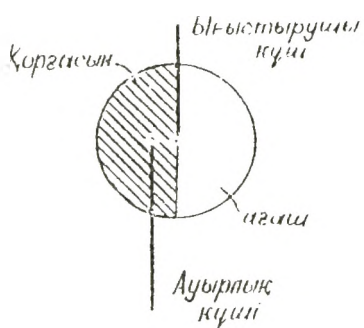
Сонымен, әр түрлі екі деңгейдегі қысымның сан жағынан осы деңгейлердің арасындағы көлденең қимасының ауданы бірге тең сұйықтың вертикаль бағанасының салмағына тең шама болады.



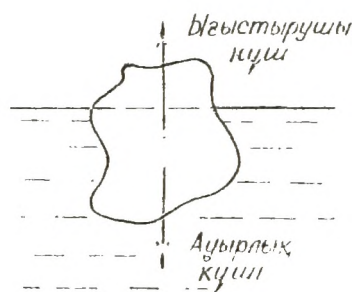
138-сурет.

## § 53. Ығыстырушы күш

Өр түрлі денгейдегі қысымның бірдей болмау салдары сұйық немесе газ ішіндегі денеге әсер ететін ығыстырушы күштің (Архимед күшінің) барын көрсетеді. Ығыстырушы күштің шамасы мен бағытын табу үшін денені сұйықтың (газдың) қатайған көлемімен алмастырайық. Бұл көлем тепе-теңдікте болатын болғандықтан, оның салмағының күші осы көлемнің бетіне әсер ететін барлық қысым күшінің тең әсерлі күшімен теңгерілуге тиіс. Осындай беттік күштер дененің өзіне де әсер етеді, ал олардың тең әсерлі күші ығыстырушы күшті береді.



139-сурет.



140-сурет.

Осы айтылғаннан ығыстырушы күштің дене көлеміндегі сұйықтың салмағына тең болып, вертикаль бойымен жоғары қарай әсер ететіндігі шығады. Қатайған көлем оның кез келген бағытында тепе-теңдікте болады (талғаусыз тепе-теңдік күй). Демек, ығыстырушы күш түскен нүкте — дене көлемінің ауырлық центрімен дәл келеді. Дененің өзінің ауырлық центрі — дененің тығыздығы барлық нүктеде бірдей болған жағдайда ғана көлемнің ауырлық центрімен дәл келеді. Олай болмаған жағдайда олар дәл келмейді. Мысал үшін бір жартысы қорғасыннан, ал екінші жартысы ағаштан құралған шарды алайық (139-сурет). Бұл жағдайда ығыстырушы күш шардың центріне түсірілетін болады, ал ауырлық күшінің түсу нүктесі қорғасын жартысына қарай ығыстырылады.

Егер дененің орташа тығыздығы сұйықтың тығыздығынан гөрі аз болса, онда тепе-теңдік күйіндегі дене

сұйыққа тек ішінара батып тұрады. Сонда ауырлық күші (дененің ауырлық центріне түсірілген) мен ығыстырушы күш (дене көлемінің сұйыққа батырылған бөлігінің ауырлық центріне түсірілген) шамасы бойынша тең болуға және бір түзудің бойымен әсер етуге тиіс (140-сурет). Өйтпеген күнде олар айналдырушы моментті тудырады да, тепе-теңдік бұзылады.

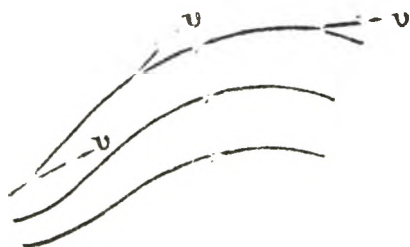


## VIII ТАРАУ ГИДРОДИНАМИКА

### § 54. Ағын түтігі мен сызығы. Сорғалаудың үздіксіздігі

Сұйық қозғалысын сипаттау үшін, сұйықтың әрбір бөлшегінің уақыт бойынша алынған функциясы есебінде траекториясы мен жылдамдығын беруге болады. Сипаттаудың бұл тәсілін Лагранж жасаған. Бірақ сұйық бөлшектерін қадағалаудың орнына, кеңістіктің жеке нүктелерін бақылап берілген нүкте арқылы өткен сұйық бөлшегінің жылдамдығын белгілеп отыруға болады. Екінші тәсіл Эйлер әдісі деп аталады.

Кеңістіктің әрбір нүктесі үшін жылдамдық векторын уақыттың функциясы ретінде көрсете отырып, сұйық қозғалысының күйін анықтауға болады. Кеңістіктің барлық нүктесі үшін берілген  $v$  векторларының жиынтығы жылдамдық векторының өрісін жасайды. Оны былай кескіндеуге болады. Қозғалыстағы сұйық ішінен, оның әрбір нүктесіне жүргізілген жанама  $v$  векторының



141-сурет.

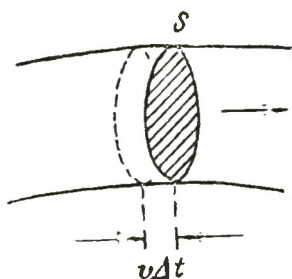
ның бағытына дәл келетіндей етіп сызық жүргіземіз (141-сурет) Бұл сызықтар ағын сызықтары деп аталады.

Ағын сызықтарын, олардың қоюлығы (ол  $\Delta V$  сызық санының сол сызықтар ағыны тесіп өтетін әрі оған перпендикуляр орналасқан  $\Delta S$  ауданға қатынасы бойынша сипатталады) берілген орындағы жылдамдықтың шамасына пропорционал болатындай етіп жүргізуге келіселеік.

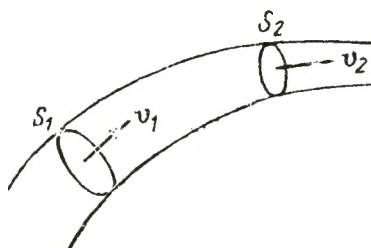
Сонда ағын сызықтарының бейнесі бойынша  $v$  векторының бағыты жөнінде ғана емес, кеңістіктің әрбір нүктесіндегі оның шамасы жөнінде найымдауға болады: жылдамдық көп болған жерде ағын сызықтары қою, ал керісінше, жылдамдық аз болған жерде ағын сызықтары сирек болады.

$v$  векторының шамасы мен бағыты уақыт өткен сайын әр нүктеде өзгеріп отыратындықтан, ағын сызықтарының бейнесі де үздіксіз өзгеріп отырады. Егер жылдамдық векторы кеңістіктің әрбір нүктесінде тұрақты болып қалса, онда ағын орныққан немесе *стационар ағыс* деп аталады. Стационар ағыс кезінде сұйықтың кез келген бөлшегі кеңістіктің берілген нүктесі арқылы  $v$  шамасының белгілі бір мәнінде ғана өтеді. Стационар ағыс кезінде ағын сызықтарының бейнесі өзгеріссіз қалады және бұл жағдайда ағын сызықтары бөлшек траекториясымен сәйкес келеді.

Ағын сызықтарымен шектелген сұйық бөлігі *ағын түтігі* деп аталады. Ағын сызықтарының әрбір нүктесіне жанама болатын  $v$  векторы ағын түтігінің бетіне де жанама болады; демек, сұйық бөлшектер өзінің қозғалысында ағын түтігінің қабырғасын кесіп өтпейді.



142-сурет.



143-сурет.

Ағын түтігінің жылдамдық бағытына перпендикуляр орналасқан  $S$  қимасын алайық (142-сурет). Осы қиманың барлық нүктесіндегі сұйық бөлшектерінің жылдамдығын бірдей деп ұйғаралық.  $\Delta t$  уақыт ішінде  $S$  қимасы арқылы,  $S$ -ден қашықтығы алғашқы кезеңде  $v\Delta t$  мәнінен артамайтын бөлшектің бәрі өтеді. Демек,  $\Delta t$  уақыт ішінде  $S$  қимасы арқылы көлемі  $Sv\Delta t$ -ге тең, ал бірақ уақыт ішінде көлемі  $Sv$ -ге тең сұйық ағып өтеді. Әрбір көлденең қимасындағы жылдамдығы тұрақты деп есептеуге болатындай өте жіңішке ағын түтігін алайық. Егер сұйық

сығылмайтын (яғни оның тығыздығы барлық жерінде бірдей және өзгере алмайды) болса, онда  $S_1$  және  $S_2$  қималарының (143-сурет) арасындағы сұйық мөлшері өзгеріссіз қалады. Бұдан  $S_1$  және  $S_2$  қималары арқылы уақыт бірлігі ішінде ағып өтетін сұйық көлемі бірдей болатындығы көрінеді:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

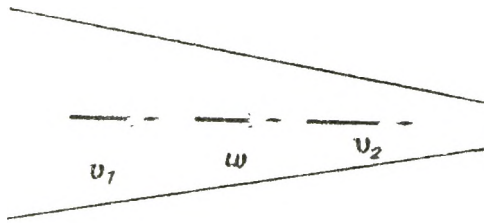
(ағын түтігінің бүйір беті арқылы сұйық бөлшектері өтпейтінін еске салайық)

Жоғарыда келтірілген тұжырым ағын түтігінің кез келген қимасының жұбы  $S_1$  және  $S_2$  үшін дұрыс болады. Демек, сығылмайтын сұйық үшін белгілі бір ағын түтігінің кез келген қимасындағы  $Sv$  шамасы тұрақты болады:

$$Sv = \text{const.} \quad (54.1)$$

Біздің алып отырған нәтижеміз сорғалаудың үздіксіздігі туралы теореманың мазмұны болып табылады.

(54.1) қатысынан ағын түтігінің қимасы айнымалы болғанда, сығылмайтын сұйық бөлшектерінің үдей қозғалатындығы көрінеді. Горизонталь ағын түтігінде (144-сурет) бұл үдеу түтіктің осі бойындағы қысымның тұрақты болмауы — жылдамдық аз жерде қысымның үлкен, және керісінше, болуы жағдайларынан ғана пайда болады.



144-сурет.

Ағыс жылдамдығы мен қысымы арасындағы байланыс келесі параграфта тағайындалады.

Сорғының үздіксіздігі туралы теореманы нақты сұйықтарға, ал оның сығылғыштығын ескермеуге болатын жағдайда, газдарға да қолдануға болады. Жүргізілген есептеулерге қарағанда дыбыс жылдамдығынан төмен жылдамдықпен қозғалған сұйық пен газды едәуір үлкен дәлдікпен сығылмайды деп есептеуге болады.

## § 55. Бернулли теңдеуі

Сұйық қозғалысын қарастыра отырып, көп жағдайда оның бір бөлігінің басқа бөліктерімен салыстырған-

дағы орын ауыстыруын үйкеліс күштерінің әсеріне байланысты болмайды деп есептеуге болады. Ішкі үйкелісі (тұтқырлығы) мүлдем байқалмайтын сұйық идеал сұйық деп аталады. †

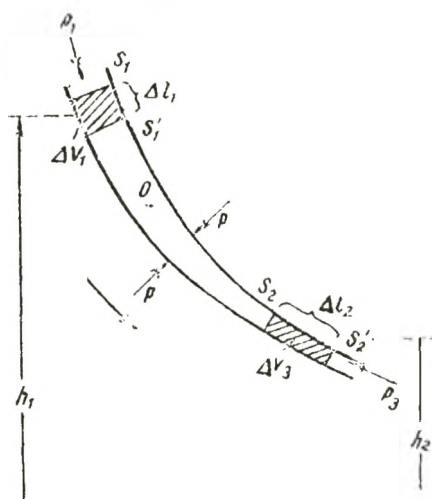
Стационар ағатын идеал сұйық ішінен қимасы шағын ағын түтігін бөліп алайық (145-сурет). Ағын түтігінің қабырғаларымен шектелген және  $S_1$  және  $S_2$  қималары ағын сызықтарына перпендикуляр сұйық көлемін қарастырайық.  $\Delta t$  уақыт ішінде бұл көлем ағын түтігінің бойымен жылжиды, сонымен қатар  $S_1$  қимасы  $\Delta l_1$  жол жүріп  $S_1'$  қалпына, ал  $S_2$  қимасы  $\Delta l_2$  жол жүріп  $S_2'$  қалпына ауысады. Сорғалаудың үздіксіздігі негізінде штрихталған көлемдер шамасы бірдей болады:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3$

Сұйықтың әрбір бөлшегінің энергиясы оның кинетикалық энергиясы мен жердің тартылыс күші өрісіндегі потенциялық энергиясынан тұрады.

Ағыстың стационар болуы нәтижесінде,  $\Delta t$  уақыт өткен соң, қарастырылып отырған көлемнің штрихталмаған бөлігінің кез келген нүктесіндегі (мысалы, 145-суреттегі  $O$  нүктесін қарандар) бөлшектің жылдамдығы (демек, кинетикалық энергияны да) уақыттың бастапқы мезетінде дәл осы нүктеде болған бөлшектің жылдамдығымен бірдей болады.

Сондықтан барлық қарастырылатын көлемдегі  $\Delta E$  энергия өсімшесін  $\Delta V_1$  және  $\Delta V_2$  штрихталған көлемдердегі энергиялардың айырмасы ретінде есептеп шығаруға болады.

Ағын түтігінің қимасы мен  $\Delta l$  кесіндісін, әрбір штрихталған көлемнің барлық нүктесіндегі  $v$  жылдамдығы,  $P$  қысымы және  $h$  биіктігі бірдей мәнге ие болатындай өте шағын етіп алайық. Онда энергия өсімшесі былай жазылады:



145-сурет.

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (55.1)$$

( $\rho$  — сұйықтың тығыздығы)

Идеал сұйықта үйкеліс күші болмайды. Сондықтан энергия өсімшесі (55.1) қысым күштерінің бөліп алынған көлемде жасаған жұмысына тең болуға тиіс. Бүйір беттегі қысым күші әрбір нүктеде өзі түсірілген бөлшектің орын ауыстыру бағытына перпендикуляр болады. Осының салдарынан жұмыс істемейді.  $S_1$  және  $S_2$  қимасына түсірілген күштер ғана нольге тең болмайды. Бұл жұмыс мынаған тең.

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (55.2)$$

(55.1) және (55.2) өрнектерін теңестіріп, оларды  $\Delta V$  шамасына қысқартып және индекстері бірдей мүшелерді теңдіктің бір жағына шығарсақ, төмендегі теңдікті аламыз:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (55.3)$$

$S_1$  және  $S_2$  қималары қалауымызша алынған. Сондықтан ағын түтігінің кез келген қимасында  $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$  өрнегінің мәні бірдей болады. Қорыту кезінде жасалған жору бойынша  $S$  көлденең қимасы нольге ұмтылғанда ғана, яғни ағын түтігін созғанда ғана (55.3) теңдеуі толық дәл бола алады. Сонымен (55.3) теңдеуінің сол және оң жағында тұрған  $\rho$ ,  $v$  және  $h$  шамаларын бір ғана ағын сызығының кез келген екі нүктесіне қатысты деп қарастыру керек.

Алынған нәтижені былай тұжырымдауға болады: стационар ағатын идеал сұйықтың кез келген ағын сызығының бойында мына шарт орындалады:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (55.4)$$

(55.4) теңдеуі немесе оған мәндес (55.3) теңдеуі Бернулли теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеуді идеал сұйық үшін алғанымызға қарамастан, ол ішкі үйкелісі онша үлкен болмайтын нақты сұйық үшін де орындалады.

Бернулли теңдеуінен шығатын кейбір қорытындыларды қарастырайық. Сұйық, барлық нүктесіндегі жылдам-

дығының шамасы бірдей болатындай, ақсын делік. Онда (55.3) бойынша кез келген ағын сызығының қалауымызша алынған екі нүктесі үшін мына теңдік орындалады:

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1),$$

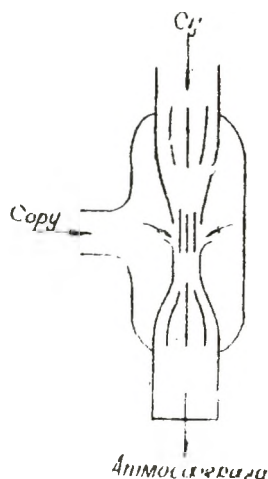
бұдан бұл жағдайдағы ағын сызықтарының таралып орналасуы, ақпайтын сұйықтағыдай болатындығы байқалады [(52.1) өрнегін қараңыз].

Горизонталь ағын сызығы үшін (55.3) шарты мынадай түрде жазылады:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

яғни жылдамдық көп болған нүктелерде қысым төмен болады (бұл сапалық түрде өткен параграфта көрсетілген болатын).

Ағын жылдамдығы көп болған жерде қысымның төмендеуі су ағызғыш насос құрылысының негізіне алынған. Судың ағыны ұшы атмосфераға қарай ашылған түтік арқылы, оның шығар жеріндегі қысымы атмосфералық қысымға тең болатындай беріледі. Түтіктің жіңішке жерінде су үлкен жылдамдықпен ағатындықтан, бұл жердегі қысым атмосфералық қысымнан аз болады. Мұндай қысым түтіктің жіңішке жерімен жалғасып, оны қоршап тұрған камера насосында да пайда болады. Сорып алынған көлемді камера насосымен қоса отырып, одан ауаны (немесе басқа бір газды) 100 мм сынап бағанасына дейінгі қысымда сорып алуға болады. Сорылған ауа су ағынымен ілесіп, атмосфераға шығып кетеді.

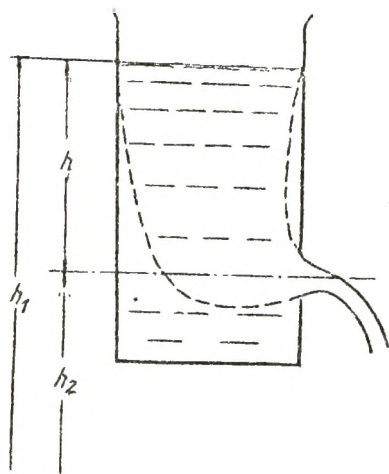


146-сурет.

Бернулли теңдеуін беті ашық кең ыдыстағы сұйықтың шағын тесіктен ағып шығу жағдайына қолданайық. Сұйық ішінен, қимасы бір жағынан ыдыстағы сұйықтың ашық бетін, ал екінші жағынан сұйық ағатын тесікті<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Дәлірек айтқанда, сорғының тесіктен шығар жердегі қимасы. Егер арнаулы шара қолданылмаса, онда сорғының қимасы тесіктің қимасынан кіші болады.

қамтитын ағын түтігін алайық (147-сурет) Бұл қиманың әрқайсысында белгілі бір бастапқы деңгейдің үстіндегі жылдамдық пен биіктікті бірдей деп санауға



147-сурет.

болатындықтан, оларға осындай жору негізінде алынған (55.3) теңдеуін қолдануға болады. Одан әрі, екі қимадағы қысым да атмосфералық қысымға тең болғандықтан, олар бірдей болады. Сонымен қатар, кең ыдыстың ашық бетінің қозғалу жылдамдығы нольге тең. Осы айтылғанды ескеріп, (55.3) теңдеуін берілген жағдайға қолдануға болатындай етіп, мынадай түрде жазуға болады:

$$\rho gh_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh_2,$$

мұндағы  $v$  — сұйықтың тесіктен ағып шыққандағы жылдамдығы. Осы теңдеуді  $\rho$ -ға қысқартып және  $h = h_1 - h_2$  — сұйықтың ашық бетінің тесік үстінен биіктігін енгізе отырып, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$\frac{v^2}{2} = gh, \text{ бұдан } v = \sqrt{2gh}. \quad (55.5)$$

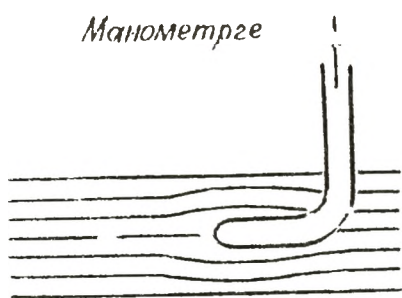
Бұл формула Торричелли формуласы деп аталады.

Сонымен, сұйықтың ашық бетінен  $h$  тереңдікте орналасқан тесіктен ағып шыққандағы жылдамдығы, кез келген дененің  $h$  биіктіктен құлағанда алатын жылдамдығына тең. Мынаны ескергеніміз жөн: бұл нәтиже сұйықты идеал сұйық деп ұйғарудан алынды. Нақты сұйық үшін ағып шығу жылдамдығы төмен болады, сұйықтың тұтқырлығы үлкен болған сайын, ол (55.5) мәнінен көбірек алшақтайды.

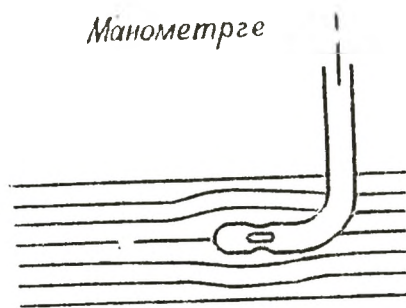
## § 56. Ағып жатқан сұйықтағы қысымды өлшеу

Өткен параграфта біз сұйықтағы қысым оның ағыс жылдамдығының шамасына байланысты екенін анықтадық. Қысымды өлшеу үшін сұйыққа енгізілген прибор сұйықтың қозғалу сипатын бұзады, демек, өлшенетін қысымның шамасын да өзгертуге болады. Үшіндағы тесігі

ағынға қарай бағытталған имек манометрлік түтікті сұйық ішіне орналастырайық (148-сурет) Мұндай түтікті Пито түтігі деп атайды. Ұшы түтік тесігінің центріне тірелетін ағын сызығын қарастырайық. Қарастырылып отырған ағын сызығының өн бойындағы жылдамдық түтіктен едәуір алыс қашықтықтағы ұйтқымаған ағын үшін  $v$  шамасынан бастап тесіктің дәл алдындағы



148-сурет.



149-сурет.

польге дейін өзгереді. Бернулли теңдеуі бойынша тесік алдындағы (сондай-ақ, манометрлік түтіктегі) қысым ұйтқымаған ағындағы  $p$  қысымнан  $\rho v^2/2$  шамасына артық болады. Демек, Пито түтігімен жалғасқан манометр

$$p' = p + \frac{\rho v^2}{2} \quad (56.1)$$

шамасына тең қысымды көрсетеді.

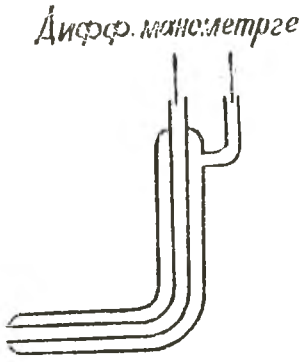
Қысыммен өлшемдес  $\rho v^2/2$  қосылғышты динамикалық қысым деп атайды.  $p$  қысымын статикалық қысым деп атау келісілген. Статикалық және динамикалық қысымның қосындысына тең  $p'$  қысымы толық қысым деп аталады. Сонымен Пито түтігі арқылы (56.1) теңдеуіндегі толық қысымды өлшеуге болады.

Егер имек жіңішке түтіктің бүйірінен тесіктер жасалса, онда мұндай тесіктер маңындағы жылдамдық (сондай-ақ, қысым) ұйтқымаған ағындағы жылдамдықпен (қысыммен де) шамалас болады (149-сурет) Сондықтан  $z$  о н д деп аталатын мұндай түтікке қосылған манометр, сұйықтағы  $p$  статикалық қысымды көрсетеді.

Толық және статикалық қысымды біле отырып,  $\rho v^2/2$  динамикалық қысымды, демек,  $v$  ағын жылдамдығын



(сұйықтың тығыздығы белгілі деп саналады) табуға болады. Егер Пито түтігі мен зондты 150-суретте көрсетілгендей етіп біріктіріп, оны дифференциалдық манометрдің (яғни қысымның айырмасын өлшейтін манометрдің) әр түрлі тармағына қоссақ, онда манометр тікелей динамикалық қысымды көрсетеді. Манометрді  $v$  жылдамдықтың мәндері бойынша градуирлеп, сұйықтың ағыс жылдамдығын өлшейтін приборды алуға болады.

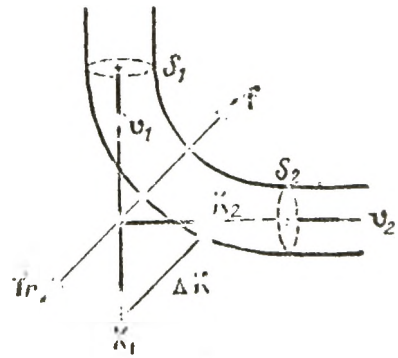


150-сурет.

### § 57. Сұйық қозғалысына импульстың сақталу заңын қолдану

Басқа денелер тәрізді сұйық пен газға да импульстың сақталу заңы қолданылады. Бұл заңды кейбір есептерді шешуге пайдаланайық.

Ағып жатқан сұйықтың имек трубаның қабырғасына түсіретін реакциясы. Имек трубада сығылмайтын сұйықтың стационар ағыны орнығып болды деп жорыық (151-сурет) Есепті жеңілдету үшін  $S$  қимасы тұрақты труба алайық. Онда сорғының үздіксіздігі нәтижесінде әрбір қимадағы жылдамдық шама жағынан бірдей және  $v$ -ге тең болады.



151-сурет.

Трубаның  $S_1$  және  $S_2$  қималарымен шектелген имек учаскесінің көлемін қарастырайық.  $\Delta t$  уақыт ішінде  $S_1$  қимасы арқылы бұл көлемге импульсы<sup>1</sup>  $K = \rho S v v_1 \Delta t$  шамасына тең  $S v \Delta t$  сұйық мөлшері ағып келеді. Бір мезгілде  $S_2$  қимасы арқылы осы көлемнен мөлшері дәл сондай, импульсы  $K = \rho S v v_2 \Delta t$  шамасындай сұйық ағып өтеді. Сонымен, трубаның имек учаскесінің

<sup>1</sup> Қысым импульстағыдай  $p$  әрнімен белгіленеді. Сондықтан бұл түсініспеушілікке келтірген жағдайда оны  $K$  әрнімен белгілейтін боламыз.

$\Delta K = K_2 - K_1 = \rho S v (v_2 - v_1) \Delta t$  шамасындай импульс өсімшесін береді. Уақыт бірлігі ішіндегі импульс өсімшесі әсер етуші күшке тең екендігін білеміз. Демек, труба қабырғалары сұйыққа тең әсерлі  $f = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho S v (v_2 - v_1)$  күшпен әсер етеді. Ньютонның үшінші заңы бойынша ағып жатқан сұйық труба қабырғасына

$$f_r = \rho S v (v_1 - v_2) \quad (57.1)$$

шамасына тең тең әсерлі күшпен әсер етеді.  $f_r$  күшін ағып жатқан сұйықтың труба қабырғасына түсіретін реакциясы деп атайды.

**Ағып шыққан сорғының реакциясы.** Ыдыстағы тесіктен ағып шыққан сұйық сорғысы (152-сурет)  $\Delta t$  уақыт ішінде өзімен бірге  $\Delta K = \rho S v v \Delta t$  ( $\rho$  — сұйықтың тығыздығы,  $S$  — тесіктің ауданы,  $v$  — сорғының ағып шығу жылдамдығы) импульсты ала кетеді. Бұл импульс ағып шыққан сұйыққа ыдыстан беріледі. Ньютонның үшінші заңы бойынша ағып шыққан сұйық тарапынан  $\Delta t$  уақыт ішінде —  $\Delta K$  шамасына тең импульс алады, яғни

$$f_r = - \frac{\Delta K}{\Delta t} = - \rho S v v \quad (57.2)$$

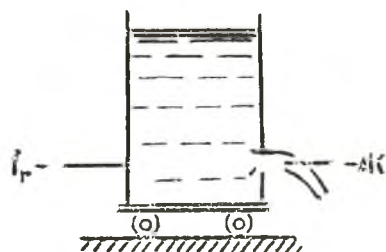
шамасындай күштің әсерін сезінеді.

Бұл күш ағып шыққан сорғының реакциясы деп аталады. Егер ыдысты арбашаға орнатсақ, онда  $f_r$  күшінің әсерінен ол сорғы бағытына қарсы бағытта қозғалады.

Сұйықтың тесіктен ағып шыққандағы жылдамдығы үшін (55.5) өрнегін пайдаланып,  $f_r$  күшінің шамасын табайық:

$$f_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \quad (57.3)$$

Егер, бір қарағанда  $f_r$  күші шама жағынан сұйық тарапынан тесікті жауып тұрған тығынға әсер ететін гидростатикалық қысым күшіне сәйкес келгендей көрінсе, онда  $f_r$  күші  $gh\rho S$  шамасына тең болар еді. Шынында да,  $f_r$  күші 2 есе үлкен болады. Бұл жағдай мынамен түсінді-



152-сурет.

ріледі: сорғының агып шығуы кезінде ыдыстағы сұйық қозғалысы қысымның қайта таралуына әкеп соғады. Тесікке қарсы жатқан қабырға маңындағы қысым, тесік орналасқан қабырға маңындағы қысымнан аздап артық болады.

Реактивтік двигательдер мен ракеталардың жұмысы агып шыққан газ сорғысының реакциясына негізделген. Атмосфераның болуын қажет етпей реактивтік қозғалыс космостық кеңістігіне ұшу үшін пайдаланылады.

Планета аралық қатынас теориясының негізін салған орыс оқымыстысы және өнертапқышы К. Э. Циолковский (1857—1935) болды. Ол ракетаның ұшу теориясын жасады және реактивтік аппараттарды планета аралық қатынасқа пайдалану мүмкіндігін дәлелдеді. Отынды толық пайдаланған соң әрбір сатысы ракетадан бөлініп, келесі сатысы іске қосылатын құрамды ракетаның теориясын да Циолковский жасап жетілдірді. Қосмос кеңістігін зерттеп игеруде Совет одағының жетекші ролін қамтамасыз еткен совет оқымыстылары мен инженерлері Циолковский идеяларын одан әрі дамытып, жүзеге асырды.

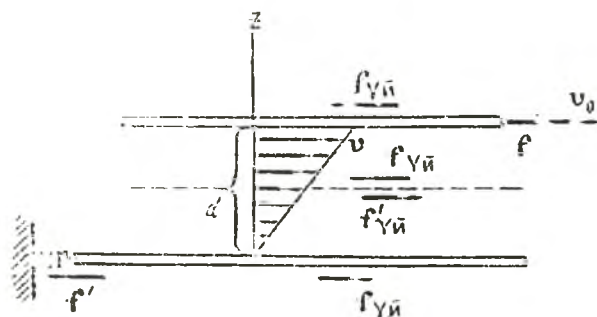
### § 58. Ішкі үйкеліс күштері

Идеал сұйық, яғни үйкеліссіз сұйық абстракция болып саналады. Барлық реал сұйық пен газдарға тән нәрсе оның көп не аз дәрежеде тұтқыр болуы немесе ішкі үйкелістің болуы. Тұтқырлық сұйықта немесе газда болатын қозғалыстың, оны туғызған себептер әсері тоқталғаннан кейін, біртіндеп бәсеңдейтіндігінсіз көрінеді.

Ішкі үйкеліс күші бағынатын заңдылықтарды айқындау үшін, мынадай тәжірибені қарастырайық. Сұйыққа сызықтық өлшемі олардың арақашықтығы  $d$ -ден едәуір артық бір-біріне параллель екі пластина батырылған (153-сурет). Төменгі пластинаны өз орнында қалып, жоғарғы пластина төменгімен салыстырғанда  $v_0$  жылдамдықпен қозғалысқа келтіріледі. Тәжірибе жоғарғы пластинаны тұрақты  $v_0$  жылдамдықпен орын ауыстыру үшін оған шама жағынан тұрақты белгілі бір  $F$  күшпен әсер ету керек екендігін көрсетеді. Пластина үдеу алмады, ендеше, бұл күштің әсері шама жағынан тең, бағыты жағынан қарама-қарсы күшпен теңгеріледі. Сұйық ішін-

де қозғалған пластинаға әсер ететін бұл күш үйкеліс күші болатыны айқын оны  $f$  деп белгілейік.

Пластина жылдамдығы  $v_0$ , пластина ауданы  $S$  және



153-сурет.

олардың ара қашықтығы  $d$  шамаларын құбылта отырып, мына формуланы аламыз:

$$f_{y\bar{y}} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (58.1)$$

мұндағы  $\eta$  — сұйықтың күйіне (мысалы, температурасына) және табиғатына тәуелді пропорционалдық коэффициент, мұны ішкі үйкеліс коэффициенті немесе тұтқырлық коэффициенті, немесе сұйықтың (газдың) жай ғана тұтқырлығы деп аталады.

Жоғарғы пластина қозғалғанда төменгісі де шама жағынан  $f_{y\bar{y}}$  күшіне тең,  $f'_{y\bar{y}}$  күшінің әсерінде болады. Төменгі пластина қозғалмау үшін,  $f'_{y\bar{y}}$  күшін  $f'$  күші арқылы теңестіру керек.

Сонымен, сұйыққа батырылған екі пластинаны бір-біріне қатысты қозғағанда олардың арасында (58.1) күшімен сипатталатын өз ара әсер пайда болады. Пластиналардың бір-біріне әсері, осы пластиналардың арасында орналасқан сұйықтың бір қабатынан екіншісіне берілу арқылы пайда болатындығы айқын. Егер қуыстың кез келген жерінен пластиналарға параллель ойша жазықтық жүргізсек (153-суреттегі пунктир сызықты қараңыз), онда сұйықтың осы жазықтық астында жатқан бөлігі  $f_{y\bar{y}}$  күшімен, ал сұйықтың жазықтықтан төмен жатқан бөлігі, өз кезегінде жазықтықтан төмен

жатқан бөлігіне  $f_{\gamma\delta}$  күшімен әсер етеді.  $f_{\gamma\delta}$  және  $f_{\gamma\delta}$  күштері (58.1) формуласымен анықталады. Сонымен, (58.1) формуласы пластиналарға әсер ететін үйкеліс күшін ғана емес, сұйықтың бір-бірімен жанасатын бөліктерінің арасындағы күшті де анықтайды.

Егер әр түрлі қабаттағы сұйық бөлшектерінің жылдамдығын зерттесек, онда олар пластиналарға параллель  $z$  бағытта сызықтық заңмен өзгереді екен (153-сурет):

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (58.2)$$

Пластиналарға тікелей жанасқан бөлшектер, оларға жабысып қалғандай болады да, пластиналардың жылдамдығындай жылдамдыққа ие болады. (58.2) формуласы бойынша

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \quad (58.3)$$

(58.3) теңдігін пайдаланып, ішкі үйкеліс күшіне арналған (58.1) формуланы мына түрге келтіруге болады:

$$f_{\gamma\delta} = \eta \frac{dv}{dz} S. \quad (58.4)$$

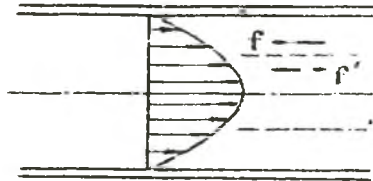
$\frac{dv}{dz}$  шамасы жылдамдықтың  $z$  осі бағытында қалай тез өзгертіндігін көрсетеді және ол жылдамдық градиенті (дәлірек айтқанда, бұл — жылдамдық градиентінің модулы; градиенттің өзі — вектор) деп аталады.

(58.4) формуласын жылдамдық сызықтық заң бойынша (бұл жағдайда жылдамдық градиенті тұрақты болады) өзгертін жағдай үшін алғанбыз. Бұл формула жылдамдығы қабаттан қабатқа өткенде өзгертін кез келген басқа заң үшін де дұрыс болады екен. Бұл жағдайда бір-бірімен шектескен екі қабат арасындағы үйкеліс күшін анықтау үшін,  $\frac{dv}{dz}$  градиентінің мәнін қабаттар арасын бөліп тұратын ойша жүргізілген бет өтетін жерден алуымыз керек. Мысалы, сұйық дөңгелек трубамен қозғалғанда жылдамдық труба қабырғаларында нольге, трубаның осінде ең жоғарғы мәніне тең болады. Ағыс жылдамдығы онша үлкен болмаса, кез келген радиус бойындағы жылдамдық мына заң бойынша өзгертіндігін көрсетуге болады:

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (58.5)$$

мұндағы  $R$  — труба радиусы,  $v_0$  — трубаның осіндегі жылдамдық,  $v$  — труба осінен  $r$  қашықтықтағы жылдамдық (154-сурет). Сұйық ішінен радиусы  $r$  цилиндрлік бөтті ойша жүргізейік. Бұл беттің әр жағында жатқан сұйық бөліктері бір-біріне, бет бірлігіне есептегенде шамасымына формула арқылы анықталатын, күшпен әсер етеді:

$$f = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \frac{2v_0 r}{R^2},$$



154-сурет.

яғни труба осінен бөлетін бетке дейінгі қашықтыққа пропорционал артады. [(58.4) формуласы ішкі үйкеліс күшінің модулін ғана беретіндіктен, (58.5) формуласын  $r$  бойынша дифференциалдағанда алынатын «—» таңбасын алып тастадық.]

Бұл параграфта айтылғандардың бәрінің сұйыққа ғана емес, газға да қатысы бар.

СИ системасындағы тұтқырлық бірлігі үшін 1 м-де мәні 1 м/сек болатын жылдамдық градиенті қабаттардың 1 м<sup>2</sup> жанасу бетінде 1 н үйкеліс күшін тудыратын тұтқырлық алынады. Бұл бірлік н·сек/м<sup>2</sup> деп белгіленеді.

СГС системасында — тұтқырлықтың бірліктер системасында пуаз (пз) алынады, бұл 1 см-де 1 см/сек жылдамдық градиенті қабаттардың 1 см<sup>2</sup> жанасу бетінде 1 дин үйкеліс күшін тудыратын тұтқырлыққа тең болады. 10<sup>-6</sup> пуазға тең бірлік микропуаз (мкпз) деп аталады.

Пуаз бен тұтқырлықтың СИ бірліктер системасындағы бірлігі арасында мынандай қатыс бар:

$$1 \text{ н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2 = 10 \text{ пз}.$$

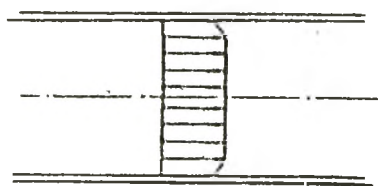
Тұтқырлық коэффициенті температураға байланысты болады және де сұйық пен газ үшін бұл байланыстың сипаты едәуір болады. Сұйықта тұтқырлық коэффициенті температураның артуына байланысты тым кеміп кетеді. Газда, керісінше, тұтқырлық коэффициенті температура артқан сайын өседі. Температураның өзгеруі кезінде  $\eta$ -ның өзгеріс-сипатындағы ерекшелік сұйықтар мен газдардағы ішкі үйкеліс механизмінің әр түрлі болатынын көрсетеді.

## § 59. Ламинарлық және турбуленттік ағыс

Сұйық (немесе газ) ағысының екі түрі байқалады. Бір жағдайда сұйық қабаттарға бөлінген сияқты болып араласпай бір-біріне қатысты сырғанаған тәрізді болады. Мұндай ағыс *ламинар*<sup>1</sup> (қатпарлы) деп аталады. Егер ламинар ағысқа боялған жіңішке сорғылар енгізсек, онда сорғы ағынның өн бойына жайылып кетпей сақталады, өйткені ламинар ағыстағы сұйық бөлшектері бір қабаттан екінші қабатқа өтпейді. Ламинарлық ағыс стационарлы болады.

Ағынның жылдамдығы немесе көлденең қимасы артқанда ағыс сипаты едәуір өзгереді. Сұйықтың қауырт орын ауысуы байқалады. Мұндай ағыс *турбулентті* деп аталады. Турбулентті ағыс кезінде сұйық бөлшектерінің әрбір жердегі жылдамдығы үнемі ретсіз өзгеріп отырады -- ағын стационарлы болмайды. Егер турбуленттік ағынға боялған жіңішке сорғы енгізсек, онда оны енгізген жерден сәл қашықтықта-ақ боялған сұйық ағын қимасының өн бойына біркелкі таралады.

154-суретте көрсетілген ағыс жылдамдығының труба осінен қашықтығына байланысты өзгеру сипаты ламинар ағыс жағдайына жатады.



155-сурет.

Турбуленттік ағыс кезінде труба қимасының әр нүктесіндегі жылдамдықтың орташа (уақыт бойынша) мәні туралы айтуға болады. Турбуленттік ағыс кезіндегі орташа жылдамдық «профилі» 155-суретте кескінделген. Труба қабырғаларының маңында жылдамдық ламинар ағысқа қарағанда күштірек өзгереді, бірақ қиманың басқа бөлігінде жылдамдық аз өзгереді.

Ағылшын ғалымы Рейнольдс ағыс сипаты төмендегі өлшемсіз шаманың мәніне тәуелді болатынын тағайындады: мұндағы

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (59.1)$$

$\rho$  — сұйықтың (не газдың) тығыздығы,  $v$  — ағынның орташа (трубаның қимасы бойынша) жылдамдығы,  $\eta$  —

<sup>1</sup> Латынша *lamina* тілше пластинканы білдіреді.

сұйықтың тұтқырлық коэффициенті,  $l$  — көлденең қимаға тән өлшем, мысалы, квадраттық қимадағы квадраттың қабырғалары, дөңгелек қимадағы радиус немесе диаметр т. с. с.<sup>1</sup>

(59.1) шамасы Рейнольдс саны деп аталады. Рейнольдс санының аз мәндерінде ламинар ағыс байқалады. Кризистік деп аталатын  $Re$  шамасының белгілі бір мәнінен бастап ағын турбулентті сипат алады. Егер дөңгелек трубаға тән өлшем үшін оның  $r$  радиусын алсақ, онда Рейнольдс санының мәні (бұл жағдайда ол  $Re = \rho v r / \eta$  түрінде болады) шамамен 1000-ға тең болады<sup>2</sup>. Рейнольдс санына қатынас түрінде сұйық қасиетіне оның  $\rho$  тығыздығы мен  $\eta$  тұтқырлық коэффициентіне — тәуелді сәтшама кіреді.

$$v = \frac{l}{\rho},$$

қатынасы кинематикалық тұтқырлық деп аталады.  $\nu$  шамасына қарағанда  $\eta$  шамасы динамикалық тұтқырлық деп аталады. Кинематикалық тұтқырлықты пайдаланып, Рейнольдс санын мынадай түрде жазуға болады:

$$Re = \frac{vl}{\nu}. \quad (59.3)$$

Рейнольдс саны трубадағы, каналдағы т. б. сұйық ағыны үшін ұқсастық критерийі қызметін атқарады. Егер әрбір ағынға  $Re$  шамасының белгілі бір мәні сәйкес келсе, онда қимасы әр түрлі трубалардағы әр түрлі сұйық (не газдың) ағынының сипаты бірдей болады.

## § 60. Сұйықтар мен газдардағы денелердің қозғалысы

Дене сұйық немесе газ ішінде<sup>3</sup> қозғалғанда оған тең әсерлі күштер әсер етеді. Оны  $R$  әрпімен белгілейік

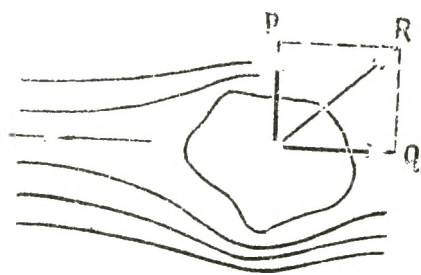
<sup>1</sup> (59.1) өрнегі өлшемсіз болып табылады, оқырмандардың көзін осыған жеткізу ұсынылады.

<sup>2</sup>  $l$  ретінде трубаның радиусын емес оның диаметрін алсақ,  $Re$  шамасының кризистік мәнін 2 есе арттыруға тиісті екенбіз.

<sup>3</sup> Дене сұйыққа қатысты тұрақты жылдамдықпен қозғалған кезде денеге әсер ететін күш, Галилейдің салыстырмалы принципімен сәйкес, сұйықтың осындай жылдамдықпен қозғалмайтын денеге қатысты қозғалысы жағдайындағыдай болатынын ескерте кетелік. 156-сурет соңғы жағдайға сәйкес келеді.



(156-сурет)  $R$  күшін біреуі  $Q$  дене қозғалысына қарсы (немесе денені қаптай ағып келе жатқан ағын қозғалысы жағына) бағытталған, ал екіншісі  $P$  осы бағытқа



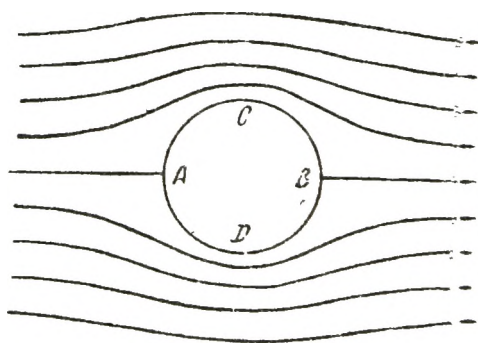
156-сурет.

перпендикуляр бағытталған екі құраушыға жіктеуге болады.  $Q$  және  $P$  құраушылары маңдайлық кедергі және көтергіш күш деп аталады. Қозғалыс бағытына қарағанда симметриялы орналасқан денеге маңдайлық кедергі ғана әсер ететіндігі, ал көтергіш күш бұл жағдайда

нольге тең болатындығы түсінікті.

Есептеулерге қарағанда денелердің идеал сұйықтағы бір қалыпты қозғалысы маңдайлық кедергісіз өтуге тиісті. Тұтқырлыққа ие болмайтын идеал сұйық дене бетімен еркін сырғи отырып, оны орай ағады. 157-суретте өте ұзын «шексіз» цилиндрді идеал сұйықтың орай аққандағы ағын сызықтары көрсетілген. Толық орай ағу салдарынан ағын сызықтарының бейнесі  $A$  және  $B$  нүктелері арқылы өтетін түзу-

ге қарағанда да сол сияқты  $C$  және  $D$  нүктелері арқылы өтетін түзуге қарағанда да толығымен симметриялы болады. Сондықтан  $A$  және  $B$  нүктелердің маңындағы қысым бірдей (және бұл нүктелердің маңында жылдамдық аз болғандықтан, ұйтқымаған ағынға қарағанда үлкен)

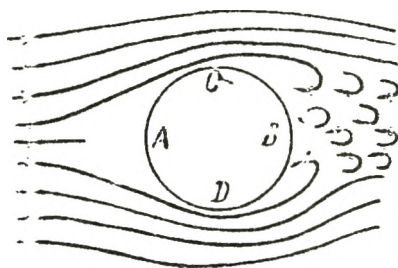


157-сурет.

болады; дәл осылай  $C$  және  $D$  нүктелерінің маңындағы қысым да бірдей (және бұл нүктелердің маңында жылдамдық үлкен болғандықтан, ұйтқымаған ағынға қарағанда төмен) болады. Демек, цилиндр бетіндегі қорытқы қысым күші (тұтқырлық болмаған кезде маңдайлық қысым тудыра алатын) нольге тең болатындығы түсінікті. Дәл осындай нәтиже басқа формалы денелер үшін де алынады.

Дене тұтқырлығы бар сұйық ішінде қозғалғанда кү-

былыстар басқаша өтеді. Бұл жағдайда сұйықтың өте жұқа қабаты дененің бетіне жабысып қалады да, үйкеліс салдарынан келесі қабаттарды өзімен ілестіре отырып, денемен бірге біртұтас қозғалысқа қатысады. Дене бетінен алыстаған сайын қабаттардың жылдамдығы кемі береді де, ақырында, сұйық бетінен белгілі бір қашықтықта, сұйық іс жүзінде дене қозғалысы салдарынан ұйтқымайды. Сонымен, дене жылдамдықтың градиенті бар сұйық қабатымен қоршалыады. Бұл қабат шекаралық деп аталады. Бұл қабатқа үйкеліс күші әсер етеді де соңында денеге түсірілген бұл күш маңдайлық кедергінің пайда болуына әкеліп соғады. Іс осымен бітпейді. Шекаралық қабаттың болуы сұйықтың денені орай ағу сипатын түбірімен өзгертеді. Толық орай ағу мүмкін болмай қалады. Үйкеліс күшінің беттік қабаттағы әсері ағынның дене бетінен үзілуіне әкеліп соғады, мұның нәтижесінде дененің артқы жағында құйын пайда болады (158-суретті қараңыз, мұнда тұтқыр сұйықтың цилиндрді орай ағуы көрсетілген). Ағын құйындарды ілестіріп әкетеді де, үйкеліс салдарынан біртіндеп барып өшеді. Бұл жағдайда құйын энергиясы сұйықты қыздыруға шығындалады. Дененің артқы жағындағы құйындалған аймақта пайда болатын қысым төмен болады, сондықтан қорытқы қысым күші нольден өзгеше болып, өз тарапынан маңдайлық кедергінің тууына себепші болады.



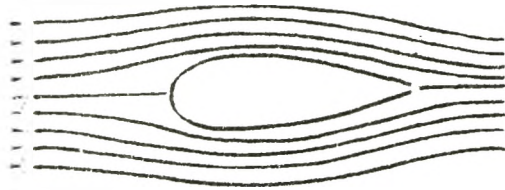
158-сурет.

Сонымен, маңдайлық кедергі үйкеліс кедергісі мен қысым кедергісінен құралады. Дененің берілген көлденең өлшемдеріндегі қысым кедергісі оның формасына едәуір тәуелді болады. Сол себептен де оны форманың кедергісі деп атайды. Тамшы тәріздес оңай аққыш денелердің кедергісі өте аз болады (159-сурет). Самолеттің фюзеляжы мен қанатына, автомобильдің кузовына т. б. осындай форма беруге тырысады.

Үйкеліс кедергісі мен қысым кедергісінің арасындағы қатыс Рейнольдс санының (59.3) мәні бойынша анықталады. Қарастырылып отырған жағдайда  $l$  — денеге тән белгілі бір мөлшер<sup>1</sup> (мысалы, шар тәріздес дененің мөл-

шері),  $v$  — дененің сұйықпен салыстырғандағы жылдамдығы.

$Re$  шамасы аз болғанда негізгі рольді үйкеліс кедергісі атқарады, сол себептен де қысым кедергісін еске алмауға да болады.  $Re$  артқан сайын, қысым кедергісінің ролі арта береді.  $Re$  шамасының үлкен мәндерінде маңдайлық қысымда қысым күші басым болады.



159-сурет.

Ағындағы денеге әсер ететін күш сипатын анықтай отырып, Рейнольдс саны бұл жағдайда да құбылыстың ұқсастық критерийі қызметін атқарады. Бұл жағдай модельдеу кезінде пайдаланылады.

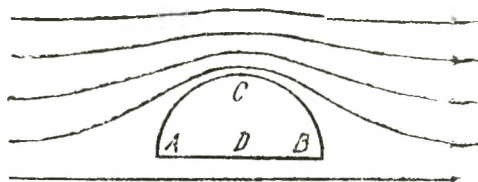
Мысалы, егер самолет пен оның моделінің геометриялық ұқсастығымен қатар, олар үшін Рейнольдс санының теңдігі де сақталса, онда самолет газ ағынында өзін қалай ұстаса оның моделі де солай ұстайды.

**Стокс заңы.**  $Re$  аз болғанда, яғни қозғалыс жылдамдығы онша үлкен болмағанда [сондай-ақ  $l$  онша үлкен болмағанда; (59.3) формуласын қараңыз], ортаның кедергісі іс жүзінде үйкеліс күші әсерінен болады. Стокс тағайындаған заң бойынша, кедергі күші бұл жағдайда  $\eta$  динамикалық тұтқырлыққа, дененің сұйықпен салыстырғандағы  $v$  жылдамдығына және денеге тән  $l$  мөлшерге пропорционал болады:  $f \sim \eta l v$  (денеден сұйықтың шекарасына дейінгі, мысалы, ыдыстың қабырғасына дейінгі қашықтық дененің мөлшерінен әлдеқайда аз деп саналады). Пропорционалдық коэффициенті дененің формасына байланысты болады. Егер  $l$  шамасының орнына пропорционалдық коэффициенті  $6\pi$ -ға тең болады. Демек, сұйық ішіндегі шар қозғалысына жасалатын кедергі күші, жылдамдық онша үлкен болмағанда, Стокс заңына сәйкес мынаған тең болады:

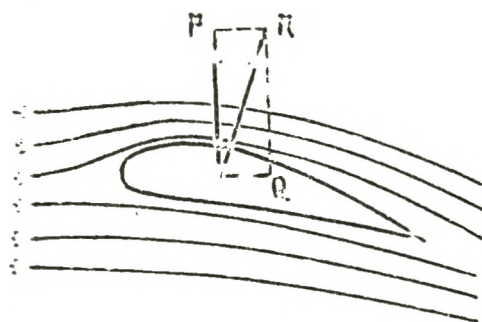
$$f = 6\pi\eta r v. \quad (60.1)$$

Сұйықта немесе газда вертикаль түсіп келе жатқан шағын шарикке үш күш әсер етеді: 1) төмен қарай бағытталған ауырлық күші  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$  ( $r$  — шарик радиусы,

$\rho$  — оның тығыздығы), 2) жоғары қарай бағытталған ығыстырушы күш —  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g$  ( $\rho_0$  — сұйықтың не газдың тығыздығы) және 3) қозғалыс бағытына қарсы, яғни жоғары қарай бағытталған кедергі күші —  $6\pi\eta v$ . Бастапқы екі күш шама жағынан тұрақты, үшіншісі  $v$  жылдамдыққа пропорционал. Сондықтан жылдамдық қандай болмасын белгілі бір  $v_0$  шамасына жеткенде ығыстырушы күш пен кедергі күшінің қосындысы ауырлық күшінің теңгереді. Осының салдарынан шарик үдеусіз, яғни



160-сурет.



161-сурет.

бір қалыпты қозғала бастайды. Бір қалыпты қозғалыстың  $v_0$  жылдамдығын төмендегі шарттан оп-оңай табуға болады:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_0.$$

Бұл теңдеуді  $v_0$  шамасына қатысты шеше отырып, төмендегі формуланы аламыз:

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}. \quad (60.2)$$

(60.2) формуласынан шариктің тұтқыр ортада бір қалыпты түсу жылдамдығы оның радиусының квадратына пропорционал болатындығы көрінеді. Жоғарыда айқындалған себептер бойынша (60.2) формуласы шағын шариктер үшін ғана дұрыс орындалады.

Кішкентай шариктердің сұйық ішіндегі орныққан (бір қалыпты) түсу жылдамдығын өлшеп, (60.2) формуласы бойынша сұйық  $\eta$  тұтқырлығын табуға болады. Тұтқырлықты анықтаудың бұл әдісі кейде іс жүзінде қолданылады.

Көтергіш күш. Көтергіш күштің пайда болуы үшін сұйық тұтқырлығының айтарлықтай мәні болмайды. 160-суретте идеал сұйықтың жарты цилиндрді қаптай аққандағы ағын сызықтары көрсетілген. Толық қаптай

ағы салдарынан ағын сызықтары  $CD$  түзуіне қатысты симметриялы болады. Алайда көрініс  $AB$  түзуіне қатысты симметриялы болмайды. Ағын сызықтары  $C$  нүктесі маңында қоюланады, сондықтан бұл жердегі қысым,  $D$  нүктесі маңындағы қысымнан аз болады да  $P$  көтергіш күш пайда болады. Осыған ұқсас тұтқыр сұйықта да көтергіш күш пайда болады.

Самолетті ауада ұстап тұратын күш қызметін оның қанатына әсер етуші көтергіш күш атқарады. Мандайлық кедергі самолеттің ұшуы кезінде зиянды роль атқарады. Сондықтан самолеттің қанаты мен оның фюзеляжына аққыш түр беріледі. Қанат профилі, сонымен бірге, шама жағынан жеткілікті мөлшерде көтергіш күшті қамтамасыз етуі керек. Ұлы орыс ғалымы Н. Е. Жуковский (1847—1921) тапқан 161-суретте көрсетілген профиль қанат үшін тиімді болып саналады. Жуковский мен оның шәкірті С. А. Чаплыгиннің еңбектерімен қазіргі аэродинамиканың негізі қаланды. В. И. Ленин Жуковскийді орыс авиациясының атасы деп атады. Жуковский, атап айтқанда, самолеттерді барлық аэродинамикалық тұрғыдан есептеудің негізі болып саналатын көтергіш күшті анықтауға арналған формуланы қорытып шығарды.

## II бөлім

# ТЕРБЕЛІСТЕР МЕН ТОЛҚЫНДАР

---

### IX ТАРАУ

#### ТЕРБЕЛМЕЛІ ҚОЗҒАЛЫС

##### § 61. Тербелістер туралы жалпы мәліметтер

Тербелістер деп белгілі бір дәрежеде қайталағыштығымен айқындалатын процестерді айтады. Мысалы, сағат маятнігінің тербелуі, ішектің немесе камертон таяқшасының тербелісі, радиоқабылдағыш контурының конденсатор астарларындағы кернеу және т. б. осындай қайталағыштық қасиетке ие болады.

Қайталанатын процестің физикалық табиғатына байланысты тербелістер: механикалық, электромагниттік, электромеханикалық және т. б. түрге бөлінеді. Бұл тарауда механикалық тербелістер қарастырылады.

Тербелістер табиғат пен техникада кеңінен таралған. Көптеген жағдайда олар зиянды роль атқарады. Рельс арқылы поезд дөңгелегінің өтуі кезіндегі соққы салдарынан пайда болатын көпірдің тербелісі, еспе винттің айналуы салдарынан корабль қорабының тербелісі (вибрациясы), самолет қанаттарының вибрациясы тәрізді процестер апатқа ұшыратуы мүмкін. Мұндай жағдайда міндет — тербелісті алдын ала болдырмау немесе ең болмағанда тербелісті қауіпті мөлшерге жеткізбеу.

Сонымен қатар, тербелмелі процестер техниканың түрлі салаларының негізін қалайды. Мысалы, бүкіл радиотехника тербелмелі процестерге негізделген.

Тербелмелі системаға жасалатын әсердің сипатына қарай еркін (немесе меншікті) тербелістер, еріксіз тербелістер, автотербелістер және параметрлік тербелістер болып ажыратылады.

Еркін немесе меншікті тербелістер деп қозғалысқа келтірілгеннен кейін немесе орнықты қалпынан шығарылғаннан соң өзімен-өзі қалатын системада өтетін тербелістерді айтады. Жіпке ілінген шариктің (маятник) тербелісі осыған мысал бола алады. Қозғалысты тудыру үшін шарикті түртіп жіберу керек немесе оны бір жағына тартып апарып қоя беру керек.

Еріксіз тербелістер деп тербелмелі система әлсіз-әлі өзгеріп отыратын сыртқы күштің әсеріне кез болатын тербелістерді айтады. Сап түзеп келе жатқан адамдар өткендегі көпірдің тербелісі осыған мысал бола алады.

Еріксіз тербелістер сияқты автотербелістер де тербелмелі системаға сыртқы күштердің әсер етуімен жүреді; алайда бұл әсерлер жүзеге асатын уақыт мезетінде тербелмелі системаның өзі белгілейді — сыртқы әсерлерді системаның өзі басқарады. Жоғары көтерілген гирдің немесе бұралған пружинаның энергиясы есебінен маятникті түрткі алатын (қозғалысқа келетін) сағат осыған мысал бола алады. Бұл түрткілер маятник ортаңғы қалпынан өтер кезде беріледі.

Параметрлік тербелістер кезінде сыртқы әсер салдарынан системаның қандай да болсын параметрі, мысалы, тербеліс жасап тұрған шарик ілінген жіптің ұзындығы, периодты түрде өзгереді.

Гармониялық тербелістер, яғни тербелетін шама (мысалы, маятниктің ауытқуы) уақыт бойынша синус не косинус заңына сәйкес өзгередетін тербелістер қарапайым тербелістер қатарына жатады. Бұл тербелістер мына себептерден аса маңызды деп саналады: біріншіден табиғаттағы және техникадағы тербелістер көбінесе гармониялық тербелістерге жақын сипатта болады, және екіншіден басқа түрдегі периодты процестерді (уақытпен басқаша тәуелділікте болатын) бірнеше гармониялық тербелістердің қосылуы ретінде қарастыруға болады.

## § 62. Гармониялық тербелістер

Пружинаға ілінген, массасы  $m$  шариктен тұратын системаны қарастырайық (162-сурет). Тенге-теңдік күйінде  $mg$  күші  $k\Delta l_0$  серпімділік күшімен теңгеріледі:

$$mg = k\Delta l_0. \quad (62.1)$$

Шариктің тепе-теңдік қалпынан ығысуын  $x$  координатасымен сипаттаймыз, әрі  $x$  осін вертикаль бойынша төмен бағыттаймыз, ал осьтің нолін шариктің тепе-теңдік қалпымен үйлестіреміз.

Егер шарикті тепе-теңдіктен  $x$ -қа ( $x$  алгебралық шама) тең қашықтыққа ығыстырсақ, онда пружинаның ұзаруы  $\Delta l_0 + x$  шамасына тең болады және қорытқы күштің  $x$  осіне проекциясы (бұл проекцияны жай ғана  $f$  әрпімен белгілейік) мынадай мән қабылдайды:

$$f = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

(62.1) формуласындағы тепе-теңдік шартын ескере отырып, төмендегіні аламыз:

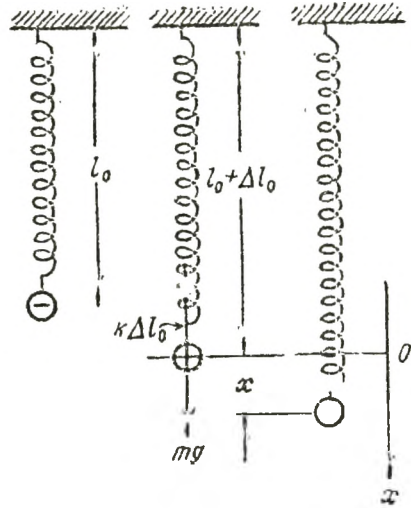
$$f = kx. \quad (62.2)$$

(62.2) формуласындағы «—» ығысу мен күштің бағыттары қарама-қарсы екендігін білдіреді: егер шариктің тепе-теңдік қалпынан төмен қарай ( $x > 0$ ) ығысса, күш жоғары ( $f < 0$ ) бағытталады, шарик жоғары қарай ( $x < 0$ ) ығысқанда күш төмен ( $f > 0$ ) бағытталады. Сонымен  $f$  күшінің төмендегідей қасиеттері бар: 1) ол шариктің тепе-теңдік қалпынан ығысуына пропорционал, 2) ол әрқашанда тепе-теңдік қалпына қарай бағытталаған.

Біз қарастырған мысалда (62.2) күш шынында, өзінің табиғаты бойынша серпімді. Басқа тектегі күштерде де осындай заңдылық байқалуы мүмкін, яғни —  $kx$  шамасына тең болуы мүмкін, мұндағы  $k$  — тұрақты оң шама. Табиғатына қарамастан, мұндай күштерді квазисерпімді деп атау келісілген.

Системаға  $x$  ығысу беру үшін, квазисерпімді күшке қарсы төмендегідей жұмыс істеу керек:

$$A = \int_0^x (-f) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$



162-сурет.



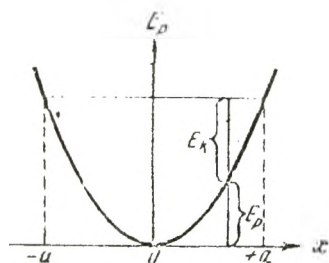
Бұл жұмыс системаның потенциялық энергиясының қорын жасауға жұмсалады. Демек, квазисерпімді күш әсер ететін, система, тепе-теңдік қалпынан  $x$  қашықтыққа ығысқанда төмендегідей потенциялық энергияға<sup>1</sup> ие болады:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \quad (62.3)$$

(тепе-теңдік қалыптағы потенциялық энергияны нольге тең деп ұйғарамыз).

(62.3) өрнегі деформацияланған пружинаның потенциялық энергиясына арналған (27.13) өрнегіне сәйкес келеді.

162-суретте кескінделген системаға қайта оралайық. Шарикке  $x=a$  ығысу беріп, одан соң системаны өзімен-өзі қалдырайық,  $f=kx$  күшінің әсерінен шарик тепе-теңдік қалыпқа қарай үнемі артып отыратын  $v=x$  жылдамдықпен қозғалады. Бұл кезде системаның потенциялық энергиясы кему бастайды (163-сурет), бірақ оның орнына үнемі артып келе жатқан кинетикалық энергия  $E_k = mx^2/2$  (пружинаның массасын ескермейміз) пайда болады. Тепе-теңдік қалпына келген соң шарик, инерция бойынша қозғала береді. Бұл қозғалыс кемімелі қозғалыс болады және кинетикалық энергия толығымен потенциялық энергияға айналғанда, яғни шариктің ығысуы —  $a$ -ға тең болғанда тоқталады. Одан соң шарик кері бағытта қозғалғанда дәл осындай процестер өтеді. Егер системада үйкеліс болмаса, системаның энергиясы сақталуға тиіс және шарик  $x=a$ -дан  $x=-a$ -ға дейінгі аралықта шексіз ұзақ қозғала береді.



163-сурет.

<sup>1</sup> Кинетикалық және потенциялық энергиялардың механикада қолданылып келген таңбаларынан бас тартуға мәжбүр болдық. Тербелістер туралы ілімде  $T$  әрпімен тербеліс периодын белгілеу келісілген  $U$  әрпімен молекулалық физикада ішкі энергияны белгілейді. Сондықтан біз бұдан былай кинетикалық энергияны  $E_k$  символымен, ал потенциялық энергияны  $E_p$  символымен белгілейміз.

Шарикке арналған Ньютонның екінші заңы былай жазылады:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Бұл теңдеуді төмендегідей етіп түрлендірейік:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (62.4)$$

$x$ -тағы коэффициент оң. Сондықтан оны мынадай түрде жазуға болады:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (62.5)$$

мұндағы  $\omega_0$ — заттық шама.

(62.4) өрнегіне (62.5) өрнегіндегі белгілеуді қолдана отырып, мынаны аламыз:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (62.6)$$

Сонымен (62.2) түріндегі күштің әсерінен болатын шарик қозғалысы екінші реттік біртекті дифференциалдық теңдеулер арқылы зерттеледі.

Ауыстыру арқылы (62.2) теңдеуінің жалпы шешуі төмендегідей болатындығына оңай көз жеткізуге болады:

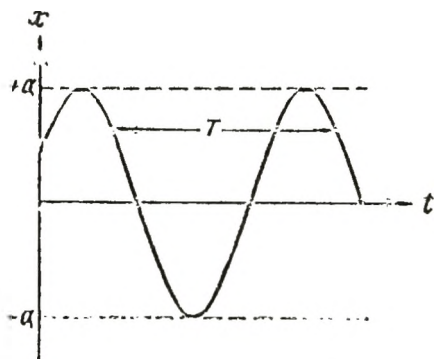
$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)^1, \quad (62.7)$$

мұндағы  $a$  және  $\alpha$ —кез келген тұрақты шамалар.

Сонымен  $x$  ығысу уақыт бойынша косинус заңына сәйкес өзгереді. Демек,  $f = -kx$  түріндегі күштің әсерінде болатын системаның қозғалысы гармониялық тербеліс болып табылады.

Гармониялық тербелістің, яғни (62.7) функциясының графигі 164-суретте көрсетілген. Горизонталь оське  $t$  уақыт, ал вертикаль оське  $x$  ығысу салынған. Косинус  $-1$ -ден  $+1$ -ге дейін өзгертіндіктен,  $x$ -тің мәні  $-a$ -дан  $+a$ -ға дейінгі аралықта жатады.

Системаның тепе-теңдік қалпынан оң үлкен ауытқуы



164-сурет.

<sup>1</sup> Иначе  $x = a \sin(\omega_0 t + \alpha')$ , мұндағы  $\alpha' = \alpha + \pi/2$ .

тербеліс амплитудасы деп аталады. Тербеліс амплитудасы  $a$  — тұрақты оң шама. Оның мәні, системаны тепе-теңдік қалыптан шығарған, алғашқы ауытқудың немесе түрткінің шамасымен анықталады.

Қосинус таңбасының астында тұрған  $(\omega_0 t + \alpha)$  шамасы тербеліс фазасы деп аталады.  $\alpha$  тұрақтысы фазаның  $t=0$  уақыт мезетіндегі мәні болып табылады және ол тербелістің бастапқы фазасы деп аталады. Санау уақытының басы өзгергенде де өзгереді. Демек, бастапқы фаза санау уақытының басын таңдап алуға байланысты өзгереді.  $2\pi$  бүтін санын фазаға қосқанда немесе одан алып тастағанда  $x$ -тің мәні өзгермейтіндіктен, бастапқы фазаны модуль бойынша әрқашан да  $\pi$ -ден кіші деп алуға болады. Сондықтан, көбінесе,  $\alpha$ -ның  $-\pi$ -ден  $+\pi$ -ге дейінгі аралықта жатқан мәндері ғана қарастырылады.

Қосинус — периоды  $2\pi$ -ге тең периодты функция болғандықтан, гармониялық тербеліс жасайтын системаның әр түрлі күйі<sup>1</sup> тербеліс фазасы  $2\pi$ -ге тең өсімше қабылдайтындай  $T$  уақыт аралығы сайын қайталанады (163-сурет). Осы  $T$  уақыт аралығы тербеліс периоды деп аталады. Оны төмендегі шарттан анықтауға болады:  $[\omega_0(t+T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$ , осыдан

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (62.8)$$

Бірлік уақыт ішіндегі тербеліс саны  $\nu$  тербеліс жиілігі деп аталады.  $\nu$  жиіліктің бір тербеліс ұзақтығымен төмендегі қатынас арқылы байланысатындығы белгілі:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (62.9)$$

Жиілік бірлігі үшін периоды 1 сек-ке тең тербеліс жиілігі алынады. Бұл бірлікті герц ( $гц$ ) деп атайды.  $10^3$   $гц$  жиілік килогерц ( $кгц$ ),  $10^6$   $гц$  — мегагерц ( $мгц$ ) деп аталады.

---

<sup>1</sup> Механикалық системаның күйі, сол системаны құрайтын денелердің жылдамдығы мен координаталары арқылы сипатталатынын ескертейік.

(62.8) өрнегінен төмендегіні алуға болады:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (62.10)$$

Сонымен,  $\omega_0$  шамасы  $2\pi$  секунд ішіндегі тербеліс санын береді.  $\omega_0$  шамасын дөңгелектік немесе циклдiк жиілік деп атайды. Ол әдеттегі  $\nu$  жиілікпен төмендегі қатыс арқылы байланысады:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (62.11)$$

(62.7) өрнегін уақыт бойынша дифференциалдап, жылдамдыққа арналған өрнекті аламыз:

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (62.12)$$

(62.12) өрнегінен, жылдамдық та гармониялық заң бойынша өзгертіндігін әрі жылдамдық амплитудасы  $a\omega_0$  шамасына тең болатындығын көреміз. (62.7) және (62.12) өрнектерін салыстырудың жылдамдық ығысудан фазасы бойынша  $\pi/2$  шамасына озып кететіндігі шығады.

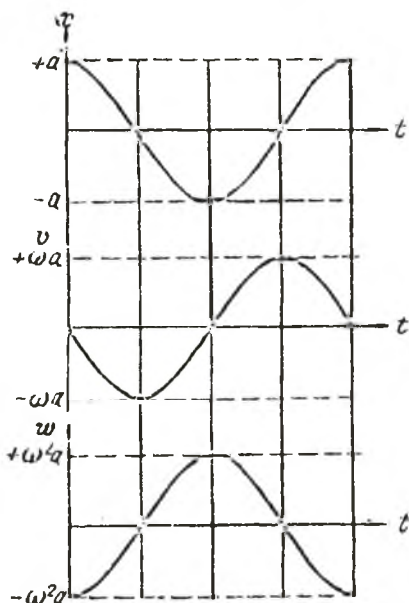
(62.12) өрнегін тағы да уақыт бойынша дифференциалдап, үдеуге арналған өрнекті табамыз:

$$\begin{aligned} \omega = \ddot{x} &= -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \end{aligned} \quad (62.13)$$

(62.13) өрнегінен үдеу мен ығысу қарама-қарсы фазада жататындығы көрінеді. Мұның өзі ығысу ең үлкен оң мәніне жеткенде, үдеудің шама жағынан ең үлкен теріс мәніне жететіндігін және керісінше болатындығын көрсетеді.

165-суретте ығысу, жылдамдық және үдеуге арналған графиктер келтірілген.

Әрбір нақты тербеліс  $a$  амплитуда мен бастапқы фазаның белгілі бір мәні бойынша сипатталады. Берілген тербеліс үшін бұл шамалардың мәндері бастапқы шарт-



165-сурет.

тардан, яғни  $x_0$  ауытқу және  $v_0$  уақыттың бастапқы мезетіндегі жылдамдықтың мәндерінен анықталады. Шынында да, (62.7) және (62.12) өрнектеріндегі  $t=0$  деп ұйғарып, екі теңдеу аламыз:

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \sin \alpha,$$

осылардан төмендегіні табамыз:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad (62.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}. \quad (62.15)$$

$\alpha$ -ның  $-\pi$ -ден  $+\pi$ -ге дейінгі интервалда жатқан екі мәні (62.15) теңдеуін қанағаттандырады. Бұл мәндерден косинус пен синустың таңбасы дұрыс болатын мәнді алу керек.

### § 63. Гармониялық тербелістің энергиясы

Квазисерпімді күш консервативті күш болып саналады. Сондықтан гармониялық тербелістің толық энергиясы тұрақты болып қалу керек. Жоғарыда айқындалғанымыздай, тербеліс процесінде кинетикалық энергияның потенциялық энергияға және керісінше түрленуі байқалады. Тепе-теңдік қалыптан ең үлкен ауытқу мезеттерінде  $E$  толық энергия, өзінің  $E_{p \max}$  ең үлкен мәніне жететін потенциялық энергиядан ғана тұрады:

$$E = E_{p \max} \frac{ka^2}{2}, \quad (63.1)$$

ал система тепе-теңдік қалып арқылы өткенде толық энергия осы мезетте өзінің ең үлкен  $E_{k \max}$  мәніне ие болатын кинетикалық энергиядан ғана тұрады:

$$E = E_{k \max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (63.2)$$

(жоғарыда жылдамдық амплитудасы  $a\omega_0$  шамасына тең болатындығы көрсетілген) (62.5) өрнегі бойынша  $m\omega^2 = k$  болатындықтан, (63.1) және (63.2) өрнектерінің бір-біріне тең екендігі оңай байқалады.

Гармониялық тербелістің  $E_k$  кинетикалық және  $E_p$  потенциялық энергиялары уақыт бойынша қалай өзгертетінін айқындайық. Кинетикалық энергия  $[x$  үшін

(62.12) өрнегін қараңыз] төмендегі өрнек арқылы анықталады:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.3)$$

Потенциалдық энергия мына формуламен өрнектеледі:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (63.4)$$

(63.3) және (63.4) өрнектерін (62.5) қатысын ескере отырып қоссақ, төмендегіні аламыз:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} \quad (немесе \frac{ma^2\omega_0^2}{2}), \quad (63.5)$$

бұл (63.1) және (63.2) өрнектерімен сәйкес келеді. Сонымен гармониялық тербелістің толық энергиясы шынында да тұрақты болады екен.

Тригонометриядағы белгілі формулаларды пайдаланып,  $E_k$  және  $E_p$  шамаларына арналған өрнектерді мына түрде жазуға болады:

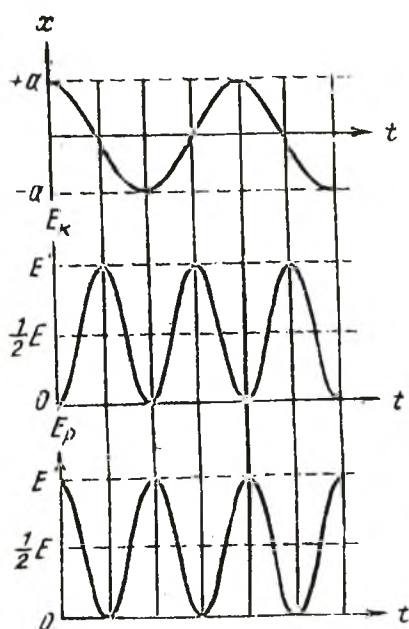
$$E_k = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (63.6)$$

$$E_p = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (63.7)$$

мұндағы  $E$ -системаның толық энергиясы. (63.6) және (63.7) формулаларынан  $E_k$  және  $E_p$  шамалары  $2\omega_0$  жиілікпен, яғни гармониялық тербеліс жиілігінен 2 есе артық жиілікпен өзгертіндігі көрінеді.

166-сурет  $x$ ,  $E_k$ ,  $E_p$  шамаларының графиктері салыстырмалы түрде берілген.

Синустың квадраты мен косинустың квадраттарының орташа мәні жартыға ( $\frac{E}{2}$ -ге) тең екендігі белгілі. Демек,  $E_k$  шамасының орташа мәні  $E_p$  шамасының орташа мәнімен сәйкес келеді және ол  $E/2$ -ге тең.



166-сурет.

## § 64. Гармониялық осциллятор

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (64.1)$$

мұндағы  $\omega_0^2$  — тұрақты оң шама [(62.6) формуласын қараңыз], теңдеуімен сипатталатын система гармониялық осциллятор (немесе гармониялық вибратор) деп аталады. (64.1) теңдеуінің шешімі төмендегідей түрде жазылатындығы бізге бұрыннан белгілі:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (64.2)$$

Демек, гармониялық осциллятор тепе-теңдік қалыптың маңында гармониялық тербеліс жасайтын, система болып табылады.

Өткен параграфта гармониялық тербелістер үшін алынған нәтижелер, гармониялық осциллятор үшін де дұрыс екендігі белгілі. Тағы да екі мәселені қосымша қарастырайық.

Гармониялық осциллятордың импульсын табайық. (64.2) өрнегін уақыт бойынша дифференциалдап және алынған нәтижені осциллятордың  $m$  массасына көбейтіп, төмендегіні аламыз:

$$p = m\dot{x} = -m a \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (64.3)$$

Осциллятордың  $x$  ауытқуымен сипатталатын әрбір жағдайында импульстың кейбір  $p$  мәні болады.  $p$  шамасын  $x$  шамасының функциясы ретінде табу үшін, (64.2) және (64.3) теңдеулерінен  $t$  уақытты шығару керек. Ол үшін аталған теңдеулерді мына түрде жазайық:

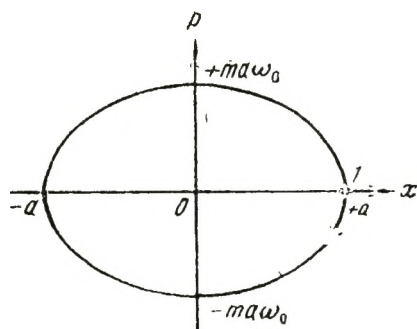
$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{a} &= \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ \frac{p}{m a \omega_0} &= -\sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned}$$

Бұл өрнектерді квадраттап және қосу арқылы мынаны аламыз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1. \quad (64.4)$$

167-суретте гармониялық осциллятордың  $p$  импульсының  $x$  ауытқуға тәуелділігінің графині кескінделген.  $p$ ,  $x$  координата жазықтығын фазалық жазықтық деп, ал оған сәйкес келетін графикті фазалық тра

ектория деп атайды. (64.4) формуласымен сәйкес гармониялық осциллятордың фазалық траекториясы жарты осьтері  $a$  және  $ma\omega_0$  болатын эллипс болып табылады. Фазалық траекторияның әрбір нүктесі  $x$  ауытқуды және  $p$  импульсты, яғни уақыттың кейбір мезетіндегі осциллятордың күйін кескіндейді. Уақыт өткен сайын күйді кескіндейтін нүкте (қысқаша оны бейнелеуші нүкте деп атайды) фазалық траектория бойымен қозғала отырып, тербеліс периоды ішінде оны толық бір айналып шығады. Бейнелеуші нүктенің қозғалысы сағат тілінің қозғалысы бойынша бағытталады.



167-сурет.

дығына оңай көз жеткізуге болады. Шынында да,  $\omega_0 t' + \alpha = 2\pi n$  ( $n$  — бүтін сан) болатын  $t'$  уақыт мезетін алайық. Бұл уақыт мезетіне  $x = a$  және  $p = 0$  (167-суреттегі  $l$  нүктесін қараңыз) сәйкес келеді. Одан арғы уақыт мезеттерінде  $x$  кемі береді, ал  $p$  модулы бойынша үнемі өсіп отыратын теріс мәндер қабылдайды. Демек, бейнелеуші нүкте 167-суретте стрелкамен көрсетілген бағытта, яғни сағат тілінің қозғалысы бойынша қозғалады.

Эллипстің ауданын табайық. Ол эллипс жарты осьтерінің  $\pi$ -ге көбейтіндісіне тең екендігі белгілі:

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}.$$

(63.5) формуласы бойынша  $ma^2\omega_0^2/2$  осциллятордың толық энергиясы;  $2\pi/\omega_0$  шамасы  $1/\nu_0$ -ге тең, мұндағы  $\nu_0$  — берілген осциллятор үшін тұрақты шама болып саналатын осциллятордың меншікті жиілігі. Демек, эллипстің ауданын мына түрде бере алады:

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

бұдан

$$E = \nu_0 S. \quad (64.5)$$

Сонымен гармониялық осциллятордың толық энергиясы эллипстің ауданына пропорционал болады, әрі



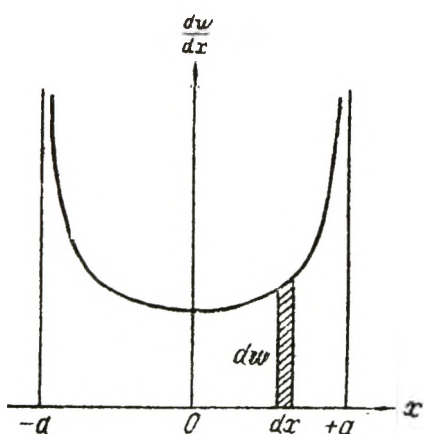
пропорционалдық коэффициентін осциллятордың меншікті жиілігі атқарады.

Эллипстің ауданын  $\oint p dx$  интегралы ретінде есептеуге болады. Сондықтан (64.5) формуласын мынадай түрге келтіруге болады:

$$E = \nu_0 \oint p dx.$$

Соңғы қатыс кванттық механиканың негізін жасауда үлкен роль атқарды.

Енді осциллятордың әр түрлі қалыпта байқалу ықтималдығы жайлы мәселені қарастырайық. Осциллятордың жылдамдығы тепе-теңдік қалпынан өткен мезетте



168-сурет.

ең үлкен мәніне жетеді. Тепе-теңдік қалыптан ең үлкен ауытқыған мезетте жылдамдық нольге айналады. Осыдан осцилляторды өзінің шеткі қалыптарының бірінде байқау ықтималдығы, оны тепе-теңдік қалпының маңынан байқау ықтималдығынан артық болады. Бұл жағдай ықтималдық тығыздығы деп аталатын  $\frac{dw^1}{dx}$  ша-

масын анықтайтын қисық сызық кескінделген 168-сурет арқылы түсіндіріледі. Осциллятордың берілген  $dx$

аралығында болу  $dw$  ықтималдығын табу үшін, сәйкес жердегі қисық сызықтың ординатасын  $dx$  шамасына көбейту керек. Мәселен, 168-суреттегі штрихталған жолақтардың сан жағынан осциллятордың берілген  $dx$  интегралының шегінде табылатын  $dw$  ықтималдығына тең болады. Ықтималдық тығыздығы қисықтығының астындағы бүкіл аудан осциллятордың  $-a$ -дан  $+a$ -ға дейінгі шектеріндегі орындарының бірінде болғандағы ықтималдықты береді, демек, кез келген ең анық оқиғаның ықтималдығы ретінде бірге тең болуға тиіс.

---

Бұл қисық сызық  $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$  теңдеуімен сипатталады.

Гармониялық осциллятордың әр түрлі қалпы үшін кванттық механика бір-бірінен алшақ түрліше нәтиже беретінін атап өтейік.

### § 65. Системаның тепе-теңдік қалпының маңындағы болымсыз тербелістері

Кез келген механикалық системаны қарастырайық, оның орны  $x$  арқылы белгіленетін бір шама бойынша берілуі мүмкін, бұл жағдайда системаның бір еркіндік дәрежесі бар делінеді. Системаның орнын анықтайтын  $x$  шамасы кейбір жазықтықтан бастап есептелетін бұрыш немесе берілген қисық сызықтың бойымен есептелетін қашықтық, атап айтқанда, түзу, сызықтар т. б. болуы мүмкін. Системаның потенциалдық энергиясы бір айнымалы  $x$ -тің функциясы болады:  $E_p = E_p(x)$ . Санаудың басы  $x=0$  болғанда, системаның тепе-теңдік қалпында  $x$  нольге тең болатындай етіп аламыз. Онда  $E_p(x)$  функциясының  $x=0$  болғанда минимумы болады.  $E_p(x)$  функциясын  $x$ -тің дәрежесі бойынша қатарға жіктейміз, сонымен қатар  $x$ -тің жоғарғы дәрежелерін ескермеуге болатындай әлсіз тербелістерді қарастырумен шектелмекпіз. Маклорон формуласы бойынша

$$E_p(x) = E_p(0) + E_p'(0)x + \frac{1}{2} E_p''(0)x^2$$

( $x$  аз болғандықтан қалған  $x$  мүшелерін ескермейміз)  $x=0$  болғанда  $E_p(x)$  функциясының минимумы болатындықтан да  $E_p'(0)$  нольге тең, ал  $E_p''(0)$  оң. Мынадай белгілеу енгізейік:  $E_p(0) = b$ ,  $E_p''(0) = k$  ( $k > 0$ ). Сонда

$$E_p(x) = b + \frac{1}{2} kx^2 \quad (65.1)$$

(65.1) өрнегі квазисерпимді күш әсер ететін ( $b$  константасын нольге тең деуге болады) системаның потенциалдық энергиясына арналған (62.3) өрнегімен бірдей.

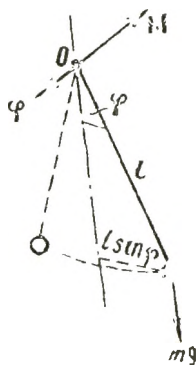
(28.5) қатысын пайдаланып, системаға әсер ететін күшті табуға болады:

$$f = f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -kx.$$

Сонымен тепе-теңдік қалыптан болымсыз ауытқу кезіндегі потенциялық энергия ығысудың квадраттық функциясы, ал системаға әсер ететін күш квазисерпімді күштің түріндей болады. Демек, тепе-теңдік қалыптан болымсыз ауытқу кезінде, кез келген механикалық система гармониялық тербеліске жақын тербеліс жасайды.

## § 66. Математикалық маятник

Математикалық маятник деп салмақсыз және созылмайтын жіпке ілінген, массасы бір нүктеге жинақталған идеалданған системаны айтады. Ұзын жіптің жіпке ілінген шағын ауыр шарик едәуір дәрежеде математикалық маятникке жақындайды.



169-сурет.

Маятниктің тепе-теңдік қалыптан ауытқуын жіптің вертикальмен жасаған бұрышы арқылы сипаттаймыз (169-сурет). Маятник тепе-теңдік қалыптан ауытқыған кезде шама жағынан  $mgl \sin \varphi$ -ге тең ( $m$  — маятниктің массасы, ал  $l$  — оның ұзындығы) айналдырушы мезет пайда болады. Ол маятникті тепе-теңдік қалпына келтіруге тырысатындай болып бағытталады және бұл жағынан квазисерпімді күшке ұқсас. Сондықтан ығысу мен квазисерпімді күш тәрізді  $M$  моменті мен бұрыштық ығысуына қарама-қарсы таңба жазу керек<sup>1</sup>. Демек, айналмалы моментке арналған өрнек мына түрде жазылады:

$$M = -mgl \sin \varphi. \quad (66.1)$$

Маятник үшін айналмалы қозғалыс динамикасының формуласын жазамыз. Бұрыштық үдеуді  $\ddot{\varphi}$  арқылы белгілеп және маятниктің инерция моменті  $ml^2$  шамасына тең екендігін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

<sup>1</sup>  $\varphi$  шамасын оң винт ережесінің бұрылу бағытымен байланысты вектор ретінде (бұл  $\varphi$  аз болғанда мүмкін) қарастыра отырып,  $M$  мен  $\varphi$  таңбаларының қарама-қарсы болуын,  $M$  мен  $\varphi$  векторларының қарама-қарсы бағытталуы бойынша түсіндіруге болады (169-сурет).

Соңғы теңдеуді мына түрге келтіруге болады:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (66.2)$$

Әлсіз тербелістерді қарастырумен шектелеміз. Бұл жағдайда  $\sin \varphi \approx \varphi$  деп ұйғаруға болады. Сонымен бірге

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (66.3)$$

белгілеуін енгізе отырып, біз төмендегі теңдеуге келеміз:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (66.4)$$

бұл пружинаға ілінген шарикке арналған (62.6) теңдеуіне ұқсас теңдеу. Оның шешімі

$$\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (66.5)$$

түрінде жазылады.

Демек, әлсіз тербеліс кезіндегі математикалық маятниктің бұрыштық ауытқуы гармониялық заң бойынша өзгереді.

(66.3) өрнегінен байқалғандай, математикалық маятниктің тербеліс жиілігі маятниктің ұзындығы мен ауырлық үдеуіне ғана байланысты болады, ал маятник массасына тәуелді болмайды. (66.3) формуласын ескеріп (62.8) формуласы бойынша математикалық маятниктің мектеп курсынан белгілі өрнегі алынады:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (66.6)$$

(66.2) теңдеуін шешіп, тербеліс периодына арналған төмендегі формуланы алуға болатынын ескертейік:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right\},$$

мұндағы  $a$  — тербеліс амплитудасы, яғни маятник тепе-теңдік қалыптан ауытқитын ең үлкен бұрыш.

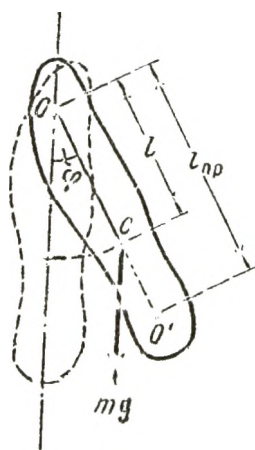
## § 67. Физикалық маятник

Физикалық маятник деп оның инерция центріне дәл келмейтін қозғалмайтын нүкте маңында тербеліс жасай алатын қатты денені айтады. Тепе-теңдік қалпында маятниктің инерция центрі  $C$  маятник іліну  $O$  нүктесінің

астында, онымен бір вертикальдың бойында болады (170-сурет) Маятник тепе-теңдік қалпынан  $\varphi$  бұрышқа ауытқығанда, оны тепе-теңдік қалпына қайтаруға тырысатын айналдырушы мезет пайда болады. Бұл мезет мынаған тең

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (67.1)$$

мұндағы  $m$  — маятниктің массасы, ал  $l$  — маятниктің іліну нүктесі мен инерция центрі арасындағы қашықтық. «—» таңбасы (66.1) формуласындағы мағынаны береді.



170-сурет.

Маятниктің іліну нүктесі арқылы өтетін осіне қатысты инерция моментін  $I$  әрпімен белгілеп, былай жазуға болады:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (67.2)$$

Әлсіз тербелістер жағдайында (67.2) бізге бұрыннан белгілі теңдеуге айналады:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (67.3)$$

Бұл жағдайда  $\omega_0^2$  арқылы төмендегі шама белгіленген:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (67.4)$$

(67.3) және (67.4) теңдеулерінен тепе-теңдік қалпынан болымсыз ауытқыған кезде физикалық маятник массасына, айналу осіне және айналу осі мен маятниктің инерция центрі арасындағы қашықтыққа қатысты маятниктің инерция моментіне тәуелді болатын гармониялық тербеліс жасайтындығы байқалады. (67.4) теңдеуіне сәйкес физикалық маятниктің тербеліс периоды төмендегі өрнекпен анықталады:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (67.5)$$

(66.6) және (67.5) өрнектерін салыстырудан ұзындығы

$$l_{\text{кел}} = \frac{I}{ml} \quad (67.6)$$

болатын математикалық маятниктің берілген физикалық маятниктің тербеліс периодындай периоды болады. (67.6) шамасын физикалық маятниктің келтірілген ұзындығы деп атайды. Сонымен физикалық маятниктің келтірілген ұзындығы — тербеліс периоды беріл-

ген физикалық маятникпен бірдей болып келетін математикалық маятниктің ұзындығы.

Айналу осінен келтірілген ұзындыққа тең қашықтықта жатқан іліну нүктесін инерция центрімен қосатын түзудегі нүкте физикалық маятниктің теңселу центрі деп аталады (170-суреттегі  $O'$  нүктесінен қараңыз)

Штейнер теоремасы бойынша маятниктің инерция моментін мына түрде жазуға болады:

$$I = I_0 + ml^2, \quad (67.7)$$

мұндағы  $I_0$  — айналу осіне параллель және маятниктің инерция центрі арқылы өтетін оське қатысты инерция моменті. (67.7) өрнегін (67.6) формуласына қойып, мынаны аламыз:

$$l_{\text{кел}} = \frac{I_0}{ml} + l. \quad (67.8)$$

(67.8) формуласынан келтірілген ұзындық әрқашанда  $l$ -ден үлкен екендігі байқалады. Сондықтан іліну нүктесі мен теңселу центрі инерция центрінің әр жағында жатады.

Маятникті  $O'$  теңселу центріне сай келетін нүктеге ілейік. (67.8) бойынша келтірілген ұзындық бұл жағдайда мынаған тең:

$$l_{\text{кел}} = \frac{I_0}{ml'} + l', \quad (67.9)$$

мұндағы  $l'$  — маятниктің бастапқы теңселу центрі мен инерция центрі арасындағы қашықтық.  $l' = l_{\text{кел}} - l$  екендігін ескеріп, (67.9) өрнегін былай жазуға болады:

$$l'_{\text{кел}} = \frac{I_0}{m(l_{\text{кел}} - l)} + l_{\text{кел}} - l = l_{\text{кел}} + \frac{1}{m(l_{\text{кел}} - l)} [(I_0 + ml^2) - ml l_{\text{кел}}].$$

Квадрат жақша тұрған өрнек нольге тең. Шынында,  $I_0 + ml^2$  алғашқы айналу осіне қатысты инерция моменті; (67.6) бойынша  $ml l_{\text{кел}}$  өрнегі де осы шамаға тең. Сөйтіп, маятникті тербелу центріне ауыстырып ілгенде келтірілген ұзындық, сондай-ақ тербеліс периоды да бастапқы күйінде қалады. Демек, іліну нүктесі мен тербелу центрінің қайтымдылық қасиеті бар. Іліну нүктесін тербелу центріне ауыстырғанда бұрынғы іліну нүктесі жаңа тербелу центрі болады.

Ауырлық күшінің үдеуін аудармалы маятник деп аталатын маятниктің көмегімен анықтау біз тағайындаған қайтымдылық қасиетіне негізделген. Аудармалы маят-

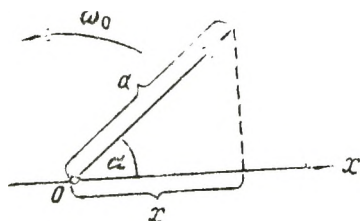
ник деп ұштарының маңында алма-кезек асып қоюға арналған бір-біріне параллель екі тірек призмасы бар маятникті айтады. Маятниктің бойына ауыр жүкті бекітіп қоюға және оны қозғалтуға болады. Жүкті орын ауыстыру арқылы кез келген призманың біріне ілінген маятниктің тербеліс периодын бірдей етіп алуға болады. Онда призмалардың тірек қырлары арасындағы қашықтық  $l_{кел}$  -ге тең болады. Маятниктің тербеліс периодын өлшеп және  $l_{кел}$  -ді біле отырып,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{кел}}{g}}$$

формуласы бойынша ауырлық күшінің үдеуін табуға болады.

### § 68. Гармониялық тербелістерді графтік кескіндеу. Векторлық диаграмма

Тербелістерді жазықтықтағы векторлар түрінде графтік кескіндеу, кейбір мәселелерді шешуді оның ішінде, бағыттары бір бірнеше тербелісті қосуды едәуір жеңілдетеді және көрнекі етіп көрсетеді. Осы тәсілмен алынған схема векторлық диаграмма деп аталады.



171-сурет.

$x$  әрпімен белгіленген осьті алайық (171-сурет). Осьтің бойынан алынған  $O$  нүктесінен осьпен  $\alpha$  бұрыш жасайтын ұзындығы  $a$  векторын саламыз. Егер бұл векторды  $\omega_0$  бұрыштық жылдамдықпен айналысқа келтірсек, онда вектор ұшының проекциясы  $x$  осі бойынша  $-a$ -дан  $+a$ -ға дейінгі аралықта қозғалады, әрі бұл проекцияның координатасы уақыт бойынша мына заңмен өзгереді:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

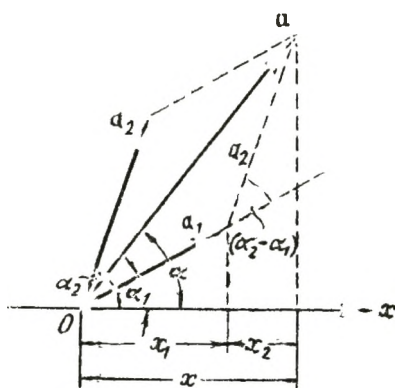
Демек, вектор ұшының осьтегі проекциясы амплитудасы вектордың ұзындығына тең, дөңгелектік жиілігі вектордың айналуының бұрыштық жылдамдығына тең және бастапқы фазасы вектордың осьпен уақыттың алғашқы мезетінде жасаған бұрышына тең гармониялық тербеліс жасайды.

Бұл айтылғандардан гармониялық тербелісті ұзындығы тербеліс амплитудасына тең, ал вектордың бағыты  $x$  осімен тербелістің бастапқы фазасына тең бұрыш жағдайындай вектор арқылы беруге болатыны көрінеді.

### § 69. Бағыттары бірдей тербелістерді қосу

Дене бір мезгілде бір бағытта немесе әр түрлі бағытта өтетін бірнеше тербеліске қатысатын жағдайлар да кездеседі. Егер, мысалы, рессорлар үстінде теңселіп тұрған вагонның төбесіне пружинаға бекітілген шарикті іліп қойсақ, онда шариктің Жер бетімен салыстырғандағы қозғалысы вагонның Жермен салыстырғандағы тербелісінен және шариктің вагонмен салыстырғандағы тербелісінен тұрады.

Бағыттары және жиіліктері бірдей екі гармониялық тербелісті қосуды қарастырайық. Тербеліп тұрған дененің  $x$  ығысуы



172-сурет.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (69.1)$$

түрінде жазылатын  $x_1$  және  $x_2$  ығысулардың қосындысына тең:

Екі тербелісті де  $a_1$  және  $a_2$  векторы арқылы берейік (172-сурет). Векторларды қосу ережесі бойынша  $a$  қорытқы векторды салайық. Бұл вектордың  $x$  осіндегі проекциясы қосылғыш векторлар проекциясының қосындысына тең екендігін оңай байқауға болады:

$$x = x_1 + x_2.$$

Демек,  $a$  векторы қорытқы тербелісті береді. Бұл вектор  $a_1$  және  $a_2$  векторлары сияқты  $\omega_0$  бұрыштық жылдамдықпен айналады, сондықтан да қорытқы қозғалыс жиілігі  $\omega_0$  амплитудасы  $a$  және бастапқы фазасы  $\alpha$  гар-



мониялық тербеліс болады. Салудан төмендегі байқалады:

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (69.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (69.3)$$

Сонымен, гармониялық тербелісті вектор арқылы беру бірнеше тербелісті қосуды векторларды қосу амалына келтіруге мүмкіндік береді. Бұл әдіс, әсіресе, оптикада жарық тербелістерін толқын фронтының әр түрлі учаскесінен берілген нүктеге келетін көптеген тербелістердің қабаттасуы ретінде анықталатын жағдайда пайдалы.

(69.2) және (69.3) формулаларын, (69.1) өрнектерін қосып және тригонометриялық түрлендірулер қолданып та алуға болады. Бірақ бұл формулаларды алудағы біз қолданған тәсіл қарапайымдылығымен әрі көрнекілігімен көзге түседі.

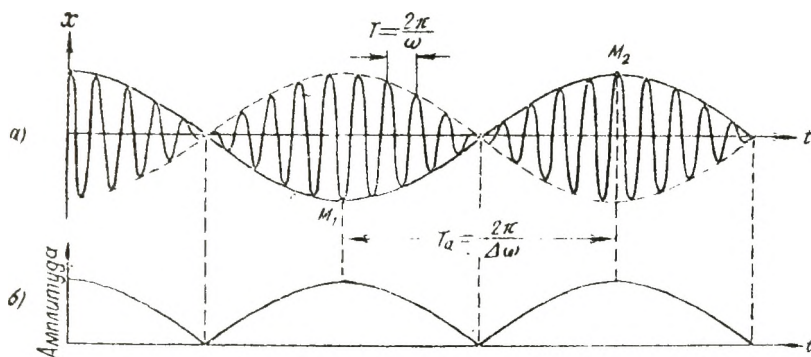
Амплитуданы табуға арналған (69.2) өрнегіне анализ жасайық. Егер екі тербелістің  $\alpha_2 - \alpha_1$  фазалар айырмасы нольге тең болса, онда қорытқы тербелістің амплитудасы  $a_1$  және  $a_2$  шамаларының қосындысына тең. Егер  $\alpha_2 - \alpha_1$  шамасы  $+\pi$  немесе  $-\pi$ -ге тең болса, яғни екі тербеліс те қарама-қарсы фазада болса, онда қорытқы тербелістің амплитудасы  $|a_1 - a_2|$  шамасына тең.

Егер  $x_1$  және  $x_2$  тербеліс жиіліктері бірдей болмаса, онда  $a_1$  және  $a_2$  векторлары әр түрлі жылдамдықпен айналады. Бұл жағдайда қорытқы вектор  $a$  шама жағынан толықсып, тұрақсыз жылдамдықпен айналады. Демек, бұл жағдайда қорытқы қозғалысты гармониялық тербеліс емес басқа бір күрделі тербелмелі процесс атқарады.

## § 70. Соғу

Қосылатын екі тербелістің жиілігі бір-бірінен аздап өзгешелеу болатын жағдайға ерекше мән беріледі. Біз төменде көрсететініміздей бұл жағдайда қорытқы қозғалысты амплитудасы толықсымалы гармониялық тербеліс ретінде қарастыруға болады. Мұндай тербеліс *соғу* деп аталады.

Тербелістердің біреуінің жиілігін  $\omega$  әрпімен, екінші тербелістің жиілігін  $\omega + \Delta\omega$  арқылы белгілейік. Шарт бойынша  $\Delta\omega \ll \omega$ . Екі тербелістің амплитудасы бірдей және  $a$  шамасына тең деп алайық. Тербелістердің жиілігі аз да болса өзгешелеу болғандықтан, уақыт есебінің басын, екі тербелістің де бастапқы фазасы нольге тең болатындай етіп алуға болады. Іс жүзінде, бұл жағдай



173-сурет.

екі тербелістегі ығысу да бірден өзінің ең үлкен оң мәніне келгенше күте тұрып, осы мезетте «секундометрді қосу» керек екендігін білдіреді. Онда екі тербелістің теңдеуі де мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t, \\ x_2 &= a \cos (\omega + \Delta\omega) t. \end{aligned}$$

Бұл екі өрнекті қосып әрі косинустардың қосындысына арналған тригонометриялық формуланы қолданып, төмендегіні аламыз:

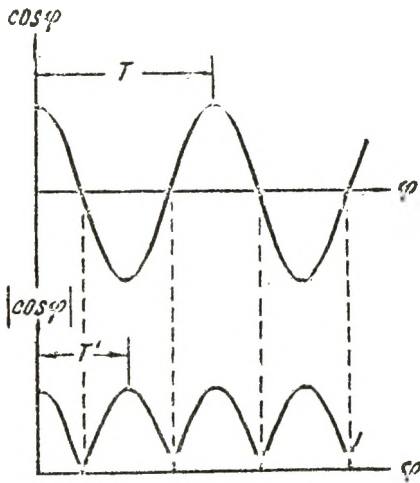
$$x = x_1 + x_2 = \left( 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (70.1)$$

(екінші көбейткіштегі  $\Delta\omega/2$  мүшені  $\omega$  шамасымен салыстырғанда ескермеуге болады).

(70.1) функциясының графигі 173, а-суретте кескінделген. График  $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$  үшін салынған. Шындығында бұл қатынас аса үлкен болуға тиісті.

(70.1) формуласындағы жақшаға алынған мүше екінші көбейткішке қарағанда баяу өзгереді.  $\Delta\omega \ll \omega$  шарты бойынша,  $\cos \omega t$  көбейткіші бірнеше толық тербеліс жа-

сағанша, жақшада тұрған көбейткіш елеулі өзгеріске ұшырамайды. Бұл жағдай (70.1) тербелісін жиілігі  $\omega$ , амплитудасы кейбір периодтық заңмен өзгертін гармониялық тербеліс ретінде қарастыруға негіз болады. Жақшада тұрған көбейткіш



174-сурет.

—  $2a$ -дан  $+2a$ -ға дейінгі аралықта өзгертіндіктен, ал анықтама бойынша амплитуда оң шама болғандықтан, жақшадағы көбейткіш бұл заңның өрнегі бола алмайды. Амплитуданың графигі 173, б-суретте көрсетілген. Амплитуданың аналитикалық өрнегі төмендегідей болатындығы анық:

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (70.2)$$

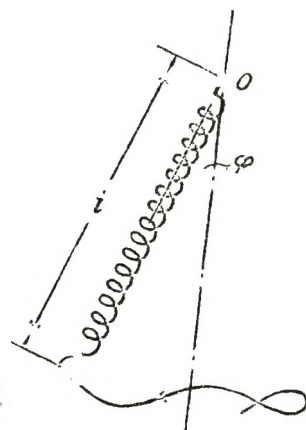
(70.2) функциясы — жиілігі модуль таңбасының астындағы қосинус пен оның модульының графиктері салыстырмалы түрде берілген (174-суретті қараңыз) өрнектің жиілігінен 2 есе артық, яғни жиілігі  $\Delta\omega$  болатын периодты функция. Сонымен, амплитуда толықсуының жиілігі — оны соғу жиілігі деп атайды — қосылатын тербелістер жиілігінің айырмасына тең.

$2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$  көбейткіші амплитуданы ғана анықтамайды, сондай-ақ, тербеліс фазасына да ықпал жасайды. Бұл жағдай, мысалы, амплитуданың көршілес максимумдарына сәйкес келетін ауытқулардың қарама-қарсы таңбада болуынан байқалады [173, а-суреттегі  $M_1$  және  $M_2$  нүктелерін қараңыз].

## § 71. Өз ара перпендикуляр тербелістерді қосу

Екі еркіндік дәрежесі бар системаны, яғни орнын белгілеу үшін екі шама қажет болатын системаны қарастырайық. Бұған шарик пен пружина бір жазықтықта маятник тәрізді тербеліс жасайтындай етіп, бір ұшы шарнирге бекітілген жеңіл ұзын пружинаға ілінген ауыр шарик

осыған мысал бола алады. Пружина осінің вертикальмен жасайтын  $\varphi$  бұрышын және шарнир осінен шарик центріне дейінгі  $l$  қашықтықты бере отырып шариктің қалпын (орнын) анықтауға болады. Шариктің екі тербеліске: біріншіден,  $\varphi$  бұрышы өзгертін тербеліске, екіншіден,  $l$  қашықтығы өзгертін тербеліске қатысуы мүмкін. Бірінші тербелістің жиілігі пружинаның  $l$  ұзындығы және ауырлық күшінің  $g$  үдеуімен, екінші тербелістің жиілігі пружинаның  $R$  серпімділік коэффициенті және шариктің  $m$  массасымен анықталады. Егер екі тербелісті бірден қоздырсақ, онда шарик, жалпы айтқанда, формасы екі тербелістің жиілігі мен бастапқы фазасына тәуелді болатын кейбір күрделі траекториямен қозғалады (175-сурет)



175-сурет.

Екінші мысалға ұзын жіңішке жіпке ілінген ауыр шарикті (математикалық маятникті) қарастырайық<sup>1</sup>. Бұл шарик бір-біріне перпендикуляр бағытта екі тербеліс

жасай алады, сонымен қатар екі тербелістің жиілігі бір-біріне дәл келеді (екі жиілік те маятниктің  $l$  ұзындығы мен  $g$  ауырлық күшінің үдеуі арқылы анықталады). Бұл жағдайда, жалпы айтқанда, шарик формасы екі тербелістің фазалар айырмасына тәуелді болатын кейбір қисық траекториясының бойымен қозғалады.

$x$  және  $y$  координата осьтерінің бойымен бірдей  $\omega$  жиілікпен тербелетін өз ара перпендикуляр екі тербелісті қосуға көшейік. Уақыт есебінің басын бірінші тербелістің бастапқы фазасы нольге тең болатындай етіп таңдап алайық. Онда тербеліс теңдеуі былай жазылады:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos (\omega t + \alpha); \end{aligned} \right\} \quad (71.1)$$

мұндағы  $\alpha$  — екі тербелістің фазалар айырмасы.

(71.1) өрнегі, екі тербеліске бірдей қатысушы дене қозғалатын траекторияның теңдеуін параметрлік түрде

<sup>1</sup> 66-параграфта мұндай маятник берілген жазықтықта тербеліс жасайтындықтан, оны бір еркіндік дәрежесі бар система ретінде қарастыруға болады деп ұйғарғанбыз.

береді. Траектория теңдеуін әдеттегідей түрде беру үшін (71.1) теңдеуінен параметрін шығару керек. Бірінші теңдеуден мынаны алуға болады:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (71.2)$$

Олай болса,

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (71.3)$$

Енді  $\cos \omega t$  және  $\sin \omega t$  шамаларының (71.2) және (71.3) өрнектеріндегі мәндерін орнына қойып, (71.1) теңдеуінің екіншісінен қосындының косинусына арналған формула бойынша косинусты ашып жазайық. Осының нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Онша күрделі емес түрлендірулерден кейін соңғы теңдеуді мына түрге келтіруге болады:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (71.4)$$

Аналитикалық геометриядан (71.4) теңдеуі, осьтері  $x$  және  $y$  координата осьтеріне қатысты бағыты қалауымызша алынған эллипс теңдеуі екендігі белгілі. Эллипстің бағдарлануы мен оның жарты осьтерінің шамасы өте күрделі түрде  $a$  және  $b$  амплитудалар мен фазалар айырмасына тәуелді болады.

Кейбір жеке жағдайлардағы траектория формасын зерттейік.

1. Фазалар айырмасы нольге тең. Бұл жағдайда (71.4) теңдеуі мынадай түр қабылдайды:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

бұдан түзудің теңдеуі шығады:

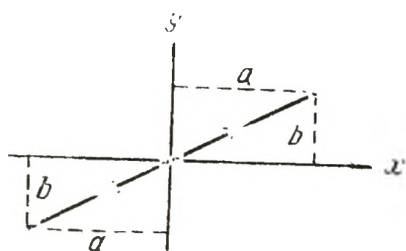
$$y = \frac{b}{a} x. \quad (71.5)$$

Тербеліп тұрған нүкте осы түзудің бойымен орын ауыстырады, әрі оның координата басынан қашықтығы  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  шамасына тең. Бұған  $x$  және  $y$  үшін (71.1)

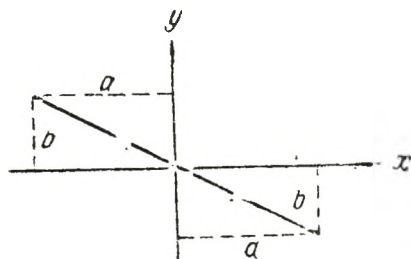
өрнегін қойып және  $\alpha = 0$  екендігін ескеріп,  $r$  шамасының уақыт бойынша өзгеру заңын аламыз:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t. \quad (71.6)$$

(71.6) өрнегінен қорытқы қозғалыс (71.5) түзуі бойымен  $\omega$  жиілікпен және  $\sqrt{a^2 + b^2}$  шамасына тең амплитудамен тербелетін гармониялық тербеліс екендігі шығады (176-сурет).



176-сурет.



177-сурет.

2.  $\alpha$  фазалар айырмасы  $\pm\pi$ -ге тең. (71.4) теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

бұдан қорытқы қозғалыс

$$y = -\frac{b}{a}x$$

түзуінің бойымен тербелетін гармониялық тербеліс екендігі шығады (177-сурет).

3.  $\alpha = \pm\pi/2$  болғанда (71.4) теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (71.7)$$

теңдеуіне, яғни координата осьтеріне келтірілген эллипс теңдеуіне айналады, әрі эллипстің жарты осі тербеліс амплитудаларына тең  $a$  және  $b$  амплитудалар тең болғанда шеңберге айналады.

$\alpha = +\pi/2$  және  $\alpha = -\pi/2$  жағдайлары эллипс немесе шеңбер бойымен бағытталған қозғалыстың бағыты арқылы ажыратылады. Егер  $\alpha = +\pi/2$  болса, (71.1) теңдеуін былай жазуға болады:

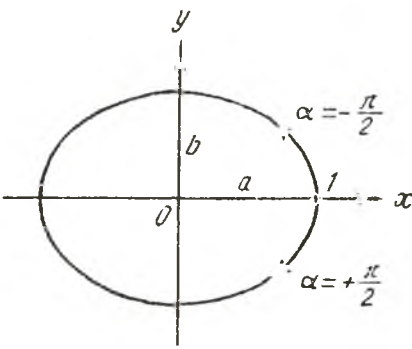
$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= -b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.8)$$

$t=0$  мезетте деңе  $l$  нүктеде болады (178-сурет) Одан арғы уақыт мезеттерінде  $x$  координатасы кемиді, ал  $y$  координатасы теріс болады. Олай болса, қозғалыс сағат тілі бойынша бағытталады.

$\alpha = -\pi/2$  болғанда тербеліс теңдеуі мына түрде қозғалады:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (71.9)$$

Осыдан қозғалыс сағат тіліне қарсы бағытта өтеді деп қорытынды жасауға болады.



178-сурет.

Осы айтылғандардан радиусы  $R$  шеңбер бойындағы  $\omega$  бұрыштық жылдамдығы бар бір қалыпты қозғалысты өз ара перпендикуляр екі тербелістің қосындысы ретінде көрсетуге болады екен:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (71.10)$$

( $y$ -ке арналған өрнектегі «+» таңбасы сағат тіліне қарсы қозғалысқа, «-» таңбасы сағат тілі

бойынша өтетін қозғалысқа сәйкес келеді).

Қорытындыда өз ара перпендикуляр тербелістердің жиілігі өте аз  $\Delta\omega$  шамаға ғана ажыратылған жағдайда оларды жиіліктері бірдей, бірақ фазалар айырмасы баяу өзгертін тербеліс ретінде қарастыруға болатынын атап өтсейік. Шынында да, тербеліс теңдеуін төмендегідей түрде беруге болады:

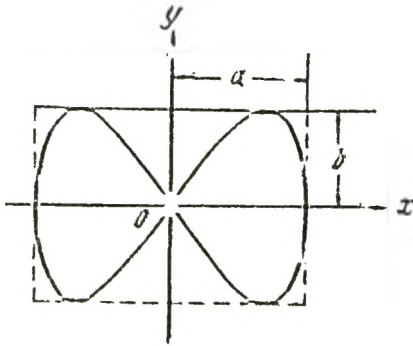
$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)], \end{aligned} \right\}$$

және  $\Delta\omega t + \alpha$  өрнегін уақыт бойынша сызықтық заңмен баяу өзгертін фазалар айырмасы ретінде қарастыруға болады.

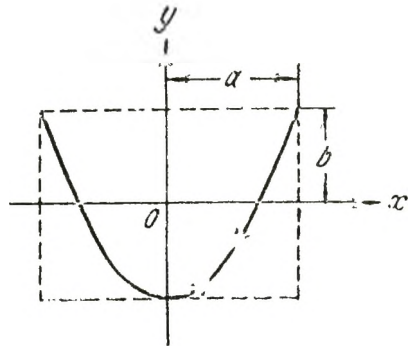
Қорытқы қозғалыс бұл жағдайда фазалар айырмасының  $-\pi$ -ден  $+\pi$ -ге дейінгі мәндеріне сай келетін форманы біртіндеп қабылдайтын, баяу өзгертін қисық сызық бойымен өтеді.

## § 72. Лиссажу фигуралары

Егер өз ара перпендикуляр тербелістердің жиіліктері бірдей болмаса, онда қорытқы қозғалыстың траекториясы Лиссажу фигуралары деп аталатын өте күрделі қи-



179-сурет.



180-сурет.

сық сызық түрінде болады. 179-суретте жиіліктер қатынасы 1 : 2 және фазалар айырмасы  $\pi/2$  болғанда алынған қарапайым траекториялардың бірі көрсетілген. Тербеліс теңдеулері мына түрде жазылады:

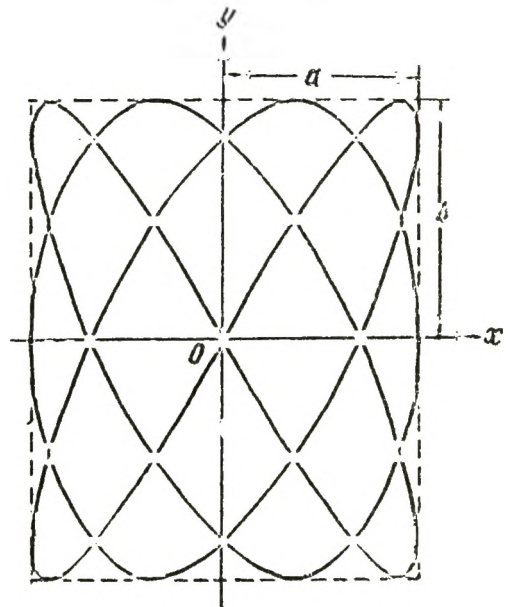
$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \cos \left( 2\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Нүкте  $x$  осі бойымен бір шектік жағдайдан екінші жағдайға орын ауыстырып үлгіргенше  $y$  осі бойымен нольдік қалыпта шыға отырып, бір шектік жағдайға, сонан соң, екіншісіне келіп және нольдік жағдайға жетіп үлгіреді.

Жиіліктері 1 : 2 қатынасындай және фазалар айырмасы нольге тең болғанда траектория бойымен қозғалған нүкте бір ұшына барып, қайта қайтатын қисық сызыққа айналады (180-сурет).

Тербеліс жиіліктерінің қатынасын өрнектейтін ра-



181-сурет.



ционал бөлшек неғұрлым бірге жақындаған сайын, соғұрлым Лиссажу фигуралары да күрделене берседі. 181-суретте мысал үшін жиіліктер қатынасы 3 : 4 және фазалар айырмасы  $\pi/2$  болатын қисық сызық көрсетілген.

### § 73. Өшетін тербелістер

Гармониялық тербеліс кезінде, бір тербеліп тұрған нүкте тек квазисерпімді күштің ғана әсерінде болады деп есептедік. Кез келген реал (нақты) тербелмелі системада, әрқашанда системаның энергиясын төмендететін, кедергі күші болады. Егер энергияның кемуі сыртқы күштің жұмысы есебінен толықтырылып отырмаса, онда тербеліс өшеді.

Еркін (немесе меншікті) өшетін тербелістерді қарастырайық. Тербеліс еркін болғандықтан да сыртқы күш тепе-теңдік қалпынан шығарған немесе сыртқы күш есебінен алғашқы түрткі алған система, одан әрі қарай өзімен-өзі болады да тек қана квазисерпімді күш пен ортаның кедергі күшінің әсерінде тұрады. Әлсіз тербелістерді қарастырумен шектелейік. Онда системаның жылдамдығы да аз болады, ал онша үлкен емес жылдамдықтарда кедергі күші жылдамдықтың шамасына пропорционал болады:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}, \quad (73.1)$$

мұндағы  $r$  — кедергі коэффициенті деп аталатын тұрақты шама. «—» таңбасы  $f_r$  және  $v$  шамаларының бағыттары қарама-қарсы болуына байланысты алынған.

Тербеліп тұрған денеге арналған Ньютонның екінші заңын жазалық:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Оны төмендегідей етіп қайта жазайық:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (73.2)$$

мұнда мынадай белгілеулер енгізілген:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad (73.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (73.4)$$

$\omega_0$  ортаның кедергісі болмағанда, яғни  $r=0$  болғанда система жасайтын еркін тербелістің жиілігі екендігін ес-

кертейік. Бұл жиілікті система тербелісінің меншікті жиілігі деп атайды.

Гармониялық осциллятор жағдайында  $a$  амплитудасы арқылы анықталатын тербеліс құлашы тұрақты болып қалады. Орта кедергісінің болуы тербеліс құлашының кемуіне әкеліп соғады. Сондықтан (73.2) теңдеуінің шешімін мынадай түрде іздейік:

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (73.5)$$

мұндағы  $a(t)$  — кейбір уақыт функциясы.

(73.5) өрнегін  $t$  бойынша дифференциалдап,  $x$  және  $\ddot{x}$  шамаларын табамыз:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha), \\ \ddot{x} &= \ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2a\omega \sin(\omega t + \alpha) - \\ &\quad - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Бұл өрнектерді (73.2) теңдеуіне қойып, аса күрделі емес түрлендірулерден кейін мынадай қатыстарға келеміз:

$$\begin{aligned} [\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a] \cos(\omega t + \alpha) - \\ - 2\omega[a + \beta a] \sin(\omega t + \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Біздің алған теңдеуіміз  $t$  шамасының кез келген мәнін қанағаттандыру үшін,  $\cos(\omega t + \alpha)$  және  $\sin(\omega t + \alpha)$  болғанда коэффициенттердің нольге тең болуы қажет. Осылайша біз екі теңдеуге келіп тірелеміз:

$$a + \beta a = 0, \quad (73.6)$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0. \quad (73.7)$$

(73.6) теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\frac{da}{dt} = -\beta a, \text{ бұдан } \frac{da}{a} = -\beta dt.$$

Соңғы теңдеуді интегралдау мынаны береді:  $\ln a = -\beta t + \ln a_0$ , мұндағы  $\ln a_0$  арқылы интегралдау тұрақтысы белгіленген. Ақырында, табылған қатысты потенциалға арқылы,  $a(t)$  үшін мынадай өрнекті аламыз:

$$a = a_0 e^{-\beta t} \quad (73.8)$$

$a = -\beta a$  және  $a = \beta^2 a$  болатындығын оңай байқауға болады. Осы мәндерді (73.7) теңдеуіне қою мына қатысқа келтіреді:

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0,$$

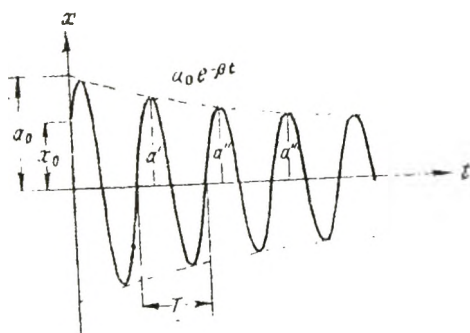
бұдан нольге тең емес  $a$  көбейткішке қысқартудан соң  $\omega^2$ -ның мәні алынады:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (73.9)$$

$\omega_0^2 > \beta^2$  шарты орындалғанда шамасы заттық және (73.2) дифференциалдық теңдеуінің шешімін (73.5) түрінде беруге болады. Сонымен өшу онша үлкен болмағанда ( $\beta < \omega_0$  болғанда), тербеліс мына функция арқылы сипатталады:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (73.10)$$

Бұл функцияның графигі 182-суретте берілген. Пунктирлік сызықпен тербеліп тұрған нүктенің  $x$  ығысуы болатын шекара көрсетілген.



182-сурет.

(73.10) функциясының түріне сәйкес системаның қозғалысын жиілігі  $\omega$  амплитудасы (73.8) заңы бойынша өзгертін гармониялық тербеліс ретінде қарастыруға болады. 182-суреттегі пунктирлік қиық сызықтың жоғарғысы  $a(t)$  функциясы-

ның графигін береді, әрі  $a_0$  шамасы уақыттың бастапқы мезетіндегі амплитуданы береді.  $x_0$  бастапқы ығысу,  $a_0$  шамасынан басқа, бастапқы фазаға да тәуелді болады:  $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$  (182-сурет).

Тербелістің өшу жылдамдығы өшу коэффициенті деп аталатын  $\beta = r/2m$  шамасымен анықталады. Амплитуда  $e$  есе кемитін уақытты табайық. Анықтама бойынша  $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$ , осыдан  $\beta\tau = 1$ . Демек, өшу коэффициенті амплитуда  $e$  есе шамасына кемитін уақыт аралығына шама жағынан кері болады.

(73.9) формуласы бойынша өшетін тербелістің периоды мынаған тең:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (73.11)$$

Орта кедергісі онша үлкен болмаған кезде ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) тербеліс периоды іс жүзінде  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  шамасына тең. Ошу коэффициенті өскен сайын тербеліс периоды артады.

Осыдан кейінгі әйтеуір бір бағытқа ең үлкен ауытқулар (мысалы, 182-суреттегі  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$ , және т. б.) геометриялық прогрессия түзеді. Шынында да, егер  $a' = a_0 e^{-\beta t}$  болса, онда  $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$ ,  $a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$  және т. б. Жалпы бір-бірінен бір периодқа сәйкес уақыт мезеті айырылатын амплитудалар қатынасы мынаған тең:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}$$

Бұл қатынас өшу декременті деп, оның логарифмі өшудің логарифмдік декременті деп аталады:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (73.12)$$

Соңғы шаманы әдетте тербелістің сипаттамасы ретінде пайдаланады.  $\beta$  шамасын (73.12) өрнегіне сәйкес  $\lambda$  және  $T$  арқылы өрнектей отырып, амплитуданың кему заңын мына түрде жазуға болады:

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}$$

Амплитуда  $e$  есе кемитін  $\tau$  уақыт ішінде система  $N_e = \tau/T$ -ға тербеліс жасап үлгереді.  $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$  шартынан  $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$  өрнегін алуға болады. Демек, өшудің логарифмдік декременті шама жағынан амплитуда  $e$  есе кемитін уақыт ішінде жасалатын тербеліс санына кері шама.

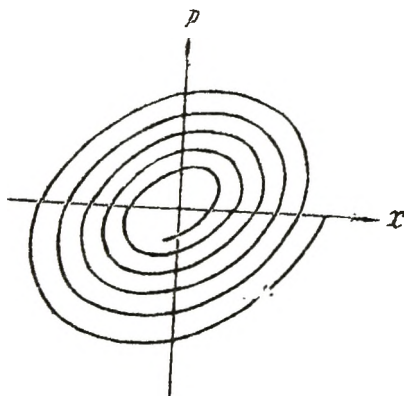
Тербелмелі системаны сипаттау үшін көбінесе тербелмелі системаның беріктігі деп аталатын төмендегі шама енгізіледі:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (73.13)$$

Анықтамадан көрінгендей, беріктілік амплитуда  $e$  есе кемитін  $\tau$  уақыт ішінде жасалатын  $N_e$  тербеліс санына пропорционал болады.

Өшетін тербеліс жасайтын системаның импульсын табайық. (73.10) функциясын уақыт бойынша дифференциалдап және алынған нәтижені массасына көбейтіп төмендегіні аламыз:

$$p = mx = -ma_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$



183-сурет.

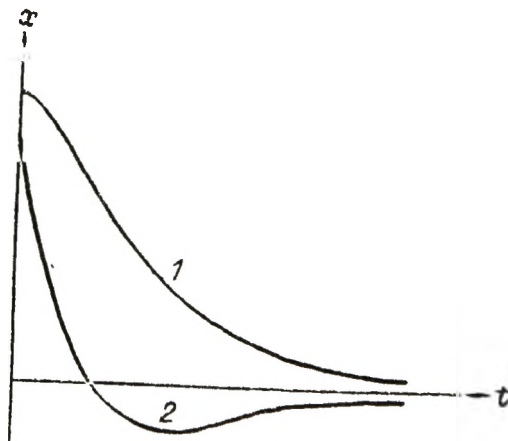
Бұл өрнекті мына түрде түрлендіруге болады:

$$p = p_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \quad (73.14)$$

мұндағы  $p_0 = ma_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = ma_0 \omega_0$ , ал  $\psi$  мына шартты қанағаттандырады:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Егер  $e^{-\beta t}$  көбейткіші болмаса, онда (73.10) және (73.14) теңдеулерінен  $t$ -ны шығарып тастап, 71-параграфта жүзеге асырылғандай, координата осьтеріне қатысты төңкерілген,  $x$  және  $p$  координаталарындағы эллипс теңдеуін алған болар едік.  $e^{-\beta t}$  экспоненциалдық көбейткішінің болуы, эллипстің бұралған спиральға айналуына әкеліп соғады (183-сурет). Бұл спираль өшетін тербелістің фазалық траекториясы болып табылады. Өлшеу коэффициенті  $\beta$  үлкен болған сайын, ол координата осьтеріне қатысты күштірек еңкейеді.



184-сурет.

(73.11) формуладан  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$  болғанда, тербеліс периоды шексіздікке айналатындығы, яғни қозғалыс периодты болудан қалатындығы байқалады. Арнайы жүргізілген математикалық анализге сәйкес  $\omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$  болғанда қозғалыс периодтық (периодсыз) сипатта —

тепе-теңдік қалпынан шығарылған система тепе-теңдік қалыпқа тербеліс жасамай қайта оралады. 184-суретте аperiodтық қозғалыс кезінде системаны тепе-теңдік қалыпқа келтірудің екі ықтималды тәсілі келтірілген. Осы екі тәсілдің қайсысымен системаның тепе-теңдік қалыпқа келетіндігі бастапқы шарттарға байланысты болады. 2 қисықпен кескінделген қозғалыс система

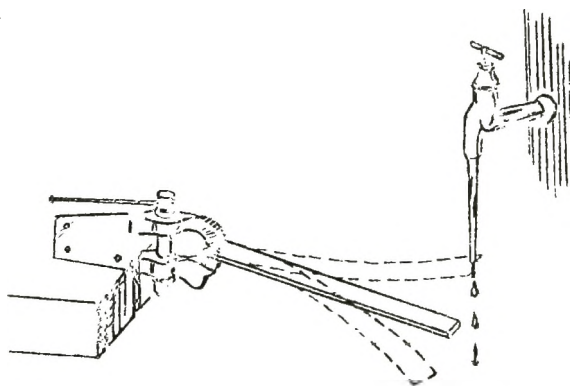
$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})$$

шарты бойынша анықталатын бастапқы жылдамдықпен, тепе-теңдік қалпына қарай  $x_0$  ығысумен сипатталатын қалпынан қозғала бастаған жағдайда алынады.

## § 74. Автотербелістер

Өшетін тербелістер кезінде системаның энергиясы ортаның кедергісін жеңуге жұмсалады. Егер энергияның бұл шығынын толықтырып отырсақ, тербеліс өшпейтін болады. Системаның энергиясын толықтыру сырттай болатын түрткі есебінен жүзеге асырылуы мүмкін, алайда бұл түрткілер системаға оның тербелісімен үйлестіріле берілуі тиіс, олай болмаған күнде олар тербелісті бәсеңдетуі мүмкін, тіпті оны тоқтатуы да мүмкін. Берілген түрткінің өзінің қозғалысымен үйлесімді болуын қамтамасыз ете отырып, тербелмелі система сыртқы әсерді өзі басқаратындай етуге болады. Мұндай система автотербелмелі система деп, ол жасайтын өшпейтін тербелістер — автотербелістер деп аталады.

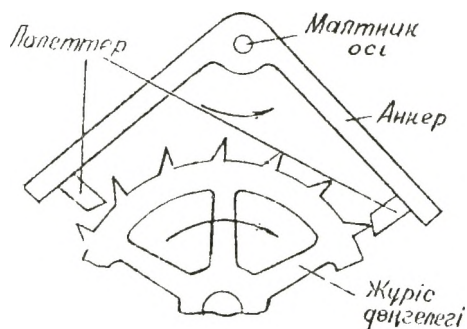
Ең қарапайым автотербелмелі системалардың бірі ретінде 185-суретте кескінделген құрылғыны қарастырайық. Иілгіш серпімді сызғыштың бір ұшы қозғалмастай бекітілген. Егер сызғыштың бос ұшын төмен басып, қоя берсек, сызғыш өшетін тербеліс жасай бастайды.



185-сурет.

Сызғыштың бос ұшы жоғарғы шектік жағдайда тұрған мезетте тиісіндей етіп, оған су ағынын бағыттау арқылы тербелісті өшпейтін етуге болады. Ағынның линейка ұшына соққысы үйкеліс салдарынан болатын тербеліс энергиясының шығынын толықтырады.

Автотербелмелі системаның екінші мысалы ретінде сағат механизмін қарастырайық. Сағат маятнігі пілген рычагпен — анкермен бір оське орнатылған (186-сурет).



186-сурет.

Анкердің ұштарында палеттер деп аталатын арнаулы формадағы шығыңқы жерлері болады. Тісті жүріс дөңгелегі оны сағат тілінің бағыты бойынша бұруға тырысатын жүктің немесе бұралған пружинаның әсерінде болады. Алайда көп уақыт бойы дөңгелек маятник теңселген кезде тістердің бетімен сырғанап отыра-

тын; палеттердің бүйір бетіндегі тістердің біріне тіреліп тұрады. Маятник ортаңғы қалпының маңында тұрған мезетте ғана палеттер тістердің жолын бөгенді дөңгелек, өзінің төбесінен сырғып отыратын палеттердің қиялай кесілген ұшы арқылы анкерді тісімен итеріп, бұрылады. Маятник теңселуінің толық циклі ішінде (период ішінде) жүріс дөңгелегі екі тіске бұрылады, әрі әрбір палет бір түрткіден алады. Осы түрткілер арқылы көтерілген жүктің немесе бұралған пружинаның энергиясы есебінен, үйкеліс салдарынан пайда болған маятник энергиясының шығыны толықтырылады.

## § 75. Еріксіз тербелістер

Еріксіз тербелістер деп тербелмелі системада периодты түрде өзгертін күштің (біз оны мәжбүр етуші күш деп атаймыз) әсерінен пайда болатын тербелістерді айтады.

Айталық, мәжбүр етуші күш уақыт бойынша мынадай гармониялық заңмен өзгерсін:

$$f = F_0 \cos \omega t. \quad (75.1)$$

Қозғалыс теңдеуін құрғанда мәжбүр етуші күштен басқа системаға еркін тербеліс кезінде әсер ететін күштерді де, яғни квазисерпімді күш пен ортаның кедергі күшін де ескеру керек. Тербелісті мейлінше аз деп есептей отырып бұрынғыдай кедергі күшін жылдамдыққа пропорционал болады деп санаймыз. Онда қозғалыс теңдеуі былай жазылады:

$$m\ddot{x} = -kx - rx + F_0 \cos \omega t.$$

Бұл теңдеуді  $m$  шамасына бөліп,  $x$  және  $\dot{x}$  шамалары бар мүшелерді сол жағына шығарып, біртекті емес сызқты екінші дәрежелі дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (75.2)$$

мұндағы  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ ,  $\beta = \frac{r}{2m}$  — өшу коэффициенті,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{R}{m}}$  — система тербелісінің меншікті жиілігі.

Дифференциалдық теңдеулер теориясынан біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес келетін біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен біртекті емес теңдеудің дербес шешімдерінің қосындысына тең екендігі белгілі. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі бізге бұрыннан белгілі [(73.2) теңдеуінің жалпы шешімі болып саналатын (73.10) функциясын қараңыз). Ол мына түрде жазылады:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (75.3)$$

мұндағы  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , ал  $a_0$  және  $\alpha'$  — кез келген тұрақтылар.

(75.2) теңдеуінің дербес (кез келген тұрақты шамалар болмайтын) шешімін табу қалды. Ол шешім мына түрде жазылады:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (75.4)$$

(қарастырылып отырған жағдайда бастапқы фаза  $\alpha$ -ның орнына —  $\varphi$  арқылы белгілеу қолайлы). Векторлық диаграмманың (68 және 69-параграфтарды қараңыз) көмегімен біздің жорамалымыздың дұрыс екенін, сондай-ақ (75.4) функциясы (75.2) теңдеуін қанағаттандыратын  $a$  мен  $\varphi$  шамаларының мәнін табуға болатынды-

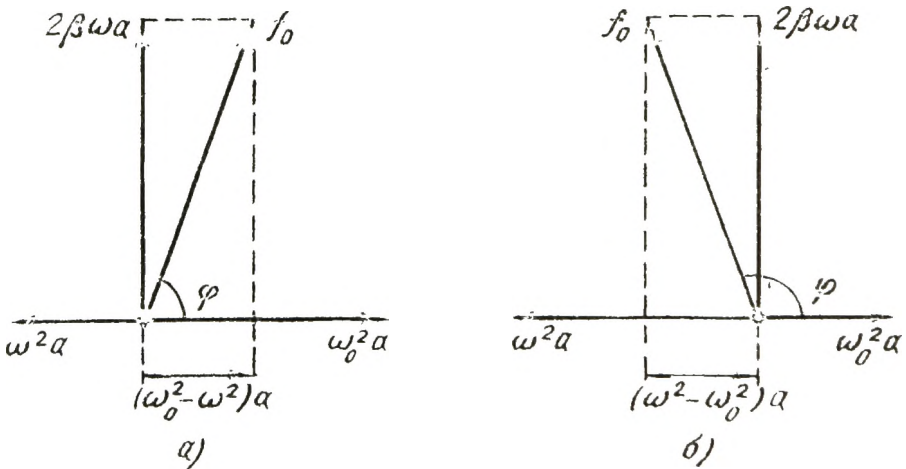


ғына оңай көз жеткізуге болады. (75.4) функциясын уақыт бойынша дифференциалдап, (75.2) тендеуінің алғашқы екі мүшесін мына түрде жазуға болады:

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (75.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (75.6)$$

(75.2) тендеуінен байқалғандай,  $f_0 \cos \omega t$  гармониялық тербеліс жиілігі осындай үш гармониялық тербелістің қосындысы болып табылады: (75.6) тербелісі, (75.5) тербелісі және  $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$  тербелісі. Егер соңғы тербелісті ұзындығы  $\omega_0^2 a$  болатын оңға қарай бағытталған вектормен кескіндесек (187-сурет), онда (75.5) тербелісі  $\omega_0^2 x$  векторына қатысты сағат тіліне қарсы  $\pi/2$  бұрышқа бұрылған ұзындығы  $2\beta\omega a$  болатын вектормен, ал (75.6) тербелісі  $\omega_0^2 x$  векторына қатысты  $\pi$  бұрышына бұрылған ұзындығы  $\omega^2 a$  вектормен кескінделеді. (75.2)



187-сурет.

тендеуі қанағаттану үшін, аталған үш вектордың векторлық қосындысы  $f_0 \cos \omega t$  тербелісін кескіндейтін векторға сай келуі керек. Мұндай сәйкестік төмендегі шарт (187, а-суретті қараңыз) бойынша анықталатын  $a$  амплитудасының мәнінде ғана мүмкін болады:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

осыдан

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (75.7)$$

187 а-сурет  $\omega < \omega_0$  жағдайына сай келеді.  $\omega > \omega_0$  жағдайына сай келетін 187, б-суреттен де  $a$  шамасының осындай мәні алынады.

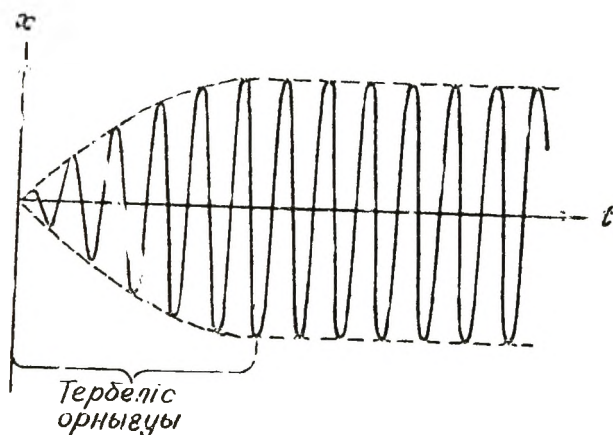
187-сурет сонымен қатар (75.4) еріксіз тербелісінің сол тербелісті тудыратын (75.1) мәжбүр етуші күшінен фаза бойынша қалу шамасын білдіретін  $\varphi$ -дің мәнін алуға да мүмкіндік береді. Суреттен мынаны байқауға болады:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (75.8)$$

(75.4) өрнегіне (75.7) және (75.8) формулалары бойынша анықталған  $a$  және  $\varphi$  шамаларының мәндерін қойсақ, (75.2) біртекті емес тендеуінің дербес шешімін аламыз:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (75.9)$$

(75.9) функциясының (75.3) өрнегімен қосындысы, системаның еріксіз тербеліс кезіндегі қасиетін өрнектейтін, (75.2) тендеуінің жалпы шешімін береді. (75.3) қосылғаны тербелістің (188-сурет) орнығуы деп аталатын бастапқы кезеңде ғана едәуір роль атқарады.  $e^{-\beta t}$  экспоненциалды көбейткіш салдарынан (75.3) құраушысының



188-сурет.

ролі уақыт өткен сайын кему береді және едәуір уақыт өткен соң, (75.9) қосылғышын ғана сақтай отырып, оны ескермеуге де болады.

Сонымен, (75.9) функциясы орныққан еріксіз тербелістерді сипаттайды. Олар жиілігі гармониялық тербелі-

сі жиілігіне тең мәжбүр етуші күш болып саналады. Еріксіз тербелістің (75.7) амплитудасы мәжбүр етуші күштің амплитудасына пропорционал. Берілген тербелмелі система ( $\omega_0$  мен  $\beta$  белгілі) үшін амплитуда мәжбүр етуші күштің жиілігіне тәуелді болады. Еріксіз тербелістер фаза бойынша мәжбүр етуші күштен қалып қояды, әрі қалу шамасы да мәжбүр етуші күш жиілігіне тәуелді болады [(75.8) өрнегін қараңыз].

Еріксіз тербеліс амплитудасының мәжбүр етуші күш жиілігіне тәуелділігі берілген система үшін қайсыбір анықталған жиілікте тербеліс амплитудасының ең үлкен мәніне жетуіне әкеліп соғады. Тербелмелі система мәжбүр етуші күштің әсеріне осы жиілікте ерекше сезімтал келеді. Бұл құбылыс резонанс деп, ал оған сәйкес келетін жиілік — резонанстық жиілік деп аталады.

$\omega_{\text{рез}}$  резонанстық жиілікті анықтау үшін, (75.7) функциясының максимумын немесе онымен бара-бар болатын түбір астындағы бөлімдегі өрнектің минимумын табу керек. Осы өрнекті  $\omega$  бойынша дифференциалдап және оны нольге теңестіріп, шамасын анықтайтын шартты аламыз:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (75.10)$$

(75.10) теңдеуінің үш шешімі бар:  $\omega = 0$  және  $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Нольге тең шешім бөлімнің максимумына сәйкес келеді. Қалған екі шешімнен физикалық мәні болмайтын (жиілік теріс бола алмайды) теріс шешімдер алынып тасталады. Сонымен резонанстық жиілік үшін бір мән алынады:

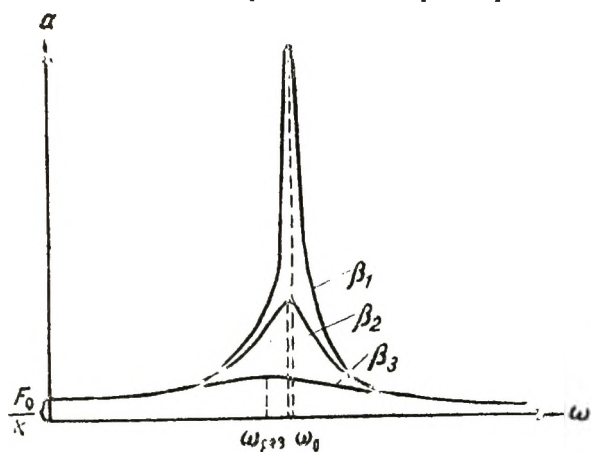
$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (75.11)$$

Жиіліктің бұл мәнін (75.7) формуласына қойып, резонанс кезіндегі амплитудаға арналған өрнекті аламыз:

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 3\beta^2}}. \quad (75.12)$$

(75.12) формуласынан, ортаның кедергісі болмағанда, резонанс кезіндегі амплитуда шексіздікке айналатындығы байқалады. (75.11) бойынша дәл осындай шарттарда ( $\beta = 0$  болғанда) резонанстық жиілік тербелмелі системаның меншікті жиілігіне сай болады. Еріксіз тербеліс амплитудасының мәжбүр етуші күш жиілігіне (немесе, дәл сондай тербеліс жиілігі) тәуелділігі графиктік

түрде 189-суретте көрсетілген. Графиктегі жеке қисық сызықтар параметрінің әр түрлі мәндеріне сәйкес келеді. (75.11) және (75.12) өрнегіне сәйкес, неғұрлым  $\beta$  аз болған сайын берілген қисық сызықтың максимумы жоғары және оңға қарай орналасады. Өте үлкен өшу кезінде ( $2\beta^2 > \omega_0^2$  болғанда) резонанстық жиілікке арналған өрнек жорымал болды. Бұл осы шарттар кезінде резонанс-



189-сурет.

тық байқалмайтынын — жиілік өскенде еріксіз тербелістің амплитудасы біркелкі кемитінін — білдіреді (189-суреттегі төменгі қисық сызық) 189-суретте кескінделген  $\beta$  параметрінің әр түрлі мәндеріне сәйкес келетін (75.7) функциясы графиктерінің жиынтығы резонанстық қисық сызықтар деп аталады.

Резонанстық қисық сызықтар жайлы тағы да мынадай ескертпелер жасауға болады.  $\omega$  нольге ұмтылған сайын барлық қисық сызықтар бірдей нольден өзгеше болатын  $f_0/\omega_0^2$  шамасына, яғни  $F_0/k$  шамасына тең шекті мәнге келеді. Бұл мән системаның шамасы тұрақты  $F_0$  күшінің әсерінен алатын тепе-теңдік қалпынан ауытқуын көрсетеді.  $\omega$  шексіздікке ұмтылғанда барлық қисық сызықтар асимптоталық түрде нольге ұмтылады, өйткені үлкен жиілік кезінде күш өз бағытын тез өзгертетіндіктен де система тепе-теңдік қалпынан айтарлықтай ығысып үлгере алмайды. Ақырында,  $\beta$  аз болған сайын, резонанс маңындағы амплитуда жиілікке байланысты көбірек өзгереді, максимум «сүйірлеу» болады.

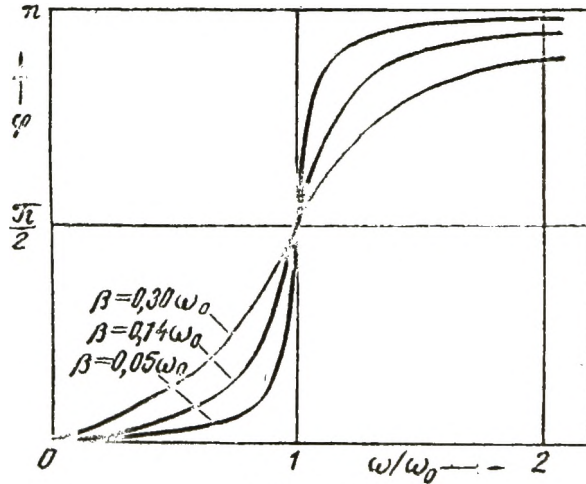
(75.12) формуласынан баяу (аз) өшу кезінде (яғни  $\beta \ll \omega_0$ ) резонанстағы амплитуда шамамен мынаған тең:

$$a_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2^3 \omega_0}$$

Бұл өрнекті, жоғарыда біз анықтаған  $f_0/\omega_0^2$  шамасына тең болатын, тұрақты  $F_0$  күшінің әсерінен тепе-теңдік қалыптан  $x_0$  ауытқуға бөлейік. Осының нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\frac{a_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2^3} = \frac{2\pi}{2^3 T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

[(73.13) формуласын қараңыз]. Сонымен  $Q$  беріктілік резонанс мезетіндегі амплитуда системаның мәжбүр етуші күш амплитудасының шамасындай тұрақты күш (бұл жағдай онша үлкен емес өшу үшін ғана дұрыс болады) әсерінен тепе-теңдік қалыптан ауытқуынан неше есе артық екенін көрсетеді.



190-сурет.

187-суреттен көрінетіндей, еріксіз тербелістер фазасы бойынша мәжбүр етуші күштер қалып қояды, әрі  $\varphi$  қалу шамасы 0-ден  $\pi$ -ге дейінгі аралықта жатады.  $\varphi$  шамасының  $\beta$ -ның әр түрлі мәндеріндегі  $\omega$  шамасына тәуелділігі графиктік түрде 190-суретте көрсетілген  $\omega_0$  жиілігі  $\varphi = \pi/2$  шамасына сәйкес келеді. Резонанстық жиілік меншікті жиіліктен кіші [(75. 11) формуласын қараңыз]. Демек, резонанс кезінде  $\varphi < \pi/2$ . Әлсіз өшу кезінде  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$  және резонанс кезіндегі  $\varphi$  шамасының мәнін  $\pi/2$  шамасына тең деп санауға болады.

Машиналарды және әр түрлі құрылыстарды конструкциялау кезінде резонанс құбылысымен санауға

тура келеді. Бұл құрылғылардың меншікті тербелістерінің жиілігі ешқашанда мүмкін болатын сыртқы әсердің жиілігіне жақын болмау керек. Мысалы, кеме корпусы немесе самолет қанаты вибрациясының меншікті жиілігі, ескі винттің немесе пропеллердің айналуынан пайда болатын тербеліс жиілігінен едәуір өзгеше болуы тиіс. Бұлай болмағанда апатқа апарып соғатын вибрация пайда болады. Маршпен келе жатқан солдаттар колоннасы өткенде көпірдің қирауы тәрізді жағдайлар да болған. Бұл жағдай көпір тербелісінің меншікті жиілігі колонна адымының жиілігіне жақын болуынан туған.

Сонымен қатар резонанс құбылысы әсіресе акустикада, радиотехникада т. б. көбінесе өте пайдалы болып саналады.

## § 76. Параметрлік резонанс

Өткен параграфта қарастырылған жағдайда сырттан түсірілген мәжбүр етуші күш системаның тепе-теңдік қалпынан ауытқуын тікелей тудырып еді.

Алайда системаны қатты теңселтетін сыртқы әсердің басқа да түрі болады екен. Бұл әсер кезінде системаның кейбір параметрі тербеліспен үйлесе өзгереді, сондықтан құбылыстың өзі параметрлік резонанс деп аталады. Мысал үшін, қарапайым маятник — жіпке ілінген шарикті алайық. Егер маятниктің  $l$  ұзындығын, маятник шеткі қалпына келгенде қысқартып, периодты түрде өзгертіп отырсақ, онда маятник қатты теңселеді. Маятник энергиясының артуы, бұл жағдайда, жіпке әсер ететін күш атқаратын жұмыс есебінен болады. Маятниктің тербелісі кезіндегі жіптің керілуі тұрақты болмайды; жылдамдық нольге айналатын шеткі қалыптарында ол аз, ал маятник жылдамдығы ең үлкен (максималь) мәніне жететін ортаңғы қалпында көп болады. Сондықтан маятник ұзарған кездегі сыртқы күштің теріс жұмысы, маятникті қысқартқан кездегі оң жұмыстан шама жағынан аз болады. Осының нәтижесінде сыртқы күштің период ішіндегі жұмысы нольден үлкен болады.



191-сурет.

## Х ТАРАУ

### ТОЛҚЫНДАР

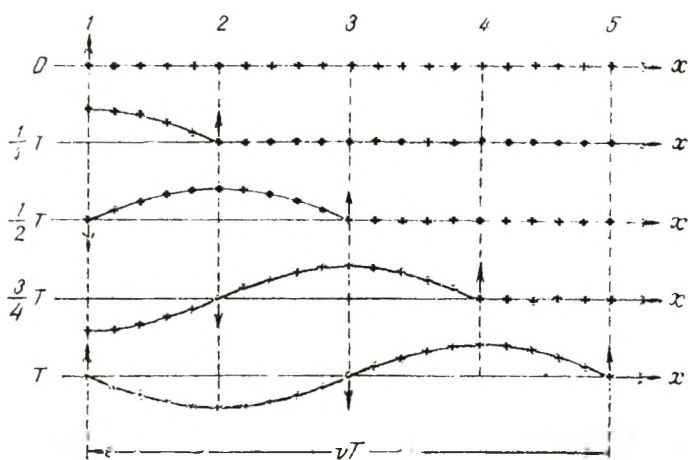
#### § 77. Толқындардың серпімді ортада таралуы

Егер серпімді (қатты, сұйық немесе газ тәрізді) ортаның әйтеуір бір жерінде оның бөлшектерінің тербелісін қоздырсақ, онда бөлшектер арасындағы өз ара әсер салдарынан бұл тербеліс осы ортадағы бөлшектердің бірінен-біріне кейбір  $v$  жылдамдықпен тарайды. Тербелістің кеңістікте таралу процесі толқын деп аталады.

Толқын тарайтын ортаның бөлшектері толқынмен ілесіп кетпейді, олар өзінің тепе-теңдік калпының маңында ғана тербеледі. Толқын таралатын бағытпен салыстырғандағы бөлшектер тербелісінің бағытына байланысты қума және көлденең толқындар болып бөлінеді. Қума толқында ортаның бөлшектері толқынның таралу бағыты бойынша тербеледі. Көлденең толқында ортаның бөлшектері толқынның таралу бағытына перпендикуляр бағытта тербеледі. Механикалық көлденең толқындар ығысу кедергісі бар ортада ғана пайда бола алады. Сондықтан сұйық және газ тәріздес ортада тек қума толқын ғана пайда болуы мүмкін. Қатты ортада қума толқын да, көлденең толқын да пайда болуы мүмкін.

192-суретте ортада көлденең толқын тараған кездегі бөлшектердің қозғалысы келтірілген. 1, 2, 3 және т. б. нөмірлермен бір-бірінен  $1/4vT$ -ға тең қашықтықта, яғни толқын бөлшектер ширек период жасағанда жүріп өткен қашықтықта тұрған бөлшектер белгіленген. Схемада нольдік уақыт ретінде алынған уақыт кезеңінде, толқын ось бойымен солдан оңға қарай тарай отырып, 1 бөлшегіне жетті. Соның салдарынан басқа бөлшектерді өзі-

мен ілестіре отырып, бұл бөлшек тепе-теңдік қалыптан жоғары қарай ығыса бастайды. Ширек период өткен соң 1 бөлшегі шеткі жоғарғы қалпына жетеді; дәл осы кезде 2 бөлшегі тепе-теңдік қалыптан ығыса бастайды. Тағы да ширек период өткенде бірінші бөлшек, жоғарыдан төмен қарайғы бағытта қозғала отырып, тепе-теңдік қалыптан өтеді. Екінші бөлшек шеткі жоғарғы қалыпқа жетеді, ал үшінші бөлшек тепе-теңдік қалыптан жоғары қарай ығыса бастайды.  $T$  шамасына тең уақыт мезетінде бірінші бөлшек тербелістің толық циклін бітіп, бастапқы кезіндегідей қозғалыс күйінде болады. Бұл  $T$  уақыт мезетіндегі толқын,  $vT$  жолын жүріп, 5 бөлшегіне жетеді.



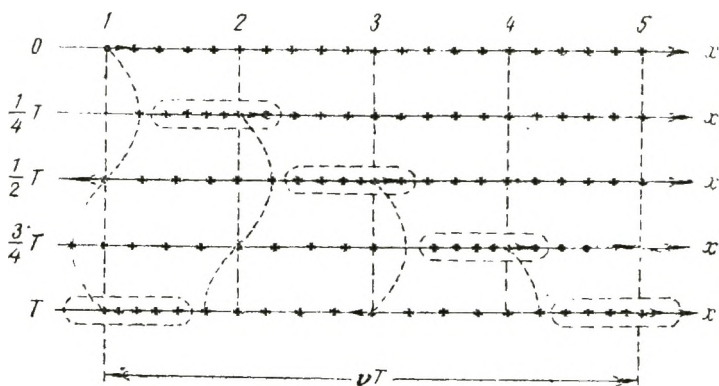
192-сурет.

193-суретте ортада кума толқын таралған кездегі бөлшектердің қозғалысы көрсетілген. Көлденең толқындағы бөлшектердің қасиетіне байланысты барлық тұжырымдарды, жоғары және төмен ығысуларды оң және сол ығысулармен алмастыра отырып, берілген жағдайға көшіруге болады. 193-суретке карағанда орта арқылы кума толқын өткенде, толқынның таралу бағыты бойынша  $v$  жылдамдықпен қозғалатын, бөлшектердің алма-кезек ауысып отыратын тығыздалуы мен сиреуі (бөлшектердің тығыздалуы суретте пунктирмен белгіленген) пайда болады.

Ылғи толқын бар болып тұрған уақыттың ішінде ортаның бөлшектері өзінің тепе-теңдік қалпының маңында

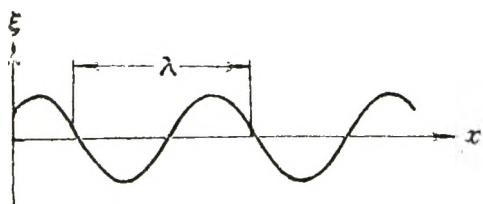


тербеліс жасайды, әрі 192 және 193-суреттерде көрсетілгендегідей әр түрлі бөлшектер фазасы бойынша ығыса тербеледі. Бір-бірінен  $vT^1$  қашықтықта тұрған бөлшектер бірдей фазада (фазаға  $2\pi$ -ді қосу ешқандай әсер етпейді) тербеледі. Бірдей тербелетін (бірдей фазада) ең жақын орналасқан бөлшектердің арасы толқын



193-сурет.

ұзындығы  $\lambda$  деп аталады (толқынның таралу бағыты бойымен есептелетін  $x$  қашықтығының функциясы



194-сурет.

ретінде қарастырылатын, бөлшектің тепе-теңдік қалыптан  $\xi$  ығысуы кескінделген 194-суретті қараңыз). Толқын ұзындығы толқынның период ішінде таралатын қашықтығына тең болатындығы

айқын:

$$\lambda = vT \quad (77.1)$$

Осы қатыстағы  $T$  шамасын  $1/v$  [(62.9) өрнегін қараңыз];  $v$  — тербеліс жиілігі  $1/v$  арқылы алмастырып, төмендегіні аламыз:

$$\lambda v = v. \quad (77.2)$$

Соңғы қатысты төмендегі байлам арқылы да алуға

<sup>1</sup> Қарастырылатын бөлшектердің тепе-теңдік қалпы бір-бірінен  $vT$  шамасында қалып отыратындығы ескеріледі.

болады. Бір секунд ішінде толқын көзі, әрбір тербеліс кезінде бір «жал» және бір «сай» туғыза отырып,  $\nu$  тербеліс жасайды. Толқын көзі  $\nu$ -інші тербеліс жасаған кезеңде, бірінші «жал»  $\nu$  жол жүріп үлгереді. Сондықтан толқынның «жалы» мен «сайы»  $\nu$  қашықтығында орналасуы керек.

Шындығында  $x$  осі бойынша орналасқан бөлшектер (192- және 193-суреттерде кескінделгендей) ғана емес, кейбір көлем ішіндегі бөлшектер жиыны да тербеледі. Тербеліс көзінен тарай отырып, толқынды процесс кеңістіктің жаңа бөліктерін қамти береді. Уақыт мезетінде тербеліс келіп жеткен нүктелердің геометриялық орны толқын фронты (немесе толқындық фронт) деп аталады. Толқын фронты кеңістіктің толқындық процесс қамтыған аймағын тербеліс әлі пайда болмаған аймағынан бөліп тұрған бет болып саналады.

Бірдей фазада тербелетін нүктелердің геометриялық орны толқындық бет деп аталады. Толқындық бетті кеңістіктің толқындық процесс қамтитын кез келген нүктесі арқылы жүргізуге болады. Демек, уақыттың әрбір кезеңінде толқын фронты біреу ғана болғанымен, толқындық беттердің шексіз көп жиыны болады. Толқындық беттер қозғалыссыз қалып отырады (олар бірдей фазада тербелетін бөлшектердің орнықты қалпы арқылы өтеді). Толқын фронты үнемі орын ауыстырып отырады.

Толқындық бет кез келген формада болуы мүмкін. Қарапайым жағдайда олар жазықтық немесе сфера формасында болады. Осыған орай толқын да бұл жағдайда жазық немесе сфералық деп аталады. Жазық толқында толқындық беттер бір-біріне параллель жазықтықтар, ал сфералық толқында — концентрлік сфералар түрінде болады.

## § 78. Жазық және сфералық толқынның теңдеуі

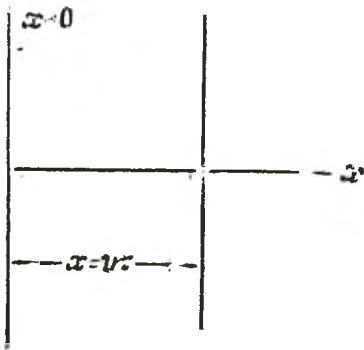
Толқын теңдеуі деп, тербелістегі нүктенің ығысуының  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаталары<sup>1</sup> мен  $t$  уақыттың функциясы ретінде беретін өрнекті айтады:

$$\xi = \xi(x, y, z; t). \quad (78.1)$$

<sup>1</sup> Нүктенің тепе-теңдік күйінің координаталары ескеріліп отыр.

(78.1) функциясы  $t$  уақытқа қатысты да,  $x$ ,  $y$  және  $z$  координаталарына қатысты да периодты болуы керек.  $t$  бойынша периодтылығы  $\xi$  шамасы координаталары  $x$ ,  $y$ ,  $z$  болатын нүктелердің тербелісін сипаттауынан көрініп тұр. Координаталар бойынша периодтылық бір-бірінен  $\lambda$  қашықтықтағы нүктелердің тербелетіндігінен шығады.

Тербеліс гармониялық сипатта болады деп санап, жазық толқын жағдайындағы  $\xi$  функциясының түрін табамыз. Оңайлату үшін координата осьтерін  $x$  осі толқынның таралу бағытымен дәл келетіндей етіп бағыттаймыз. Онда толқындық беттің барлық нүктесі бірдей тербелетіндіктен,  $\xi$  ығысуы  $x$  және  $t$  шамаларына ғана тәуелді болады:



195-сурет.

ның таралу бағытымен дәл келетіндей етіп бағыттаймыз. Онда толқындық беттің барлық нүктесі бірдей тербелетіндіктен,  $\xi$  ығысуы  $x$  және  $t$  шамаларына ғана тәуелді болады:

$$\xi = \xi(x, t).$$

$x=0$  (195-сурет) жазықтығында жатқан нүктелердің тербелісі төмендегідей түрде болсын делік:

$$\xi(0, t) = a \cos \omega t.$$

$x$  шамасының кез келген мәніне сәйкес келетін жазықтықтағы бөлшек тербелісінің түрін табайық.  $x=0$  жазықтығынан осы жазықтыққа дейінгі жолды жүріп өту үшін, толқын

$$= \frac{x}{v}$$

уақыт жұмсайды, мұндағы  $v$  — толқынның таралу жылдамдығы.

Демек,  $x$  жазықтығында жатқан бөлшектердің тербелісі,  $x=0$  жазықтығында жатқан бөлшектердің тербелісінен уақыт бойынша  $\tau$  шамасына кешігеді, яғни мына түрде жазылады:

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Сонымен, жазық толқынның теңдеуі былай жазылады:

$$\xi = a \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (78.2)$$

(78.2) теңдеуіндегі  $\xi$  шамасы координатасы  $x$  болатын кез келген нүктенің бірінің  $t$  уақыт мезетіндегі ығысуы болып саналады.

(78.2) формуласын қорытып шығару кезінде біз барлық нүктедегі тербеліс амплитудасы бірдей болады деп санадық. Жазық толқын жағдайында бұл, егер толқын энергиясы ортада жұтылмаса ғана байқалады.

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \text{const} \quad (78.3)$$

деп алып, (78.2) теңдеуінде тұрған фазаның кейбір мәнін белгілеп алайық.

(78.3) өрнегі ( $t$ ) уақыт пен фазаның белгіленген мәні берілген мезетте жүзеге асатын орын ( $x$ ) арасындағы байланысты береді. Осы өрнектен шығатын  $\frac{dx}{dt}$  шамасының мәнін анықтап, біз фазаның берілген мәні орын ауыстыратын жылдамдықты табамыз. (78.3) өрнегін дифференциалдап, төмендегіні аламыз:

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

бұдан

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (78.4)$$

Сонымен (78.2) теңдеуіндегі толқынның таралу жылдамдығы фазаның орын ауыстыру жылдамдығы болып табылады, осыған орай оны ф а з а л ы қ ж ы л д а м д ы қ деп атайды.

(78.4) өрнегінен толқын жылдамдығы (78.2) оң болатындығы байқалады. Демек, (78.2) теңдеуі  $x$  шамасының өсу жағына қарай бағытталған толқынды сипаттайды. Қарсы бағытта таралатын толқынның түрі мынадай болады:

$$\left( \xi = a \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right). \quad (78.5)$$

Шынында, константа (78.5) толқын фазасын теңестіріп және дифференциалдап, төмендегіні аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

бұдан (78.5) толқыны  $x$  шамасының кему жағына қарай таралатындығы байқалады.

Жазық толқын теңдеуін  $t$  және  $x$  шамаларына қарағанда симметриялы түрде жазуға болады. Ол үшін толқындық сан деп аталатын  $k$  шамасын енгіземіз:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (78.6)$$

(77.1) және (78.6) өрнектерінен толқындық сан  $k$ , дөңгелектік жылдамдық  $\omega$  және фазалық жылдамдық  $v$  арасында төмендегідей қатыс болатындығы шығады:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (78.7)$$

(78.2) теңдеуіндегі  $v$  шамасын оның (78.7) қатысындағы мәнімен алмастырып және жақшаға  $\omega$  шамасын енгізіп, жазық толқынның теңдеуін төмендегідей түрде аламыз:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx). \quad (78.8)$$

$x$  шамасының кему жағына қарай таралатын толқынның теңдеуі (78.8) теңдеуінен  $kx$  мүшесіндегі таңба бойынша ғана ажыратылады.

Енді сфералық толқынның теңдеуін табайық. Кез келген нақты толқын көзінің мөлшері болады. Алайда толқын көзінен қашықтығы оның мөлшерінен әлдеқайда үлкен болатын толқындарды қарастырумен шектелсек, онда толқын көзін нүктелік көз деп санауға болады.

Толқын жылдамдығы барлық бағытта таралатын бірдей жағдайда, нүктелік көз тудыратын толқын сфералық болады. Толқын көзінің тербеліс фазасы  $\omega t$  шамасына тең болса деп жоримыз. Онда радиусы  $r$  толқындық бетте жататын нүктелер  $\omega(t - r/v)$  фазамен тербеледі ( $r$  жол жүру үшін толқын  $\tau = r/v$  уақыт жұмсайды). Бұл жағдайда тербеліс амплитудасы, толқын энергиясы ортада жұтылмаған күннің өзінде, тұрақты болып қалмайды — ол толқын көзінен қашықтаған сайын  $1/r$  заңы бойынша кемиді (82-параграфты қараңыз). Демек, сфералық толқынның теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\xi = \frac{a}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \quad (78.9)$$

мұндағы  $a$  — толқын көзінен бірге тең қашықтықта сан жағынан амплитудаға тең, тұрақты шама.  $a$  шамасының өлшемділігі амплитуданың өлшемділігін ұзындықтың ( $r$  шамасының өлшемділігі) өлшемділігіне көбейткенге тең.

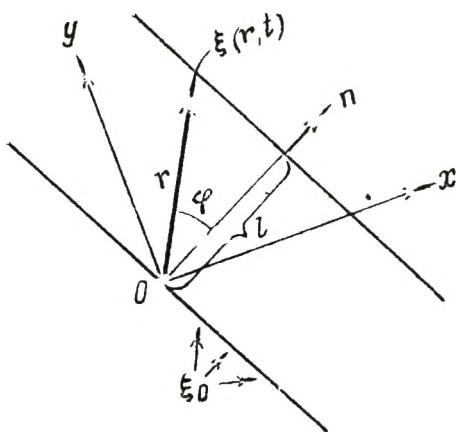
Жоғарыда жасалған ұйғарым бойынша (78.9) теңдеуі  $r$  толқын көзінің мөлшерінен әлдеқайда үлкен болғанда ғана дұрыс болады.  $r$  нольге ұмтылғанда амплитудаға арналған өрнек шексіздікке айналады. Мұндай дәйексіз нәтиже теңдеуді  $r$  шамасының аз мәндері үшін қолдануға болмайтындығымен түсіндіріледі.

### § 79. Кез келген бағытта таралатын жазық толқынның теңдеуі

Өткен параграфта, біз  $x$  осінің бағыты бойынша таралатын жазық толқынның теңдеуін алдық.  $x, y, z$  координата осьтерімен  $\alpha, \beta$  және  $\gamma$  бұрыш жасайтын бағытта таралатын жазық толқынның теңдеуін табайық. Координата басы арқылы өтетін жазықтықтағы (196-сурет) тербелістің түрі мынадай болсын:

$$\xi_0 = a \cos \omega t. \quad (79.1)$$

Координата басынан  $l$  қашықтықта қалып отыратын толқындық бетті (жазықтықты) алайық. Бұл жазықтықтағы тербеліс (79.1) тербелісінен  $\tau = l/v$  уақытқа қалады:



196-сурет.

$$\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{l}{v} \right). \quad (79.2)$$

Қарастырылатын беттегі нүктелердің  $r$  радиус векторын  $l$  арқылы өрнектейік. Ол үшін толқындық бетке нормаль  $n$  бірлік векторын енгізейік. Бұдан беттің кез келген нүктесіндегі  $r$  радиус-векторы мен  $n$  шамасының скалярлық көбейтіндісінің  $l$  шамасына бірдей мәнге ие болатындығын оңай көруге болады:

$$nr = r \cos \varphi = l. \quad (79.3)$$

$l$ -ге арналған (79.3) өрнегін (79.2) теңдеуіне қойып, жақшаға  $\omega$  шамасын енгіземіз:

$$\xi = a \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} nr \right). \quad (79.4)$$

$\omega/v$  қатынасы  $k$  толқындық санға [(78.7) өрнегін қараңыз] тең. Модулы бойынша  $k = 2\pi/\lambda$  толқындық санға

тең және нормалының бағыты толқындық бетке қараған

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}$$

векторы толқындық вектор деп аталады.  $k$  шамасын (79.4) теңдеуіне енгізіп, төмендегіні аламыз:

$$\xi(r, t) = a \cos(\omega t - kr). \quad (79.6)$$

(79.6) функциясы радиус-векторы  $\mathbf{r}$ <sup>1</sup> болатын нүктенің  $t$  уақыт мезетіндегі тепе-теңдік қалыптан ауытқуын береді.

Нүктенің радиус-векторынан оның  $x, y, z$  координаталарына көшу үшін,  $kr$  скалярлық көбейтіндісін векторлардың координата осьтеріндегі проекциясы арқылы өрнектейік:

$$kr = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Онда жазық толқынның теңдеуі мына түрге келеді:

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \quad (79.7)$$

мұндағы  $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$ ,  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$ ,  $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$ .

(79.7) функциясы  $x, y, z$  координаталары болатын нүктенің  $t$  уақыт мезетіндегі ауытқуын береді.  $\mathbf{n}$  шамасы  $x$ ,  $k_x = k$ ,  $k_y = k_z = 0$  осьтеріне сай келгенде (79.7) теңдеуі (78.8) теңдеуіне ауысады.

Жазық толқынның теңдеуі кейде былай жазылады:

$$\xi = \operatorname{Re} a e^{i(\omega t - kr)}, \quad (79.8)$$

көбінесе  $\operatorname{Re}$  таңбасын алып тастап, жай ғана былай жазамыз:

$$\xi = a e^{i(\omega t - kr)} \quad (79.9)$$

Бұл өрнектің заттық бөлігі ғана алынатындығын ескертеміз.

## § 80. Толқындық теңдеу

Кез келген толқынның теңдеуі толқындық теңдеу деп аталатын қандай да бір дифференциалдық теңдеудің шешімі болады екен. Толқындық теңдеудің түрін тағайындау үшін, жазық толқынды өрнектейтін (79.7) функциясының координата және уақыт бойынша алынған екінші реттік дербес туындыларын салыстырайық. (79.7) функциясын әрбір айнымалы шама бойынша екі рет дифференциалдап, төмендегіні аламыз:

<sup>1</sup> 265-беттегі түсіндірмені қараңыз.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2 \xi, \quad (80.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_z^2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad (80.2)$$

(80.2) теңдеулерін бірге қосамыз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2 \xi. \quad (80.3)$$

Енді (80.1) және (80.3) теңдеулерін салыстыра отырып, төмендегіні табамыз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ақырында, (78.5) бойынша  $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$  болатынын ескеріп, соңғы қорытындыны аламыз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (80.4)$$

(80.4) теңдеуі іздеп отырған толқындық теңдеуіміз. Толқындық теңдеуді (79.7) функциясы ғана емес

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad (80.5)$$

түріндегі кез келген функция қанағаттандыратынына оңай көз жеткізуге болады.

Шынында, (80.5) функциясының оң жағындағы жақша ішінде тұрған өрнекті  $\zeta$  арқылы белгілесек, төмендегіні аламыз:

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f' \omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega \frac{df'}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f'' \omega^2. \quad (80.6)$$

<sup>1</sup> Бұл теңдеудің сол жағын  $\Delta$  Лаплас операторының көмегімен бұдан гөрі жинақы түрде жазуға болады. Лаплас операторы символды түрде  $x, y, z$  айнымалы шамалары функциясының осы шамалар бойынша алынған екінші реттік дәрбес туындыларының қосындысын беретін әсерлердің жиынтығын белгілейді:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Лаплас операторын пайдалана отырып, (80.4) теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$



Осыған ұқсас

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f'' \quad (80.7)$$

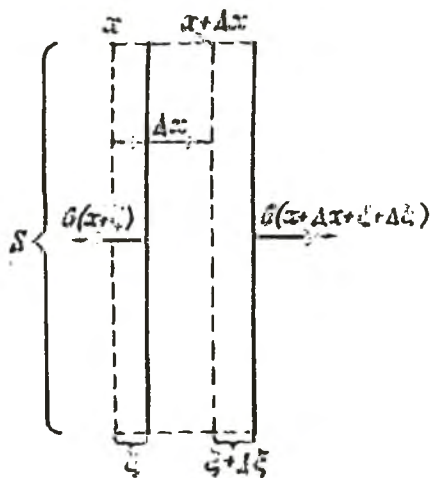
(80.6) және (80.7) өрнектерін (80.4) теңдеуіне қою арқылы, егер  $v = \omega/k$  деп ұйғарсақ, (80.5) функциясы толқындық теңдеуді қанағаттандыратындығына оңай көз жеткізуге болады.

(80.4) түріндегі теңдеуді қанағаттандыратын кез келген функция қайсыбір толқынды сипаттайды.

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  өрнегіндегі коэффициентке кері шаманың квадрат түбірі осы толқынның фазалық жылдамдығын береді. (80.4) теңдеуінің шешіміне қойылатын қосымша шарттарға байланысты әйтеуір бір басқа толқын алынады.

### § 81. Серпімді толқындардың таралу жылдамдығы

$x$  осінің бағыты бойынша кума жазық толқын таралсын. Орта ішінен биіктігі  $\Delta x$  табанының ауданы  $S$  цилиндрлік көлем бөліп алайық.  $x$  шамасы әр түрлі бөлшектердің  $\xi$  ауытқуы уақыттың әрбір мезетінде әр түрлі



197-сурет.

болады ( $\xi$  шамасы  $x$ -тің функциясы ретінде кескінделген 194-суретті қараңыз). Егер уақыттың кейбір мезетінде цилиндр табаны  $x$  координатасымен  $\xi$  ығысу жасаса, онда  $x + \Delta x$  координата табанының ығысуы  $\xi + \Delta \xi$  болады. Демек, қарастырылып отырған көлем деформацияланады — ол  $\Delta \xi$  ұзару ( $\Delta \xi$  — алгебралық шама;  $\Delta \xi < 0$  цилиндрдің сығылуына сәйкес келеді) немесе салыстырмалы ұзару алады.  $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$  шамасы ци-

линдрдің орташа деформациясын береді.  $x$  шамасының өзгеруіне қарай сызықтық заң бойынша өзгермейтіндіктен цилиндрдің әр түрлі қимасындағы шын деформация біркелкі болмайды.  $x$  қимасындағы деформацияны алу

үшін,  $\Delta x$  шамасын нольге ұмтылдыру керек. Демек,

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (81.1)$$

(дербес туындының таңбасы  $\xi$  шамасының  $x$ -қа ғана емес,  $t$ -ға да тәуелді болғандығынан алынып отыр).

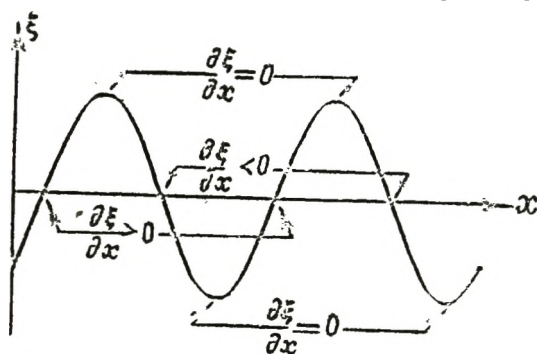
Созылу деформациясының болуы, аз деформация кезіндегі деформация шамасына пропорционал,  $\sigma$  нормаль кернеудің болатындығын білдіреді. (45.5) бойынша

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (81.2)$$

мұндағы  $E$  — ортаның Юнг модулы.

$\frac{\partial \xi}{\partial x}$  салыстырмалы деформация, демек, белгіленген уақыт мезетіндегі  $\sigma$  кернеу  $x$  шамасына тәуелді болады (198-сурет). Блшектерді тепе-теңдік қалпынан ауытқуы

ең үлкен жерде, деформация мен кернеу нольге тең. Бөлшектер тепе-теңдік қалпынан өтетін жерде деформация мен кернеу ең үлкен мәніне жетеді, әрі оң және теріс деформациялар (яғни созылу мен сығылу) бір-бірімен алмасып отырады. Осыған сәйкес, 77-параграфта айтылғандай, қума толқын алма-кезек ауысып отыратын сиреу мен тығыздалудан тұрады.



198-сурет.

197-суретте кескінделген цилиндрлік көлемге қайта оралайық және оған арналған қозғалыс теңдеуін жазайық.  $\Delta x$  шамасын өте аз етіп алып, цилиндрдің үдеуін  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  шамасына тең деп есептеуге болады. Цилиндрдің массасы  $\rho S \Delta x$  шамасына тең, мұндағы  $\rho$  — деформацияланбаған ортаның тығыздығы. Цилиндрге әсер ететін күш цилиндр табанының  $S$  ауданы мен  $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$  және  $(x + \xi)$  қималарындағы қалыпты кернеу айырмасының көбейтіндісіне тең:

$$f = SE \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta \xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi} \right]. \quad (81.3)$$

$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\delta}$  шамасын аз  $\delta$  үшін үлкен дәлдікпен былай жазуға болады:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\delta} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right]_x \delta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta, \quad (81.4)$$

мұндағы  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$  ретінде  $x$  қимасындағы  $x$  бойынша алынған  $\xi$  екінші реттік туындысы.

$\Delta x$ ,  $\xi$  және  $\Delta \xi$  шамаларының аз болуына байланысты (81.3) өрнегіне (81.4) түрлендіруін пайдаланамыз:

$$\begin{aligned} f &= SE \left\{ \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \xi + \Delta \xi) \right] - \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi \right] \right\} = \\ &= SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta \xi) \approx SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned}$$

(серпімді деформация кезіндегі  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  салыстырмалы ұзару бірден өлдеқайда кіші болады. Сондықтан  $\Delta \xi \ll \Delta x$ . Ендеше  $(\Delta x + \Delta \xi)$  қосындыдағы  $\Delta \xi$  қосылғышын ескермеуге де болады).

Ньютонның екінші заңының теңдеуіне масса, үдеу және күшті қойып, төмендегіні аламыз:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Ақырында,  $S \Delta x$  шамасына қысқартып,  $\xi$ -нің  $y$  пен  $z$ -ке тәуелді болмайтын дербес жағдайындағы (80.4) толқындық теңдеуі болып саналатын мына теңдеуге келеміз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (81.5)$$

(81.5) теңдеуін (80.4) теңдеуімен салыстырып, мынаны табамыз:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (81.6)$$

Сонымен, серпімді қума толқынның фазалық жылдамдығы Юнг модулындағы квадрат түбірді ортаның тығыздығына бөлгенге тең. Осы сияқты көлденең толқынға арналған есептеулер жылдамдыққа арналған мына өрнекке келтіреді:

$$v = \sqrt{\frac{G}{f}}; \quad (81.7)$$

мұндағы  $G$  — ығысу модулы.

## § 82. Серпімді толқынның энергиясы

Жазық қума толқын таралатын ортадан  $\Delta V$  элементар көлем бөліп алайық. Бұл көлемді қозғалыстың деформациясы мен жылдамдығы осы көлемнің барлық нүктелерінде бірдей және тең болуы үшін  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  мен  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  -ге сәйкес өте кішкентай етіп аламыз.

(45.15) формула бойынша біздің бөліп алған көлеміміз серпімді деформацияның төмендегідей потенциялық энергиясына ие болады:

$$\Delta E_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V, \quad (81.6)$$

мұндағы  $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  — салыстырмалы ұзару, ал  $E$  — Юнг модулы.

(81.6) бойынша Юнг модулы  $E$ -ні  $\rho v^2$  ( $\rho$  — ортаның тығыздығы,  $v$  — толқынның фазалық жылдамдығы) арқылы ауыстырамыз. Онда  $\Delta V$  көлемінің потенциялық энергиясына арналған өрнек мына түрде жазылады:

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V \quad (82.1)$$

Қарастырылып отырған көлем, сондай-ақ, төмендегідей кинетикалық энергияға да ие болады:

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (82.2)$$

( $\rho \Delta V$  — көлемнің массасы,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  — оның жылдамдығы). (81.2) және (82.2) өрнектерінің қосындысы толық энергияны береді:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V$$

$\Delta E$  энергияны сол энергия тұрған  $\Delta V$  көлемге бөліп, энергияның тығыздығын аламыз

$$u = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (82.3)$$

Жазық толқынның (78.2) теңдеуін  $t$  және  $x$  бойынша дифференциалдап, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\omega a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\omega}{v} a \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \end{aligned}$$

Бұл өрнектерді (82.3) формуласына қойып, мынаны аламыз:

$$u = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (82.4)$$

Көлденең толқын жағдайында да энергия тығыздығы үшін осындай өрнек алынады.

(82.4) формуласынан энергия тығыздығы уақыттың әрбір мезетінде кеңістіктің әрбір нүктесінде түрліше болатындығы байқалады. Бір нүктедегі энергия тығыздығы уақыт бойынша синус квадратының заңы бойынша өзгереді. Синус квадраттың орташа мәні жартыға тең болғандықтан, ортаның әрбір нүктесіндегі энергияның орташа (уақыт бойынша) мәні мынаған тең:

$$u = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (82.5)$$

(82.4) энергия тығыздығы және оның (82.5) орташа мәні ортаның  $\rho$  тығыздығына,  $\omega$  жиіліктің квадратына және  $a$  толқын амплитудасының квадратына пропорционал болады. Мұндай тәуелділік амплитудасы тұрақты жазық толқында ғана емес, толқынның басқа түрлерінде де орын алады.

Сонымен толқын пайда болатын ортада энергияның қосымша қоры болады. Бұл энергияны тербеліс көзінен ортаның түрлі нүктелеріне толқынның өзі тасымалдайды, демек, толқын өзімен бірге энергия тасымалдайды. Қандай да болсын, бет арқылы бірлік уақыт ішінде толқын тасымалдайтын энергия мөлшері энергия ағыны  $\Phi$  деп аталады. Энергия ағыны — скаляр шама, оның өлшемділігі энергия өлшемділігін уақыт өлшемділігіне бөлгенге тең, яғни қуаттың өлшемділігіне дәл келеді. Осыған орай  $\Phi$  шамасын *эрг/сек, ватт* т. б. арқылы өлшеуге болады.

Ортаның әр түрлі нүктелеріндегі энергия ағынының интенсивтілігі түрліше болады. Кеңістіктің әр түрлі нүктелеріндегі энергия ағысын сипаттау энергия ағынының тығыздығы деп аталатын векторлық шама енгізіледі. Бұл шама сан жағынан, энергия тасымалданатын бағытқа перпендикуляр, берілген нүктеде орналасқан бірлік аудан арқылы өтетін энергия ағынына тең. Энергия ағыны тығыздығы векторының бағыты энергия тасымалданатын бағытқа сәйкес келеді.

Толқынның таралу бағытына перпендикуляр  $\Delta S_{\perp}$

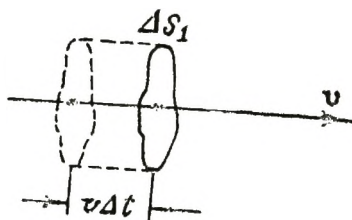
ауданша арқылы  $\Delta t$  уақыт ішінде  $\Delta E$  энергия тасымалдансын делік. Онда энергия ағынының тығыздығы  $j$  анықтама бойынша мынаған тең:

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp} \Delta t}. \quad (82.6)$$

$\frac{\Delta E}{\Delta t}$  шамасы  $\Delta S_{\perp}$  беті арқылы өтетін  $\Delta \Phi$  энергия ағыны екенін ескерсек, мынаны жазуға болады:

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}}. \quad (82.7)$$

$\Delta S_{\perp}$  ауданша арқылы (199-сурет)  $\Delta t$  уақыт ішінде табаны  $\Delta S_{\perp}$  биіктігі  $v \Delta t$  ( $v$  — толқынның фазалық жылдамдығы) цилиндр көлемінде жинақталған  $\Delta E$  энергиясы тасымалданады. Егер цилиндрдің барлық нүктелеріндегі энергия тығыздығын бірдей деп санауға боларлықтай цилиндр мөлшері мейлінше аз болса, ( $\Delta S_{\perp}$  және  $\Delta t$ -ның өте аз болу есебінен) онда  $\Delta E$ -ні  $u$  энергия тығыздығының  $\Delta S_{\perp} v \Delta t$  шамасына тең цилиндр көлемінің көбейтіндісіне тең деп санауға болады:



199-сурет.

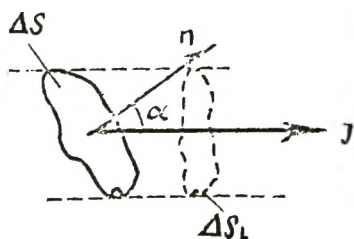
$$\Delta E = u \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

$\Delta E$  үшін бұл өрнекті (82.6) формуласына қойсақ, мынаны аламыз:

$$j = uv. \quad (82.8)$$

$v$  фазалық жылдамдықты, бағыты толқынның таралу бағытымен (және энергияның тасымалдану) дәл келетін вектор ретінде қарастырып, төмендегіні жазуға болады:

$$\mathbf{j} = u\mathbf{v}. \quad (82.9)$$



200-сурет.

Энергия ағыны тығыздығының векторын қарастыруға алғаш рет орыстың көрнекті ғалымы Н. А. Умов енгізген, ол Умов векторы деп аталады.  $u$  энергия тығыздығы тәрізді (82.9) векторы да кеңістіктің әр түрлі нүктелерінде түрліше болады, ал кеңістіктің берілген нүктесінде уақыт өткен сайын

синус квадраты заңы бойынша өзгереді. (82.5) өрнегін ескерсек, оның орташа мәні мынаған тең:

$$j_{\text{ор}} = uv = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v. \quad (82.10)$$

Кеңістіктің қандай да болсын нүктесіндегі  $j$ -ді біле отырып, осы нүктеде түрліше бағдарланып орналасқан шағын ауданша (200-сурет) арқылы өткен энергия ағынын табуға болады. Ол үшін  $\Delta S$  ауданшасын  $j$  векторына перпендикуляр жазықтыққа проекциялаймыз.  $\Delta S_{\perp}$  проекциясының шамасы мынаған тең болатындығы анық:

$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha, \quad (82.11)$$

мұндағы  $\alpha$  — ауданға түсірілген  $n$  нормальдың  $j$  вектормен жасайтын бұрышы.

$\Delta S$ -тің аз болуына байланысты  $\Delta S$  арқылы қандай ағын өтсе,  $\Delta S_{\perp}$  арқылы да сондай ағын ағып өтеді.  $\Delta S_{\perp}$  арқылы өтетін ағын (82.7) бойынша мынаған тең:

$$\Delta \Phi = j \Delta S_{\perp}$$

$\Delta S_{\perp}$ -ті оның (82.11) өрнегіндегі мәнімен ауыстырып, мынаны аламыз:

$$\Delta \Phi = j \Delta S \cos \alpha.$$

Бірақ  $j \cos \alpha$  шамасы  $j$  векторының  $\Delta S$  ауданшасына түсірілген  $n$  нормаль бағытындағы құраушысы болып табылады:

$$j_n = j \cos \alpha.$$

Демек, төмендегіні жазуға болады

$$\Delta \Phi = j_n \Delta S. \quad (82.12)$$

Сонымен  $\Delta S$  шағын ауданша арқылы өтетін энергия ағыны тығыздығы векторының нормаль құраушысын  $\Delta S$  ауданшаға көбейткенге тең.

Қалауымызша алынған  $S$  беттің кез келген нүктесіндегі  $j$  шамасын біле отырып, осы бет арқылы өтетін  $\Phi$  энергия ағынын есептеп шығаруға болады. Осы мақсатпен бетті  $\Delta S$  элементар учаскелерге бөлеміз: бұл учаскелердің кішкентайлығы соншалық, оларды жазық деп, ал әрбір  $\Delta S$  шегінде  $j$  векторын шама жағынан да бағыт жағынан да тұрақты деп санауға болады. Онда әрбір  $\Delta S$  учаскесі арқылы  $\Delta \Phi$  элементар ағынын (82.12) формуласы бойынша есептеуге болады, әрбір  $\Delta S$  үшін,  $\Delta S$  ауданша орналасқан жердегі  $j$  векторының шамасына және осы ауданшаның  $j$  векторымен салыстырғанда бағдарлануына байланысты болатын,  $j_{av}$  шамасының мәні алынады.

$S$  беті арқылы өтетін толық элементар ағындардың қосындысына тең болады:

$$\Phi = \Sigma \Delta \Phi = \Sigma j_n \Delta S. \quad (82.13)$$

Біз алған өрнек жуықтап алынған өрнек болып табылады.  $\Phi$ -ның дәл мәнін алу үшін, барлық  $\Delta S$ -ті нольге ұмтылдыру керек. Бұл жағдайда (82.13) қосындысы барлық  $S$  беті бойынша алынған интегралға айналады:

$$\Phi = \int_S j_n ds. \quad (82.14)$$

(82.14) формула беттің әр түрлі нүктелеріндегі энергия ағынының тығыздығы мен осы бет арқылы өткен энергия ағыны арасындағы байланысты береді.

Сфералық толқынның толқындық беті арқылы өткен энергия ағынын есептейік. Толқындық беттің барлық нүктесіндегі энергия ағыны тығыздығы векторының нормаль құраушысы бірдей және оның орташа мәні мынадай болады:

$$\bar{j}_n = \frac{1}{2} \rho a_r^2 \omega^2 v$$

( $a_r$  — толқын көзінен  $r$  қашықтықтағы толқын амплитудасы)

(82.14) формуладағы  $j_n$ -дің тұрақты мәнін интеграл таңбасының сыртына шығарсақ, мынаны аламыз:

$$\Phi_{\text{орташа}} = \bar{j}_n S = \frac{1}{2} \rho a_r^2 \omega^2 v 4\pi r^2.$$

Егер толқын энергиясы ортада жұтылмаса, радиусы кез келген сфера арқылы өтетін орташа энергия ағынының мәні бірдей болады:

$$\Phi_{\text{орташа}} = 2\pi \rho \omega^2 v a_r^2 r^2 = \text{const.}$$

Осыдан сфералық толқынның  $a_r$  амплитудасы толқын көзінен қашықтыққа кері пропорционал болатындығы көрінеді [(78.9) теңдеуін қараңыз].

78-параграфта біз, толқын энергиясы ортада жұтылмаған жағдайда ғана, жазық толқынның амплитудасы тұрақты болатындығын атап кеттік. Олай болмаған жағдайда толқын интенсивтілігі толқын көзінен алыстаған сайын біртіндеп кемиді — толқынның өшуі байқалады. Тәжірибе көрсеткендей, мұндай өшу экспоненциалдық заң бойынша өтеді. Мұның өзі толқын амплитудасы  $x$  қашықтыққа байланысты  $a = a_0 e^{-\gamma x}$  заңы бойынша кемиді.



тінін білдіреді, сондықтан жазық толқынның тендеуі мына түрде жазылады:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx). \quad (82.15)$$

$\gamma$  шамасы толқынның өшу коэффициенті (немесе жұтылу коэффициенті<sup>1</sup>) деп аталады. Оның өлшемділігі ұзындықтың өлшемділігіне кері болады.  $\gamma$ -ға кері шама толқын амплитудасы  $e$  есе кемитін қашықтыққа тең екендігіне оңай көз жеткізуге болады (73-параграфтағы өшетін тербелістің  $\beta$  коэффициентімен салыстырыңыз)

(82.10) бойынша (82.15) толқын интенсивтілігі  $x$  қашықтығына байланысты төмендегі заң бойынша кемиді:

$$I_{\text{ор}} = I_{\text{оро}} e^{-2\gamma x} \quad (82.16)$$

Жұтатын ортада таралатын сфералық толқынның тендеуі былай жазылады:

$$\xi = \frac{ae^{-\gamma r}}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (82.17)$$

### § 83. Толқынның интерференциясы мен дифракциясы

Егер ортада бір мезгілде бірнеше толқын таралса, онда орта бөлшектерінің тербелісі әрбір толқын жеке-жеке таралған кезде бөлшектер жасайтындай тербелістің геометриялық қосындысы болады екен. Демек, толқындар бірін-бірі ұйытқытпай, бір-бірімен қабаттасалы. Тәжірибе негізінде жасалған бұл ұйғарым толқындардың суперпозиция (қабаттасу) принципі деп аталады.

Ортаның әрбір нүктесіндегі жеке толқындардан пайда болған тербелістердің фазалар айырмасы тұрақты болған жағдайда, толқын когерентті деп аталады. Жиіліктері бірдей толқындар ғана когерентті болатындығы айқын.

Когерентті толқындар қосылғанда, бір нүктелерде тербелісті күшейтетін, ал екінші нүктелерде тербелістер бірін-бірі әлсірететін интерференция құбылысы пайда болады.

Тұрақты фазалар айырмасымен тербелетін  $O_1$  және

---

<sup>1</sup>Дұрысын айтсақ, жұту коэффициенті деп амплитуданың кемудің сипаттайтын шаманы емес, толқынның интенсивтілігін айтамыз. Бұл шама  $2\gamma$ -ға тең.

$O_2$  нүктелік толқын көздерінен (мұндай көздер, олар шығаратын толқындар тәрізді, когерентті деп аталады) таралатын екі толқынды қарастырайық. Әрбір толқынның жеке-жеке туғызған екі тербелісінің де бағыты бірдей болған жағдайдағы (ол үшін толқын көздерінің арасы толқын көзінен берілген нүктеге дейінгі қашықтықтан әлдеқайда кіші немесе тербелістің бағыты толқын көзі мен берілген нүкте жататын жазықтыққа перпендикуляр болуы керек) ортаның қандай да бір нүктесіндегі қорытқы тербелісін анықтайық.

$O_1$  және  $O_2$  толқын көздерінің тербеліс фазасы сәйкес  $(\omega t + \alpha_1)$  және  $(\omega t + \alpha_2)$  шамаларына тең болсын. Онда берілген нүктедегі тербеліс төмендегі тербелістердің қосындысына тең болады:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_1 \cos(\omega t + \alpha_1 - kr_1), \\ \xi_2 &= a_2 \cos(\omega t + \alpha_2 - kr_2),\end{aligned}$$

мұндағы  $a_1$  және  $a_2$  — қарастырылатын нүктедегі толқын амплитудасы,  $k$  — толқындық сан,  $r_1$  және  $r_2$  — толқын көзінен берілген нүктеге дейінгі қашықтық.

$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) (83.1) шарттары бойынша анықталатын нүктелердегі тербелістер бірін-бірі күшейтеді және қорытқы қозғалыс жиілігі  $\omega$  амплитудасы  $(a_1 + a_2)$  гармониялық тербелісті көрсетеді.

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (83.2)$$

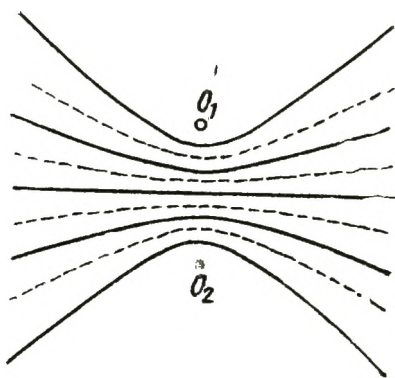
нүктелердегі тербелістер бірін-бірі әлсіретеді және қорытқы қозғалыс амплитудасы  $|a_1 - a_2|$  шамасына тең гармониялық тербеліс болады. Атап айтқанда,  $a_1 = a_2$  болғанда бұл нүктелердегі тербелістер жойылады.

(83.1) және (83.2) шарттары

$$r_1 - r_2 = \text{const} \quad (83.3)$$

болатындығын көрсетеді.

Аналитикалық геометриядан (83.3) теңдеуі фокустары  $O_1$  және  $O_2$  нүктелерінде болатын гиперболаның тең-



201-сурет.

деуі екендігі белгілі. Сонымен, тербелістер бірін-бірі күшейтетін немесе әлсірететін нүктелердің геометриялық орны гиперболалар үйірін береді (201-сурет  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  жағдайына сай келеді. Тұтас сызықтар мен тербелістердің бірін-бірі күшейтетін орындары, пунктир сызықтармен тербелістердің бірін-бірі әлсірететін орындары көрсетілген)

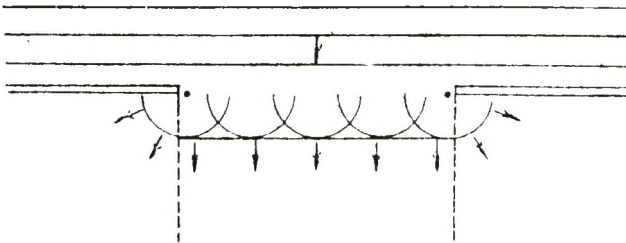
Толқындар өз жолында кездескен бөгетті орап өтеді. Бұл құбылыс дифракция деп аталады. Дифракцияның пайда болуы  $t$  уақыт мезетіндегі белгілі фронттың



202-сурет.

орны бойынша  $t + \Delta t$  уақыт мезетіндегі толқын фронттың салу тәсілі тағайындалатын Гюйгенс принципінің көмегімен түсіндіруге болады. Гюйгенс принципі бойынша толқындық қозғалыс жететін әрбір нүкте екінші реттік толқындар қызметін атқарады; бұл толқындардың ораушысы толқын фронттың келесі мезетіндегі қалпын береді (202-сурет, орта біркелкі емес деп ұйғарылады — суреттің төменгі жағындағы толқындардың жылдамдығы жоғарғы жағындағыдан үлкен болады).

Тесігі бар жазық бөгетке оған параллель толқын фронтты түссін, бөліп алынған тесігі бар учаскенің әрбір



203-сурет.

нүктесі біртекті және изотропты ортада сфералық болатын екінші реттік толқын көздерінің центрі қызметін атқарады. Екінші реттік толқындардың ораушысын құрып, біз тесіктің артында толқын бөгеттің шетін орап, геометриялық көлеңке аймағына (суретте бұл аймақтың шекарасы пунктирмен көрсетілген) енетініне көз жеткіземіз.

## § 84. Тұрғын толқындар

Интерференцияның өте маңызды жағдайы амплитудасы бірдей бір-біріне кездесетін екі жақтық толқынның қабаттасуы кезінде байқалады. Осының нәтижесінде пайда болатын тербелмелі процесс тұрғын толқын деп аталады. Іс жүзінде тұрғын толқындар толқынның бөгеттен шағылуы кезінде пайда болады. Бөгетке келген толқын мен оған қарсы қозғалып келе жатқан толқын бір-бірімен қабаттасып, тұрғын толқын береді.

Қарама-қарсы бағытта таралатын екі жазық толқынның теңдеуін жазайық:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 &= a \cos(\omega t + kx)\end{aligned}$$

Екі теңдеуді бірге қосып және оның косинустардың қосындысына арналған формула бойынша нәтижелерін түрлендіріп, мынаны аламыз:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos kx \cos \omega t$$

$k$  толқындық санын оның  $2\pi/\lambda$  мәнімен ауыстырып,  $\xi$  шамасына арналған өрнекті мына түрге келтіруге болады:

$$\xi = \left( 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega t. \quad (84.1)$$

(84.1) теңдеуі тұрғын толқынның теңдеуі болады. Бұдан тұрғын толқынның әрбір нүктесінде қарама-қарсы толқынның жиілігіндей тербелістер өтетіндігі көрінеді. Сонымен қатар, амплитуда  $x$ -қа да тәуелді болады:

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|.$$

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (84.2)$$

нүктелерінде тербеліс амплитудасы ең үлкен  $2a$  мәніне жетеді. Бұл нүктелер тұрғын толқынның шоғырлануы деп аталады. (84.2) шартынан шоғырлану координаталарының мәні алынады:

$$x_{\text{шок}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (84.3)$$

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

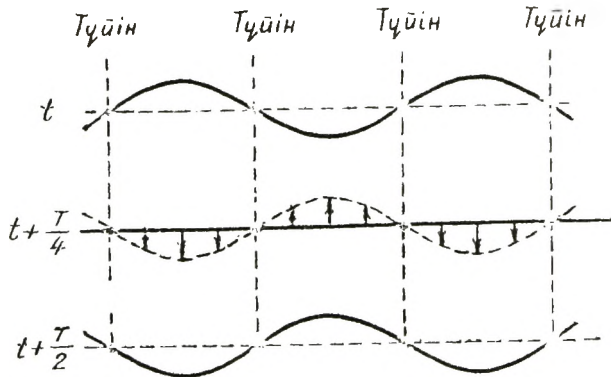
болатын нүктелерде тербеліс амплитудасы нольге айналады. Бұл нүктелер тұрғын толқынның түйіндері деп аталады. Түйіндерде орналасқан ортаның нүктелері

тербеліс жасамайды. Түйін координаталарының мынадай мәндері болады:

$$x_{\text{шок}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (84.4)$$

(84.3) және (84.4) формулаларынан көршілес шоғырланудың арасы, сондай-ақ көршілес түйіндердің арасы  $\lambda/2$  екендігі көрінеді. Шоғырлану мен түйіндер бір-біріне қатысты ширек толқын ұзындығына ығысқан.

Тағы да (84.1) теңдеуіне оралайық.  $(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda})$  көбейткіші нольдік мән арқылы өткенде таңбасын өзгертеді. Осыған орай түйіннің әр жағындағы тербеліс фазасы бір-бірінен  $\pi$  шамасына ажыратылады, яғни түйін-



204-сурет.

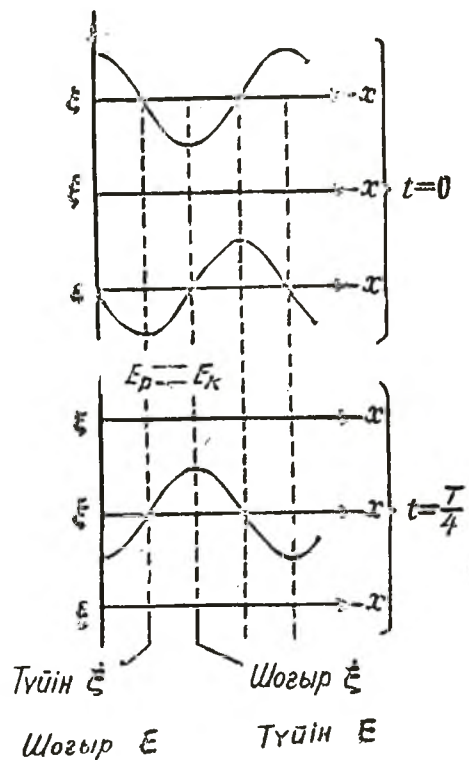
нің әр жағында орналасқан нүктелер қарама-қарсы фазада тербеледі. Көршілес екі түйіннің арасында орналасқан барлық нүктелер синфазада (яғни бірдей фазада) тербеледі. 204-суретте нүктенің тепе-теңдік қалпынан ауытқуының бір қатары «сол сәтіндегі фотографиялары» берілген. Алғашқы «фотография» ауытқудың ең үлкен абсолют мәніне жететін мезетіне сәйкес келеді. Бұдан кейінгі «фотографиялар» ширек периодты интервалмен жасалған; стрелкалармен бөлшектердің жылдамдығы көрсетілген:

(84.1) теңдеуін  $x$  және  $t$  бойынша дифференциалдап, біз ортаның деформациясы  $\varepsilon$  мен бөлшектердің  $\xi$  жылдамдығы өзгеретін заңды табамыз:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t, \quad (84.5)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (84.6)$$

(84.5) теңдеуі деформацияның тұрғын толқынын, ал (84.6) — жылдамдықтың тұрғын толқынын сипаттайды. Бұл теңдеулердің түрінен, жылдамдықтың түйіні шоғырлануы ығысудың түйінімен шоғырлануына сәйкес келеді; сол сияқты деформацияның түйіні мен шоғырлануы жылдамдық пен ығысудың түйіні мен шоғырлануына сәйкес келеді (205-сурет). Сол уақытта  $\xi$  мен  $\varepsilon$  ең үлкен мәніне жеткенде,  $\dot{\xi}$  нольге айналады және керісінше болады. Осыған орай период ішінде екі рет тұрғын толқынның энергиясы, біресе толығынан толқын түйінінің маңында (деформацияның шоғырлануы орналасқан жерде) жинақталған потенциалдық энергияға, біресе толығынан толқын шоғырлану негізі маңында (жылдамдықтың шоғырлануы орналасқан жерде) жинақталған кинетикалық энергияға айналады. Осының нәтижесінде энергия әрбір түйіннен оған көршілес шоғырлануға және керісінше өтеді. Кез келген толқын қимасындағы энергияның орташа ағыны нольге тең.



205-сурет.

## § 85. Шектің тербелісі

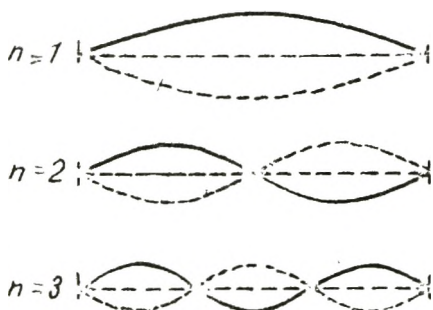
Екі ұшы бекітіліп тартылған шекте көлденең толқынды қоздырғанда тұрғын толқын пайда болады, әрі шектің бекітілген жерлерінде түйіндер орналасады. Сондықтан шекте, шек ұзындығында жарты толқын ұзындығы бүтін сан рет орналасқан тербелістер ғана елеулі интенсивтілікпен қозады (206-сурет). Осыдан

$$l = n \frac{\lambda}{2} \text{ немесе } \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (85.1)$$

шарты шығады, мұндағы  $l$  — шек ұзындығы. (85.1) толқын ұзындығына

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

жиіліктері сәйкес келеді ( $v$  — шектің керілу күші мен ұзындық бірлігінің массасы, яғни шектің сызықтық тығыздығы бойынша анықталатын толқынның фазалық жылдамдығы)



206-сурет.

$\nu_n$  жиіліктері шек тербелісінің меншікті жиіліктері деп аталады. Меншікті жиіліктер негізгі жиіліктер деп аталатын

$$\nu_1 = \frac{v}{2l}$$

жиіліктеріне ессленеді.  $n=2, 3, \dots$  жиіліктеріне сай келетін жиіліктер обертоңдар (бірінші обертоң  $n=2$ -ге, екіншісі  $n=3$ -ке және т. б. сәйкес келеді) деп аталады. Жалпы жағдайда шек тербелістері меншікті жиіліктері әр түрлі бірнеше тұрғын толқындардың қабаттасуынан да болуы мүмкін.

## § 86. Допплер эффектісі

Серпімді ортада, толқын көзінен белгілі бір қашықтықта, қабылдағыш деп аталатын, ортаның тербелісін қабылдайтын құрылғы орналасқан делік. Толқын көзі мен қабылдағыш толқын тарайтын ортамен салыстырғанда қозғалмайтын болса, онда қабылдағыш қабылдайтын тербеліс жиілігі толқын көзінің  $\nu_0$  тербеліс жиілігіне тең. Егер қабылдағыш толқын көзі не олардың екеуі де ортамен салыстырғанда қозғалатын болса, онда қабылдағыш қабылдайтын  $\nu$  жиілік  $\nu_0$  жиіліктен өзгеше болуы да мүмкін. Бұл құбылыс **Д о п п л е р э ф ф е к т і с і** деп аталады.

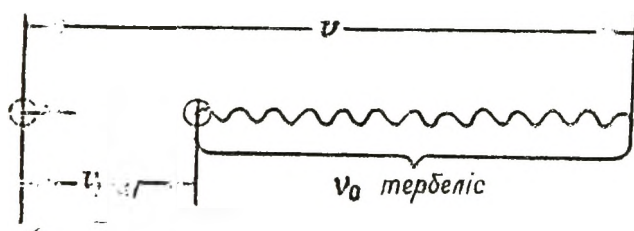
Қарапайым болу үшін, қабылдағыш пен толқын көзі олардың арасын қосатын түзу бойымен қозғалады деп ұйғарайық. Егер толқын көзі қабылдағышқа қарай қозғалса, онда толқын көзінің  $\nu_{\text{көз}}$  жылдамдығы оң деп, ал егер толқын көзі қабылдағыштан алыстаса теріс деп есептейміз. Осы сияқты, егер қабылдағыш толқын көзіне жақындаса, онда  $\nu_{\text{каб}}$  қабылдағыш жылдамдығын оң

деп, ал егер қабылдағыш толқын көзінен қашықтаса теріс деп санаймыз.

Егер толқын көзі қозғалмайтын болса және  $\nu_0$  жиілікпен тербелсе, онда толқын көзі  $\nu_0$ -інші тербеліс жасап өткен мезетке бірнеше тербелістен туған толқын «жалы» ортада  $\nu$  жол жүріп үлгереді ( $\nu$  — толқынның ортамен салыстырғандағы таралу жылдамдығы). Олай болса,  $\nu_0$  секунд ішінде толқын көзі туғызған толқынның «жалы» мен «сайы»  $\nu$  ұзындықтың ішінде орналасады. Егер толқын ортамен салыстырғанда  $\nu_{\text{көз}}$  жылдамдықпен қозғалса, онда толқын  $\nu_0$ -інші тербеліс жасаған мезетте, бірінші толқыннан туған «жал» толқын көзінен  $\nu - \nu_{\text{көз}}$  қашықтықта болады (207-сурет) Олай болса, толқынның  $\nu_0$  «жалы» мен «ойысы»  $\nu - \nu_{\text{көз}}$  ұзындығының ішінде орналасады да, толқын ұзындығы мынаған тең болады:

$$\lambda = \frac{\nu - \nu_{\text{көз}}}{\nu_0} \quad (86.1)$$

Қозғалмайтын қабылдағыш секунд ішінде,  $\nu$  ұзындығының ішінде орналасатын, «жалдар» мен «сайлар» өтеді. Егер қабылдағыш  $\nu_{\text{каб}}$  жылдамдықпен қозғалса, онда ол секундтық аралық уақыт соңында, осы аралықтың басында қазіргі қалпына  $\nu$  қашықтықта тұрған «сайды»



207-сурет.

қабылдайды. Сонымен қабылдағыш секунд ішінде,  $\nu + \nu_{\text{каб}}$  ұзындығының ішінде орналасқан «жалдар» мен «сайларға» сай келетін тербелістерді қабылдайды (208-сурет) және

$$\nu = \frac{\nu + \nu_{\text{каб}}}{\lambda} \quad (86.2)$$

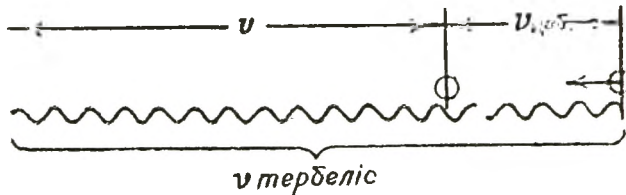
жиілікпен тербеледі.

(86.2) өрнегіне  $\lambda$  шамасына арналған (86.1) өрнегін қойып, мынаны аламыз:



$$v = v_0 \frac{v + v_{\text{каб}}}{v - v_{\text{көз}}} \quad (86.3)$$

(86.3) формуласы бойынша қабылдағыш пен толқын көзінің осындай, олардың ара қашықтығы қысқаратындай, қозғалысында қабылдағыш қабылдайтын  $v$  жиілік толқын көзінің  $v_0$  жиілігінен көп үлкен болады. Егер толқын көзі мен қабылдағыштың ара қашықтығы артса,  $v$  шамасы  $v_0$  шамасынан кем болады.



208-сурет.

Толқын көзі мен қабылдағыштың қозғалысы олардың арасын қосатын түзуге дәл келмесе, (86.3) формуласындағы  $v_{\text{көз}}$  мен  $v_{\text{каб}}$  шамаларын толқын көзі мен қабылдағыш жылдамдықтарының аталған түзудегі проекциялары деп түсіну керек.

## § 87. Дыбыстық толқындар

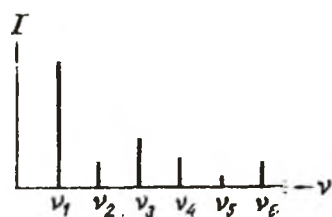
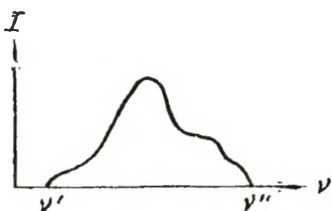
Егер ауада таралатын серпімді толқынның жиілігі шамамен 20 дан 20 000 *гц* аралығында болса, онда олар адам құлағына жетіп, дыбыс сезімін тудырады. Осыған орай, көрсетілген аралықта жатқан кез келген ортадағы жиілігі бар серпімді толқындар дыбыстық толқындар немесе жай ғана дыбыс деп аталады. Жиілігі 20 *гц*-тен төмен серпімді толқындарды *и н ф р а д ы б ы с* деп, жиілігі 20 000 *гц*-тен жоғары толқындарды *ультрадыбыс* деп атайды. *Инфра- және ультрадыбыстарды* адамның құлағы естімейді.

Газдар мен сұйықтардағы дыбыстық толқындар кума толқын ғана бола алады және ол ортаның алма-кезек ауысып отыратын соғылуы мен сиреуінен тұрады. Қатты денелерде кума толқындар да, көлденең толқындар да таралады.

Қабылдайтын дыбысты адам жоғарылығы, тембрі және қаттылығы бойынша ажыратады. Осы субъективтік

бағаның әрқайсысына дыбыс толқынының белгілі бір физикалық сипаттамасы сәйкес келеді:

Кез келген нақты дыбыс жай ғана гармониялық тербеліс емес, жиіліктердің белгілі бір жиынынан тұратын күрделі гармониялық тербелістердің қабаттасуы болып табылады. Берілген дыбыс құрамындағы тербеліс жиіліктерінің жиыны оның акустикалық спектрі деп аталады. Егер дыбыста  $\nu'$ -тен  $\nu''$ -ке дейінгі интервалдағы барлық жиіліктегі тербелістер болса, онда спектр тұтас деп аталады. Егер дыбыс дискретті (яғни бір-бірінен шекті интервалдармен бөлінген)  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  және т. б. жиіліктері бар тербелістерден тұрса, онда спектр сызықты деп аталады.



209-сурет.

209-суретте тұтас (жоғарғы) және сызықты (төменгі) спектр көрсетілген. Абсцисса осі бойынша тербеліс жиілігі, ал ордината осі бойынша оның интенсивтілігі салынған.

Шу ішінде тұтас акустикалық спектр болады. Сызықты спектрі бар тербелістер, едәуір мөлшерде белгілі бір биіктігі бар дыбыс түйсігін тудырады. Мұндай дыбыс тондық дыбыс деп аталады.

Тондық дыбыстың биіктігі негізгі (ең аз) жиілікпен (209-суреттегі  $\nu_1$  жиілігін қараңыз) анықталады. Обертондардың салыстырмалы (яғни жиіліктері  $\nu_2, \nu_3$  және т. б. тербелістер) интенсивтілігі дыбыстың бояуын немесе тембрін анықтайды. Әр түрлі музыкалық аспаптар қоздыратын дыбыстың спектрлік құрамы, естілуі бойынша, мысалы, сырнайды скрипкадан немесе рояльдан ажыратуға мүмкіндік береді.

### § 88<sup>1</sup>. Газдағы дыбыс толқынының жылдамдығы

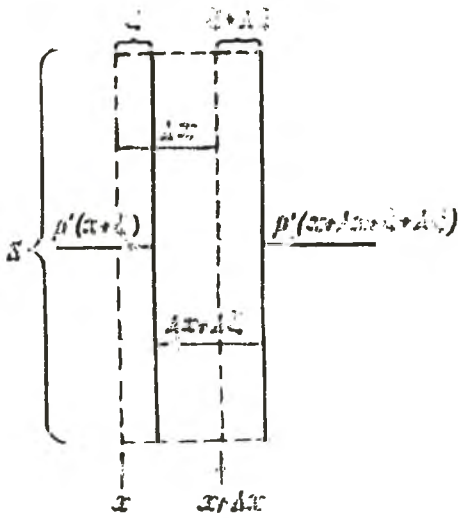
Газдағы серпімді толқын газдардың кеңістікте таралатын сығылуы мен сиреуі алма-кезек ауысатын аймақтарының тізбегі болып табылады. Демек, кеңістіктің

<sup>1</sup> Бұл параграфқа 102 және 103-параграфтарды оқығаннан кейін қайта оралған жөн.

әрбір нүктесіндегі қысым, газда толқын болмаған кездегі  $p$  қысымның орташа мәнімен  $\Delta p$  шамасына периодты түрде өзгеріп отырады. Сонымен, кеңістіктің кейбір нүктесіндегі қысымның лездік мәнін мына түрде беруге болады:

$$p' = p + \Delta p.$$

Дыбыстық толқын  $x$  осінің бойымен таралсын делік. 81-параграфта серпімді толқынның қатты ортадағы жылдамдығын тапқанымыз тәрізді, биіктігі  $\Delta x$ , табанының ауданы  $S$  цилиндр (210-сурет) түріндегі газ көлемін қарастырайық. Осы көлем ішіндегі газ массасы  $\rho S \Delta x$  шамасына тең, мұндағы  $\rho$



210-сурет.

толқын ұйтқытпаған газдың тығыздығы.  $\Delta x$  шамасының аз болуына байланысты, цилиндрдің барлық нүктелеріндегі үдеуді бірдей және  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  шамасына тең деп санауға болады.

Қарастырылып отырған газ көлеміне әсер ететін  $f$  күшін табу үшін, цилиндрдің  $S$  табан ауданының  $(x + \xi)$  қимасы мен  $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$  қимасындағы қысымдардың айырмасына көбейтіндісін алу керек. (85.5) формуласына келтірген ұйғарымды қайталап, мынаны аламыз:

$$f = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x$$

[(81.5) формуласын қорыту кезінде  $\Delta \xi \ll \Delta x$  ұйғарымын пайдаланғанымызды еске алайық]. Сонымен біз бөліп алынған көлемдегі газдың массасын, оның үдеуін және оған әсер ететін күшті таптық. Енді газдың осы көлемі үшін Ньютонның екінші заңының теңдеуін жазайық:

$$(\rho S \Delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x.$$

$S \Delta x$  шамасына қысқартқан соң төмендегіні аламыз:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (83.1)$$

Біз алған дифференциалдық теңдеуде екі белгісіз функция бар  $\xi$  және  $p'$ . Теңдеуді шеше алу үшін, осы функциялардың біреуін екіншісі арқылы өрнектеу керек. Ол үшін газдың  $p'$  қысымы мен оның көлемінің  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  салыстырмалы ұзаруы арасындағы байланысты табамыз. Бұл байланыс газдың сығылу (немесе ұлғаю) процесінің сипатына байланысты болады. Дыбыстық толқында газдың сығылуы мен сиреуі бірінші артынан бірі жиі өтетіндіктен, ортаның көршілес (сыбайлас) учаскелері жылу алмасып үлгере алмайды да процесті адиабаттық деп санауға болады. Адиабаттық процесс кезінде берілген газдың қысымы мен көлемі арасындағы байланыс (103.4) теңдеуі арқылы беріледі. Сондықтан былай жазауға болады:

$$p(S \Delta x)^\gamma = p' [S(\Delta x + \Delta \xi)]^\gamma = p' \left[ S \left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right]^\gamma = \\ = p' (S \Delta x)^\gamma \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma,$$

мұндағы  $\gamma$  — газдың тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылығының тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылығына қатынасы.  $(S \Delta x)^\gamma$  шамасына қысқартып, мынаны аламыз:

$$p = p' \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma$$

Ұйғарым бойынша  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$  екендігін пайдаланып,  $\left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma$  өрнегін  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  дәрежесі бойынша қатарға жіктеп және жоғарғы реттегі аз шамалары бар мүшелерді ескермейді. Осының нәтижесінде мына формулаға келеміз:

$$p = p' \left( 1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

Бұл теңдеудің  $p'$  шамасына қатысты шешейік.

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx p \left( 1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^1 \quad (88.2)$$

Табылған қатыстан  $\Delta p$  шамасына арналған өрнекті оңай алуға болады:

<sup>1</sup> Біз  $x \ll 1$  үшін дұрыс болатын  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$  формуласын пайдаландық.

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (88.3)$$

$\gamma$  — бір мөлшеріндегі шама болғандықтан, (88.3) катысынан  $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\Delta p}{p} \right|$  Сонымен  $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$  шарты физикалық тұрғыдан қысымның орта мәннен ауытқуы қысымның өзінен әлдеқайда кіші. Бұл шынында да солай: атмосфералық  $p$  қысым  $10^3$  мм сын. бағ. шамасында болғанда, ең қатты дыбыс үшін ауа қысымы тербелісінің амплитудасы 1 мм. сын. бағ-нан артпайды.

(88.2) өрнегін  $x$  бойынша дифференциалдап төмендегіні табамыз:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Соңында  $\frac{\partial p'}{\partial x}$  шамасының табылған мәнін (88.1) формуласына қойып, мына дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (88.4)$$

(88.4) теңдеуін (80.4) толқындық теңдеуімен салыстыру газдағы дыбыстық толқынның жылдамдығы үшін төмендегі өрнекті береді:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (88.5)$$

( $p$  және  $\rho$  — ұйтқытпаған газдың қысымы мен тығыздығы екенін ескертейік).

Алғашқыда, газдағы дыбыс жылдамдығы қысымға тәуелді сияқты болып көрінеді. Бірақ бұл олай емес, өйткені қысымның өзгеруі газ тығыздығының өзгеруімен қабаттаса жүреді.

Қалыпты қысымдағы газ қасиеті төмендегі теңдеумен жақсы өрнектеледі:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (88.6)$$

( $m$  —  $V$  көлемде орналасқан газдың массасы,  $\mu$  — сан жағынан газдың молекулалық салмағына тең, мольдің массасы) Газдың  $m$  массасын оның  $V$  көлеміне бөліп,  $\rho$  тығыздығын алуға болады. (88.6) теңдеуін  $m/V$  шамасына бөліп, төмендегіні табамыз:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Тығыздыққа арналған бұл өрнекті (88.5) өрнегіне қойып, газдағы дыбыс жылдамдығына арналған формуланы аламыз:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (88.7)$$

Бұдан газдағы дыбыс жылдамдығы температураға және газды сипаттайтын  $\gamma$  мен  $\mu$  шамаларының мәніне тәуелді болатындығы көрінеді. Газдағы дыбыс жылдамдығы қысымға тәуелді болмайды.

Молекулалардың жылулық қозғалысының орташа жылдамдығы

$$\bar{v}_{\text{ор}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

формуласы бойынша анықталады [(106.17) формуласын қараңыз]. Бұл формуланы (88.7) формуласымен салыстыру газдардағы дыбыс жылдамдығы  $v$  молекулалардың орташа жылдамдығымен

$$v = \bar{v}_{\text{ор}} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}}. \quad (88.8)$$

қатысымен байланысатындығын көрсетеді.

Ауа үшін  $\gamma$  шамасының 1,4-ке тең мәнін қойсақ  $v \approx \approx^{3/4} v_{\text{орт}}$  болады.  $\gamma$  шамасының мүмкін боларлық ең үлкен мәні  $^{5/3}$  болады. Бұл жағдайда  $v \approx ^{4/5} \bar{v}_{\text{мол}}$ . Сонымен газдағы дыбыс жылдамдығы молекуланың жылулық қозғалысының орташа жылдамдығымен шамалас, бірақ әрқашанда  $\bar{v}_{\text{мол}}$  шамасынан аз болады.

Бөлме температурасындағы ( $290^\circ \text{К}$  шамасындағы абсолют температура кезінде) ауадағы дыбыс жылдамдығының шамасын бағалайық. Ауа үшін  $\gamma = 1,40$ ,  $\mu = 29$ . Универсал газ тұрақтысы  $8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж/кмоль} \cdot \text{град}$ -қа тең. Осы мәндерді (88.7) формуласына қоямыз:

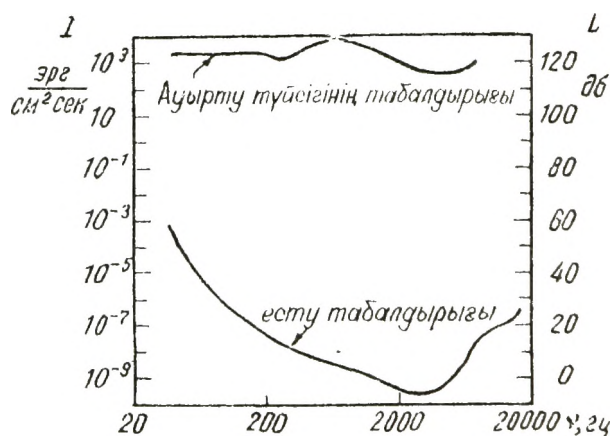
$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 290}{29}} = 340 \text{ м/сек.}$$

$v$  шамасының біз тапқан мәні тәжірибе жүзінде алынған шамаға сай келеді. Молекулалық салмағы белгілі газдағы дыбыс жылдамдығын өлшеп, (88.7) формуласы бойынша  $\gamma$  шамасын — газдың тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылығының оның тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылығына қатынасын есептеп шығаруға болады. Бұл әдіс іс жүзінде қолданылады.

Дыбыста дисперсияның, яғни жылдамдықтың жиілікке тәуелділігінің байқалмауының айырықша маңызы бар. Мұндай тәуелділік сөйлесуді жүзеге асыруға мүмкіндік бермес еді немесе қиындатып жіберер еді және музыкаға рахаттана алмас едік.

### § 89. Дыбыс күші деңгейінің шкаласы

Дыбыс толқынының интенсивтілігі деп толқынның өзімен бірге тасымалдайтын энергия ағыны тығыздығының орташа мәнін түсінеміз. Дыбыстық сезім тудыру үшін толқынның есіту табалдырығы деп аталатын белгілі бір дәрежеде интенсивтілігі болу керек. Әр түрлі адамдар үшін есіту табалдырығы әр түрлі және ол дыбыс жиілігіне көбірек тәуелді болады. Адам құлағы 1000-нан 4000 гц-ке дейінгі жиілікке анағұрлым сезімтал. Бұл аймақтағы есіту табалдырығы шамамен  $10^{-9}$  эрг/см<sup>2</sup>. сек шамасында болады. Бұдан басқа жиіліктерде есіту табалдырығы жоғары жатады (211-суреттегі төменгі қисықты қараңыз).



211-сурет.

Интенсивтілік  $10^3 - 10^4$  эрг/см<sup>2</sup>.сек шамасында болғанда толқын құлақты ауыртатындай сезім тудызып, дыбыс ретінде қабылданбайды. Интенсивтіліктің мұндай жағдай байқалатын мәні ауыртатын түйсік табалдырығы деп аталады. Ауыртатын түйсік табалдырығы, есіту табалдырығы жиілікке тәуелді болады (211-суреттегі жоғарғы қисық сызықты қараңыз; бұл суретте келтірілген мәліметтер орта қалыпты құлаққа арналған)

Субъективті түрде бағаланатын қаттылық дыбыс толқындарының интенсивтілігіне қарағанда баяу өседі. Интенсивтілік геометриялық прогрессия бойынша өскенде, қаттылық шамамен арифметикалық прогрессия бойынша, яғни сызықты түрде өседі. Осыған сүйеніп, қаттылық деңгейі берілген дыбыс интенсивтілігі  $I$  шамасының алғашқы интенсивтілік ретінде алынған  $I_0$  шамасына қатынасының логарифмі ретінде анықталады:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (89.1)$$

Жиілік 1000 *гц* шамасында болғанда есіту табалдырығы нольдік деңгейде ( $L=0$ ) жататындықтан,  $I_0$  алғашқы интенсивтілік  $10^{-9}$  *эрг/см<sup>2</sup>·сек*-қа тең деп алынады.

(89.1) формуласы бойынша анықталатын  $L$  қаттылық деңгейі бел деп аталады. Әдетте бұдан 10 есе аз бірлікті — децибелді (*дб*) пайдаланады.  $L$  шамасының децибелмен алынған мәні

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (89.2)$$

формуламен анықталатындығы анық.

Кез келген  $I_1$  және  $I_2$  екі интенсивтіліктің қатынасы да децибелмен өрнектеуге болатынын ескертейік:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (89.3)$$

(89.3) формуласы бойынша кейбір қашықтықтағы толқын интенсивтілігінің кемуін (өшуін) децибелмен өрнектеуге болады. Мысалы, 20 *дб*-мен алынған өшу дегеніміз интенсивтілік 100 есе кемиді деген сөз.

Толқынның адам құлағында дыбыстық түйсік ( $10^{-9}$ -нен  $10^4$  *эрг/см<sup>2</sup>·сек*-ке дейін) туғызатын барлық интенсивтіліктері диапазоны 0 мен 130 *дб* аралығындағы қаттылық деңгейінің мәндеріне сәйкес келеді. 3-таблицада кейбір типтік дыбыстар үшін алынған қаттылық деңгейінің болжалды мәндері келтірілген.

Дыбыстық толқындардың өзімен бірге тасымалдайтын энергиясы өте аз. Егер, мысалы, суы бар стакан өзіне түскен, қаттылық деңгейі 70 *дб* (бұл жағдайда секунд ішінде жұтылатын энергия мөлшері шамамен  $60 \cdot 10^{-2}$  *эрг/сек* болады) дыбыс толқынының энергиясын толығымен жұтатын болса, онда бөлме температурасындағы осы суды қайнау температурасына дейін жеткізу үшін отыз мың жылдай уақыт керек.



3 - т а б л и ц а

Дыбыстың сипаттамасы	Қаттылық деңгейі, дБ	Интенсивтілік, эрг/см <sup>2</sup> сек
Сағаттың тықылы	20	10 <sup>-7</sup>
1 м қашықтықтағы сыбыр	30	10 <sup>-6</sup>
Баяу әңгіме	40	10 <sup>-5</sup>
Қаттылығы орташа сөз	60	10 <sup>-3</sup>
Қатты сөз	70	10 <sup>-2</sup>
Айқай	80	10 <sup>-1</sup>
Самолет моторының шуы		
5 м қашықтықта	120	10 <sup>3</sup>
3 м қашықтықта	130	10 <sup>4</sup>

Дыбыс толқындарының  $I$  интенсивтілігі мен  $(\Delta p)_m$  қысымы тербелісінің амплитудасы арасындағы байланысты табайық. Осы параграфтың басында  $I$  интенсивтіктің энергия ағыны тығыздығының орташа мәніне сәйкес келетіндігі көрсетілген. Бұл (82.10) бойынша:

$$I = j_{\text{ор}} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v, \quad (89.4)$$

мұндағы  $\rho$  — ұйтқымаған газдың тығыздығы,  $a$  — орта бөлшектері<sup>1</sup> тербелісінің амплитудасы, яғни  $\xi$  шамасы тербелісінің амплитудасы,  $\omega$  — жиілік,  $v$  — толқынның фазалық жылдамдығы.

$\xi$  шамасы  $\xi = a \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  заңы бойынша өзгереді. Онда  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \frac{\omega}{v} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  (88.3) бойынша  $\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$  мәнін қойып,  $\Delta p$  шамасының өзгеру заңын аламыз:

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -(\Delta p)_m \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right).$$

Осыдан  $\xi$  тербелісінің амплитудасы (яғни  $a$ )  $(\Delta p)_m$  қысымы тербелісінің амплитудасымен

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega} \quad (89.5)$$

қатысы арқылы байланысатындығы көрінеді.

(89.4) формуласына  $a$  үшін (89.5) мәнін және  $v$  үшін

<sup>1</sup> Ортаның бөлшектері деп жеке молекулалар емес, сызықтың мөлшері толқын ұзындығынан әлдеқайда кіші микроскопиялық (яғни ішінде едәуір мөлшерде молекулалары бар) көлемдерді айтады.

(88.5) мәнін қойып, онша күрделі емес түрлендірулерден кейін

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v}. \quad (89.6)$$

қатысына келуге болатындығына оңай көз жеткізуге болады.

Осы формуланың көмегімен 0 ден 130 *дб* аралығындағы қаттылық деңгейіне ауа қысымы тербелісінің  $3 \cdot 10^{-4}$  *дин/см<sup>2</sup>* (яғни  $2 \cdot 10^{-7}$  *мм* сын. бағанасынан) 1000 *дин/см<sup>2</sup>* (1 *мм* сын. бағанасына) дейінгі амплитуда мәндері сәйкес келетінін есептеп шығаруға болады.

Бөлшек тербелісінің *a* амплитудасы мен бөлшек жылдамдығының  $(\xi)_m$  амплитудасына бағалау жасайық. (89.5) формуласы бойынша анықталатын *a* шамасын бағалаудан бастайық.  $\frac{v}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$  болатынын ескеріп,

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \approx 0,1 \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \quad (89.7)$$

қатысын аламыз ( $\gamma = 1,5$ , олай болса,  $2\pi\gamma \approx 10$ )

130 *дб* шамасындағы қаттылық кезінде  $(\Delta p)_m$  ( $\rho$  қатынасы  $10^{-3}$  ретіндегі шама болады, 60 *дб* қаттылық кезінде бұл қатынас шамамен  $2 \cdot 10^{-7}$  болады. Ауадағы дыбыс толқындарының ұзындығы 17 *м* ( $v = 20$  *гц* болғанда) -ден 17 *мм* ( $v = 20\,000$  *гц* болғанда) -ге дейінгі аралықта жатады. Осы мәліметтерді (89.7) формуласына қойып, 60 *дб* қаттылық кезінде бөлшектердің тербеліс амплитудасы, ең ұзын толқындар үшін  $\sim 3 \cdot 10^{-4}$  *мм* және ең қысқа толқындар үшін  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$  *мм* болатынын табамыз. 130 *дб* қаттылық кезінде ең ұзын толқындар үшін тербеліс амплитудасы  $\sim 1,7$  *мм*-ге жетеді.

Гармониялық тербеліс кезіндегі  $(\xi)_m$  жылдамдық амплитудасы, біздің білетінімізше, *a* ығысу амплитудасын  $\omega$  дөңгелектік жиілікке көбейткенге тең:  $\xi_m = a\omega$ . (89.5) өрнегін  $\omega$  шамасына көбейтіп:

$$\frac{(\xi)_m}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \approx \frac{(\Delta p)_m}{\rho} \quad (89.8)$$

қатысын аламыз. Олай болса, 130 *дб* қаттылық кезінде жылдамдық амплитудасы шамамен  $340$  *м/сек*  $\cdot 10^{-3} = 0,34$  *м/сек* болады. 60 *дб* қаттылық кезінде жылдамдық амплитудасы 0,1 *мм/сек* шамасында болады.

Жылдамдық амплитудасының ығысу амплитудасынан ерекшелігі, ол толқын ұзындығына тәуелді болмайтынын атап өтейік.

## § 90. Ультрадыбыс

Бағытталған, яғни жазық толқынға жақын толқын алу үшін, толқын шығарғыштың мөлшері толқын ұзындығынан бірнеше есе үлкен болуы керек. Ауадағы дыбыстық толқындардың ұзындығы шамамен 15 м-ден 15 мм аралығында болады. Сұйық қатты ортадағы толқын ұзындығы бұдан да үлкен болады (бұл орталардағы дыбыс толқындарының таралу жылдамдығы ауадан үлкен болады) Ұзындығы осындай бағытталған толқын шығаратын толқын шығарғышты жасау, іс жүзінде мүмкін емес. Ұзындығы бұдан әлдеқайда кіші ультрадыбыстық толқындар үшін, іс басқаша қойылады. Толқын ұзындығы кеміген сайын, толқынның таралу процесіндегі дифракцияның ролі де кемиді. Сондықтан ультрадыбыс толқындарын, жарық шоғы тәрізді, бағытталған шоқтар түрінде алуға болады.

Ультрадыбыс толқындарын қоздыру үшін қазіргі кезде негізінен екі құбылыс пайдаланылады: кері пьезоэлектрлік эффект және магнитострикция. Кері пьезоэлектрлік эффектінің мәні, кейбір кристалдан (мысалы, кварц, сегнет тұзы, барий титанаты және т. б.) белгілі бір тәсілмен кесіп алынған пластинаның электр өрісінің әсерінен аз ғана деформациялануында (бір бағыттағы өріс кезінде ұзарады, ал қарама-қарсы бағыттағы өрісте сығылады) Мұндай пластинаны, айнымалы кернеу берілетін, металл астарларының арасына орналастырып, пластинаның еріксіз механикалық тербелісін қоздыруға болады. Егер электр кернеуі өзгерісінің жиілігі пластинаның меншікті жиілігіне сай келсе, бұл тербелістер ерекше интенсивті болады. Пластинаның тербелісі оны қоршаған сұйық немесе газ тәрізді ортаға беріледі де бұл ортада ультрадыбыстық толқындарды қоздырады.

Магнитострикцияның мәні магнит өрісі әсер еткен ферромагниттік заттардың (темір, никель, кейбір қорытпалар және т. б.) аз ғана деформациялануында болып табылады. Сондықтан ферромагниттік стерженьді айнымалы магнит өрісіне орналастырып (мысалы, айнымалы

ток өтетін катушканың ішіне), өткендегідей резонанс кезінде ерекше интенсивті болатын, оның механикалық тербелістерін қоздыруға болады.

Бағытталған ультрадыбыстық шоқтар судағы локация мақсатында (нәрселерді байқау және оған дейінгі қашықтықты анықтау) кең қолданыс тапты. Ультрадыбыстық локацияның идеясын алғаш рет көрнекті француз физигі П. Ланжевен (1872—1946) айтты және бірінші дүние жүзілік соғыс кезінде сүңгуір қайықты байқау үшін жасады. Қазіргі кезде ультрадыбыстық локаторлар айсбергтерді, балық үйірін байқау үшін қолданылады.

Айқайлап және жаңғырықтың, яғни бөгеттен — жардан, орманнан, құдықтағы су бетінен тағы басқалардан — шағылған дыбыстың қайтып келу уақытын анықтап, осы уақыттың жартысын дыбыс жылдамдығына көбейтіп, бөгетке дейінгі қашықтықты табуға болады. Жоғарыда біз айтып өткен локатор және теңіз түбінің тереңдігін өлшеу мен оның рельефін түсіруге арналған ультрадыбыстық эхолот осы принципке негізделіп жасалады. Корабль корпусына бекітілген толқын шығарғыш, вертикаль бағытта қысқа ультрадыбыстық импульстар жібереді. Теңіз түбінен шағылған импульстар қабылдағышта тіркеледі. Импульстың шығуы мен оның қабылдануы арасында өткен уақыт бойынша тереңдік есептеледі.

Ультрадыбыстық локация методы жарғанаттың қараңғыда ұшуы кезінде дыбыс бағдарлауына мүмкіндік жасайды. Жарғанат дүркін-дүркін ультрадыбыстық жиіліктегі импульстар шығарады және есіту органдарының көмегімен шағылған сигнал бойынша өзінің маңайындағы денелерге дейінгі қашықтықты үлкен дәлдікпен біледі.

1928 жылы совет ғалымы С. Я. Соколов ультрадыбысты дефектоскопия, яғни бұйымдардағы ақауды (дефектілерді) байқау мақсатында пайдалануды ұсынды. Егер дефектінің мөлшері толқын ұзындығынан үлкен болса, онда ультрадыбыстық импульс дефекіден шағылып кері қайтады. Бұйымға ультрадыбыстық импульстарды жіберіп және шағылған толқындарды тіркеу арқылы бұйымдағы дефектіні байқап қана қоймай, оның мөлшері мен орналасқан жері туралы да айтуға болады. Соколов және басқа ғалымдар жасаған ультрадыбыс-

тық дефектоскопия әдісі барған сайын кеңінен қолданылуда.

Интенсивтілігі үлкен болғандықтан және өзінің жүріп өткен жолындағы ортада қысымның күшті пульсациясын жасайтындықтан, ультрадыбыстық толқындар бірқатар ерекше құбылыстарды жасайды: сұйық ішінде қалқып жүретін бөлшектердің ұнтақталуы (дисперсиялануы), эмульсияның (өзімен араласпайтын басқа бір сұйық ішінде берілген сұйықтың жүзіп жүретін майда тамшылары) пайда болуы, диффузия процесінің тездеуі, ерітілу, химиялық реакциялардың жандануы және т. б.

III бөлім  
МОЛЕКУЛАЛЫҚ ФИЗИКА ЖӘНЕ  
ТЕРМОДИНАМИКА

XI ТАРАУ  
АЛҒАШҚЫ ДЕРЕКТЕР

§ 91. Молекула-кинетикалық теория (статистика)  
және термодинамика

Молекулалық физика дегеніміз физиканың, заттың құрылысымен қасиеттерін молекула-кинетикалық деп аталатын тұрғыдан зерттейтін физиканың бөлімі болып табылады. Бұл тұрғыдан алғанда, қатты, сұйық және газ күйінде кездесетін кез келген дене өте кішкентай дербес бөлшектердің — молекулалардың<sup>1</sup> үлкен жиынтығынан тұрады. Кез келген заттың молекулалары қалыптасқан бағыты жоқ, ретсіз, хаосты қозғалыста болады. Оның интенсивтігі заттың температурасына байланысты болады.

Молекулалардың хаосты қозғалыста болуының тікелей дәлелдемесі — броундық қозғалыс болып табылады. Бұл құбылыстың мәнісі мынада: сұйықта жүзіп жүрген өте кішкентай (тек микроскоппен ғана көруге болатын) бөлшектер үздіксіз ретсіз қозғалыста болады, бұл қозғалыс сыртқы себептерге тәуелсіз, тек заттың ішкі қозғалысының әсеріне ғана байланысты болады. Броундық бөлшектер молекулалардың ретсіз соққылауларының әсерінен қозғалыста болады.

Молекула-кинетикалық теория тікелей тәжірибеде заттардың бақыланатын қасиеттерін (қысымын, температурасын және т. б.) молекулалардың қосынды әсерінің нәтижесі деп түсіндіруді мақсат етеді. Бұл үшін ол статистикалық әдісті пайдаланады, яғни жеке молекула-

---

<sup>1</sup> Атомдарды бір атомды молекулалар ретінде қарастыруға болады.

лардың қозғалысына назар аудармай, тек бөлшектердің орасан зор жиынтығының қозғалысын сипаттайтын орташа шамаларды ғана пайдаланады. Сондықтан да оны кей жағдайда статистикалық физика деп те атайды.

Денелердің әр түрлі қасиеттерін және зат күйінің өзгерістерін зерттеумен термодинамика да шұғылданады. Алайда термодинамиканың молекула-кинетикалық теориядан айырмашылығы, ол — денелер мен табиғат құбылыстарының микроскопиялық суреттемесін ескермей, тек олардың макроскопиялық қасиеттерін ғана зерттейді. Термодинамика молекулалар мен атомдарды қарастырмай-ақ, процестерді микроскопиялық тұрғыдан қарастыруға сүйенбей, оның өтуі жайында бірқатар қорытындылар жасай алады.

Термодинамиканың негізінде көптеген тәжірибелік деректердің жинағын жалпылау арқылы тағайындалған бірнеше негізгі заңдар жатыр (оларды термодинамикалық бағамалары деп атайды). Осы себептен термодинамиканың қортындылары өте жалпы сипатта болады.

Зат күйінің өзгерістерін әр түрлі көзқарас тұрғысында қарастыра отырып, термодинамика мен молекула-кинетикалық теория бір-бірін толықтырып, негізінен бір тұтас ілім құрайды. Молекула-кинетикалық ұғымдардың даму тарихына орала отырып, алдымен заттың атомистикалық құрылысы жайындағы ұғымдарды о бастан-ақ көне гректер айтқанын ескерте кетейік. Алайда көне гректердің бұл идеялары данышпандық болжам ғана еді. XVII ғасырда атомистика болжам емес, ғылыми гипотеза түрінде қайтадан келе бастады. Бұл гипотеза, әсіресе, орыстың данышпан ғалымы және ойшылы М. В. Ломоносовтың (1711—1765) еңбектерінде айрықша дамытылды, ол өз заманында белгілі болған физикалық және химиялық құбылыстардың бір тұтас суреттемесін беруге талпынды. Бұл үшін ол материяның корпускулалық (осы кездегі терминология бойынша — молекулалық) құрылысы жайлы ұғуға сүйенді. Өз заманында үстемдік еткен жылу тегі (гипотетті жылу сұйығы, оның денедегі шамасы дененің қаншалықты қызғандығын анықтайды) теориясына қарсы шығып, Ломоносов «жылудың себебін» дене бөлшектерінің айналымы қозғалыста болуынан деп тапты. Сөйтіп, Ломоносов негізінде молекула-кинетикалық көзқарасты тұжырымдады деуге болады.

XIX ғасырдың екінші жартысында және XX ғасырдың басында көптеген ғалымдардың еңбектерімен атомистика ғылыми теорияға айналды.

## § 92. Молекулалардың массасы және мөлшерлері

Атомдар мен молекулалардың массаларын сипаттау үшін атомдық және молекулалық салмақ (оларды атомдық және молекулалық масса деп атау дұрысырақ болар еді) деп аталатын шамалар қолданылады.

Химиялық элементтің атомдық салмағы ( $A$ ) деп осы элементтің атомының массасының  $C^{12}$  атом (массалық саны 12 болатын көміртегінің изотопы осылай белгіленеді; «Атомдық физиканы» қараңыз) массасының  $1/12$  бөлігіне қатынасын айтамыз. Заттың молекулалық салмағы ( $M$ ) деп осы заттың молекула массасының  $C^{12}$  атом массасының  $1/12$  бөлігіне қатынасын айтады. Молекулалар мен атомдар массаларының осылайша анықталатын шкаласы  $C^{12}=12$  шкаласы<sup>1</sup> деп аталады. Бұл шкала бойынша  $C^{12}$ -ның атомдық салмағы дәл 12-ге тең,  $O^{16}$  оттегінікі — 15,9949, ал ең жеңіл элемент — сутегінікі 1,0080 (изотоптардың табиғи қоспасы үшін). Атомдық және молекулалық салмақтардың анықтамасынан, олардың өлшеусіз шамалар екендігі шығады.

$C^{12}$  атомының массасының  $1/12$  бөлігіне тең массаның бірлігі қысқаша «u» деп латын әрпімен (unit) немесе «е» (единица — бірлік) деген орыс әрпімен белгіленеді. Осы бірліктің килограммен алынған шамасын  $m_{\text{бір}}$  деп белгілейік. Сонда атомның килограммен алынған массасы  $Am_{\text{бір}}$ , ал молекуланың массасы  $Mm_{\text{бір}}$  болады.

$m_1$  және  $m_2$  массаларының қатынасы  $A_1$  және  $A_2$  атомдық салмақтарының қатынасындай болатын шамаларда алынған химиялық қарапайым екі затта атомдар саны

<sup>1</sup> Бұдан бұрын  $O^{16}=16$  шкаласы қолданылатын, ол бойынша  $O^{16}$ -ның атомдық салмағы дәлме-дәл 16 болатын ( $O^{16}$  — оттегінің массалық саны 16 болатын изотопы). Бірақ,  $O^{16}$  басқа атомдар мен молекулалардың массаларын масс-спектрографиялық әдіспен салыстыру ыңғайсыз. Бұл үшін көміртегінің изотоптарының бірі пайдаланған өте ыңғайлы. Сондықтан 1960 жылы шақырылған Таза және қолдану физиканың Халықаралық одағының X Бас ассамблеясы  $C^{12}=12$  шкаласын ұсынды. Осыған байланысты СССР Ғылым академиясы атомдық және молекулалық салмақтардың жаңа шкаласына көшу жөнінде шешім қабылдады.



да бірдей болатындығын оңай түсінуге болады. Дәл осы тәрізді, массаларының қатынасы молекулалық салмақтарының қатынасындай болатын шамада алынған химиялық күрделі екі заттың да молекулалар саны бірдей болады. Элементтің, килограмм есебімен алынған массасының сан жағынан алғанда оның атомдық салмағына тең мөлшері килограмм атом деп аталады. Берілген заттың, килограмм есебімен алынған массасының сан жағынан алғанда оның молекулалық салмағына тең болатын мөлшері килограмм молекула немесе қысқаша киломоль деп аталады (кмоль болып белгіленеді).

СГС системасында килограмм-атомның орнына грамм-атомды (берілген элементтің  $A$  грамы), ал килограмм-молекуланың орнына грамм молекуланы немесе мольді (берілген заттың  $M$  грамы) пайдаланады.

Килограмм-молекуланың  $\mu$  массасы сан жағынан  $M$  молекулалық салмаққа тең болады. Осы себептен де  $\mu$ -ді кейде молекулалық салмақ деп атайды. Алайда,  $M$  дегеніміз өлшеусіз шама болғанда  $\mu$  киломольдің массасы ( $M$ -нің өлшемі)  $кг/моль$  болатындығын ескерген жөн. Сонда атомдарды бір атомды молекулалар деп қарастыра отырып, килограмм-атомды килограмм-молекула деп алуға болатындығы сөзсіз, бұл кезде  $\mu$  және  $A$  шамаларының сан мәндері бірдей болады.

Килограмм-молекулалардың массаларының қатынасы сәйкес молекулалық салмақтардың қатынасындай болатындықтан, барлық заттардың киломольдеріндегі молекулалар саны бірдей және

$$N_A = \frac{\mu}{M m_{\text{бір}}}$$

болады, сан жағынан бұл  $1/m_{\text{бір}}$  -ге тең.  $N_A$  саны Авогадро саны деп аталады. Тәжірибеден

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$$

екендігі табылған.

СГС — системасында Авогадро саны деп заттың грамм — молекуласындағы молекулалар санын атайды. Олай болса, бұл системада

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Авогадро саны арқылы  $m_{\text{бір}}$  массаны анықтауға болады. Шынында да,  $m_{\text{бір}}$  сан жағынан  $1/N_A$  яғни  $1/6,023 \cdot 10^{26} = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг-ға тең. Сөйтіп,

кез келген атомның массасы  $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ А кг}$ ,  
кез келген молекуланың массасы  $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ М кг}$  болады.

Енді молекулалардың өлшемдеріне баға берелік. Сұйықтардың молекулалары бір-біріне өте жақын, тығыз орналасады деп ұйғару өзінен-өзі түсінікті. Сондықтан, бір молекула көлемінің жуықталған бағасын алу үшін, қандай да бір сұйықтың, мәселен судың, киломо­лінің көлемін бір киломольдегі молекулалар санына бөліп табуымызға болады. Су киломо­лі (яғни 18 кг)  $0,018 \text{ м}^3$  көлемді алады. Демек, жеке молекуланың үлесіне

$$\frac{0,018}{6 \cdot 10^{26}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

шамасына тең көлем келеді екен. Осыдан су молекулаларының сызықтық мөлшерлері жуықтап алғанда мынаған тең:

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3 \text{ \AA}.$$

Басқа заттардың молекулаларының да мөлшерлері сол реттегі бірнеше ангстрем шамасында болады.

### § 93. Системаның күйі. Процесс

Денелер системасы немесе жай система деп біз қарастырып отырған денелердің жиынтығын атайтын бо­ламыз. Сұйық және онымен тепе-тең қалыптағы бу сис­теманың мысалы бола алады. Атап айтқанда, система бір денеден де құрылады.

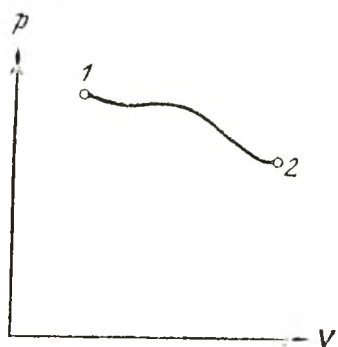
Кез келген система температура, қысым, көлем жә­не т. с. с. мәндер арқылы айырылатын әр түрлі күйде бола алады. Системаның күйін сипаттайтын осындай шамалар к ү й п а р а м е т р л е р і деп аталады.

Қандай да бір параметрдің барлық уақытта анықтал­ған мәні бола бермейді. Мәселен, дененің әр түрлі нүк­телерінде температура бірдей болмаса, онда дененің бел­гілі бір  $T$  параметрі бар деп айта алмаймыз. Бұл жағ­дайда күй тепе-тең емес күй деп аталады. Егер осы денені басқа денелерден оңашалап және өз бетіне қал­дыратын болсақ, онда температура қалыптасып, дененің барлық нүктелері үшін  $T$  мәнін қабылдайды — дене те­пе-тең күйге ауысады.  $T$  мәні дене сыртқы әсердің нә-

тижесінде тепе-тең күйден ауысқанға дейін өзгермей қалады.

Басқа параметрлер үшін де, мәселен,  $p$  қысым үшін де осылай орындалады. Егер, тығыз жүретін поршеньмен жабылған цилиндрлік ыдыстағы газды алып, поршеньді тез қозғалтып, газды сықсақ, онда поршень астында қысым газ көлемінің басқа жеріндегі қысымнан артық болатын газ қабаты пайда болады. Демек, бұл жағдайда газды  $p$  қысымның белгілі бір мәнімен сипаттауға болмайды да, газ тепе-тең емес күйде болады. Алайда, егер поршеньді тоқтатсақ, онда газ көлемінің әр түрлі нүктелеріндегі қысым қалыптасып, газ тепе-тең күйге келеді.

Сонымен, системаның тепе-тең күйі деп системаның барлық параметрлері, сыртқы жағдайлар өзгермей қалған кезде жеткілікті уақыт бойы тұрақты болып қалатын белгілі мәндерін сақтайтын күйін атаймыз.



212-сурет.

Егер координаталар осьтеріне қандай да бір екі параметрдің мәндерін салатын болсақ, онда системаның кез келген тепе-тең күйі осы графикте нүкте түрінде өрнектеледі (мысалға, 212-суреттегі 1 нүктені қараңыз). Тепе-тең емес күйді дәл осылай өрнектеуге болмайды, өйткені тепе-тең емес күй кезінде параметрлердің ең болмағанда біреуінің белгілі бір мәні болмайды.

Кез келген процесс, яғни системаның бір күйден екінші күйге өтуі, системаның тепе-тең күйден шығуымен байланысты болады. Демек, системада қандай да бір процесс жүрген кезде система тепе-тең емес күйлерінің тізбегінен өтеді. Жоғарыда қарастырған поршеньмен жабылған ыдыстағы газды сығу процесіне қайта оралып, поршеньді қозғалтқан кездегі тепе-тең күйінің бұзылуы газды неғұрлым тез сығуға тәуелді болады деген қорытынды жасауға болады. Егер де поршеньді өте баяу қозғалтатын болсақ, онда тепе-тең күйден бұзылуы болымсыз өтеді де газдың әр түрлі нүктелердегі қысымының мәні қайсыбір орташа  $p$  мәніне жақын болады. Газдың сығылуы шексіз баяу өтетін шектік жағдайда газ әр мезетте қысымның белгілі бір

мәнімен сипатталатын болады. Демек, бұл кезде газдың әр мезеттегі күйі тепе-тең күй болады және шектеусіз баяу процесс тепе-тең күштердің тізбегінен тұрады екен.

Тепе-тең күйлердің үздіксіз тізбегінен құрылған процесс тепе тең процесс деп аталады. Бұл айтылғандардан көріп отырғанымыздай, тек шектеусіз баяу өтетін процесс тепе-тең процесі бола алады, сондықтан да тепе-тең процесі дегеніміз абстракция болып табылады.

Тепе-тең процесті графикте сәйкес қисық сызық түрінде өрнектеуге болады (212-сурет). Тепе-тең емес процестерді біз шартты түрде пунктир сызықтармен кескіндейміз.

Тепе-тең күй және тепе-тең процесс ұғымы термодинамикада үлкен роль атқарады. Термодинамиканың барлық сандық қорытындылары тек тепе-тең процестер үшін нақты орындалады.

## § 94. Системаның ішкі энергиясы

Қандай да бір дененің толық энергиясынан тұтастай қозғалысының кинетикалық энергиясы мен сыртқы күш өрісіндегі потенциалық энергиясын шығарып тастағанда қалған энергия оның ішкі энергиясы деп аталады. Мәселен, біршама газ массасының ішкі энергиясын анықтаған кезде, газдың ыдыспен бірге қозғалысының энергиясы мен оның жердің тартылыс күшінің өрісінде тұрғандығынан пайда болатын энергиясы ескерілмеуі тиіс.

Демек, ішкі энергия түсінігіне молекулалардың хаосты қозғалысының кинетикалық энергиясы, молекулалардың өз ара әсерлесуінің потенциалық энергиясы және ішкі молекулалық энергия кіреді екен.

Денелер системасының ішкі энергиясы әрбір жеке денелердің ішкі энергиялары мен денелер жанасатын жұқа қабаттағы молекулалардың арасындағы өз ара әсерлесу энергиясы болып табылатын, денелердің өз ара әсерлесу энергиясының қосындысына тең болады.

Ішкі энергия система күйінің функциясы болып табылады. Бұл система берілген күйде тұрған кезде, оның ішкі энергиясы дәл осы күйге тән келетін, системаның бұдан бұрынғы күйіне тәуелсіз болатын мән қабылдайды деген сөз.

Демек, система бір күйден екінші күйге өткен кезде оның ішкі энергиясының өзгерісі әрқашан да ауысу өткен жолға тәуелсіз, яғни системаның бір күйінен екінші күйіне келтіретін процесіне немесе процестер жинағына тәуелсіз, осы күйлердегі ішкі энергияның мәндерінің айырмасына тең.

## § 95. Термодинамиканың бірінші бастамасы

Ішкі энергия негізінен екі түрлі процестің: дененің  $A$  жұмыс істеуі мен денеге берілген  $Q$  жылу мөлшерінің есебінен өзгере алады. Жұмыс істеу системаға әсер етуші сыртқы денелердің орын ауыстыруымен қоса жүреді. Мәселен, ыдыстағы газды жауып тұрған поршень орын ауыстыра отырып қозғалған кезде газ  $A$  жұмыс істейді. Ньютонның үшінші заңы бойынша бұл кезде газ да жұмыс жасайды:  $A = -A'$

Денеге жылу беру сыртқы денелердің орын ауыстыруымен тәуелді емес, демек, денеге жасалған микроскопиялық (яғни, денені құрайтын барлық молекулаларға қатысты) жұмысқа да тәуелді емес. Ішкі энергияның бұл жағдайдағы өзгерісі ыстығырақ дененің жеке молекулаларының салқынырақ дененің молекулаларына қарсы істеген жұмысының әсерінен болады. Бұл жағдайда энергия сәуле шығару арқылы да беріле алады. Бір денеден екінші денеге энергияның берілуіне әкелетін микроскопиялық (яғни түгел денені емес, тек оның жеке молекулаларын ғана қамтитын) процестердің жиынтығы жылу берілу деп аталады.

Бір дененің екінші денеге беретін энергия мөлшерінің дененің бір-біріне істететін  $A$  жұмысы арқылы анықталатыны тәрізді, бір денеден екінші денеге жылу берілу арқылы берілетін энергия мөлшері, дененің алатын  $Q$  жылу мөлшері арқылы анықталады. Сонымен, системаның ішкі энергиясының өсімшесі системаға істелген  $A'$  жұмыс пен системаға берілген жылудың қосындысына тең болуы тиіс:

$$U_2 - U_1 = Q + A' \quad (95.1)$$

Мұндағы  $U_1$  және  $U_2$ — системаның ішкі энергиясының бастапқы және ақырғы мәндері.

Әдетте, сыртқы денелердің системаға істелген  $A$  жұмысының орнына системаның сыртқы денелерге істеген

$A$  ( $-A'$  жұмысқа тең) жұмысын алады.  $A'$  орнына  $-A$ -ны қойып және де (95.1)-теңдеуді  $Q$ -ға қатысты шешіп,

$$Q = U_2 - U_1 + A \quad (95.2)$$

түрге келтіруге болады.

(95.2) теңдеуі энергияның сақталу заңын өрнектейді, әрі термодинамиканың бірінші заңының (бастамасының) мазмұны болып табылады. Оны сөзбен төмендегіше айтуға болады: *системаға берілген жылу мөлшері системаның ішкі энергиясының өсімішесіне және системаның сыртқы денелерде атқаратын жұмысына жұмсалады.*

Бұл айтылғаннан, жылу берілген кезде эрқашан да системаның ішкі энергиясы артады екен деп түсінуге болмайды. Системаға жылу берілгенмен де оның энергиясы артпай, кемуі мүмкін ( $U_2 < U_1$ ). Бұл жағдайда (95.2) бойынша  $A > Q$  немесе система жұмысты алынған  $Q$  жылу есебінен де, кемуі  $U_1 - U_2$ -ге тең ішкі энергияның қоры есебінен де істеуі мүмкін. Сондай-ақ (95.2) теңдеудегі  $Q$  мен  $A$  шамаларының алгебралық екендігін ескеру керек ( $Q < 0$  системаның жылу алмай, жылуды беретіндігін білдіреді).

(95.2) теңдеуден жылу мөлшерінің жұмыс немесе энергия өлшенетін бірліктермен өлшенетіндігін көруге болады. СИ системасында жылу мөлшерінің бірлігі — джоуль болып табылады.

Жылу мөлшерін өлшеу үшін калория деп аталатын арнаулы бірлік те қолданылады. Бір калория 1 г суды  $19,5^\circ\text{C}$ -тан  $20,5^\circ\text{C}$ -қа дейін қыздыруға керекті жылу мөлшеріне тең. Мың калория үлкен калория немесе килокалория деп аталады.

Тәжірибе арқылы бір калорияның  $4,18$  Дж-ға эквивалентті екендігі анықталған. Демек, бір джоуль  $0,24$  калорияға эквивалентті  $I = 4,18$  Дж/кал шамасы жылудың механикалық эквиваленті деп аталады.

Егер де (95.2)-ге енетін шамалар әр түрлі бірліктер арқылы өрнектелетін болса, онда осы шамалардың кейбіреуін қажетті эквивалентке көбейту керек. Мәселен,  $Q$ -ды калориямен,  $U$  мен  $A$ -ны джоульмен өрнектеп, (95.2) қатысын мына түрде жазуға болады:

$$IQ = U_2 - U_1 + A.$$

Алдағы уақытта біз  $Q$ ,  $A$  және  $U$  шамалары бірдей бірліктермен өрнектелген деп ұйғарып, бірінші бастаманың теңдеуін (95.2) түрінде жазатын боламыз.

Системаның істеген жұмысын немесе системаның алған жылуын есептеген кезде қарастырылып отырған процесті әдетте әрқайсысы системаның параметрлерінің азғантай ғана (шектік жағдайда шексіз аз шамаға) өзгеруіне сәйкес келетін бірнеше жай элементар процестерге бөлуге тура келеді. (95.2) теңдеуі элементар процесс үшін

$$\Delta'Q = \Delta U + \Delta'A \quad (95.3)$$

түрінде жазылады, мұндағы  $\Delta'Q$  — элементар жылу мөлшері,  $\Delta A'$  — элементар жұмыс және  $\Delta U$  — осы элементар процесс кезіндегі системаның ішкі энергиясының өсімшесі.

$\Delta'Q$  және  $\Delta'A$ -ны  $Q$  және  $A$  шамаларының өсімшесі ретінде санауға болмайтындығын ескерген жөн. Бір күйден екінші күйге өтуге сәйкес келетін  $\Sigma \Delta f$  системаның өту жолына тәуелсіз болатын, яғни  $f$  шамасы күй функциясы болатын жағдайда элементар процеске сәйкес келетін қандай да бір шамасын осы шаманың өсімшесі деп қарауға болады. Күй функциясын айтқанда оның әрбір күйдегі «қоры» жайында айтуға болады. Мәселен, әр түрлі күй жағдайларындағы системаның ішкі энергиясының қоры жайында айтуға болады.

Алда көретініміздей, системаның істеген жұмысы мен системаның алған жылу мөлшерінің шамасы системаның бір күйден екінші күйге өту жолына тәуелді болады. Демек,  $Q$  да,  $A$  да күй функциясы емес, сондықтан да системаның әр түрлі күй жағдайларындағы жылуының немесе жұмысының қоры жайлы айтуға болмайды.

Сонымен,  $A$  және  $Q$  шамаларының алдындағы  $\Delta$  символы  $U$  шамасының алдындағы  $\Delta$  символынан басқаша мағына береді. Осы жағдайды баса көрсету үшін, бірінші жағдайдағы  $\Delta$  штрихпен белгіленеді.  $\Delta U$  символы ішкі энергияның өсімшесін білдіреді, ал  $\Delta'Q$  және  $\Delta'A$  символдары жылу мен жұмыстың өсімшесі емес, элементар жылу және элементар жұмыс мөлшерлерін білдіреді.

Есептеулер жүргізу үшін, (95.3) теңдеуді дифференциал түрінде жазады. Сонда бірінші бастаманың теңдеуі төмендегі түрге келеді<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> (95.4) теңдеуіндегі  $dU$  толық дифференциал болып табылады, ал  $d'Q$  және  $d'A$  — толық дифференциалдар емес.

$$d'Q = dU + d'A. \quad (95.4)$$

(95.4) -ті тұтас процесс бойынша интегралдау

$$Q = (U_2 - U_1) + A$$

өрнегіне келтіреді, бұл өрнек (95.2) теңдеуімен теңбе-тең.

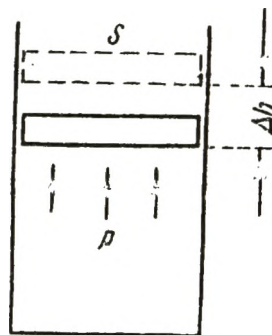
$d'A$  шамасының интегралдау нәтижесін

$$\int_1^2 d'A = A_2 - A_1$$

деп жазуға ешбір болмайтындығын тағы да ескере кетейік. Бұлай деп жазу системаның істеген жұмысы екінші және бірінші күйлердегі жұмыс мәндерінің (яғни қорларының) айырымына тең болатындығын білдірер еді.

### § 96. Көлемі өзгерген кезде дененің істейтін жұмысы

Берілген дененің жанасатын денелермен өз ара әсерін оның сол денелерге түсіретін қысымы арқылы көрсетуге болады. Қысым арқылы газдың ыдыс қабырғаларымен, сондай-ақ қатты немесе сұйық дененің өзін қоршаған ортамен (мәселен, газбен) әрекеттесуін қарастыруға болады. Өз ара әсерлесу күштері түскен нүктелердің орын ауыстыруы дене көлемінің өзгеруімен қосарласа жүреді. Демек, берілген дененің сыртқы денелерге қатысты істелетін жұмысын қысым мен дененің көлемінің өзгерісі арқылы өрнектеуге болады. Осы өрнекті анықтау үшін мына мысалды қарастырайық.



213-сурет.

Тығыз енгізілген, әрі жеңіл қозғалатын поршеньмен жабылған цилиндрлі ыдыстағы газды алайық (213-сурет). Егер қайсыбір себептермен газ ұлғаятын болса, онда ол поршеньнің қозғалысына жұмыс жасайды. Газдың, поршеньді  $\Delta h$  кесіндіге орын ауыстырғанда істейтін элементар жұмысы мынаған тең:



$$\Delta'A = f\Delta h,$$

мұндағы  $f$  — газ тарапынан поршеньге түсірілген күш. Осы күшті газдың  $p$  қысымының поршеньнің  $S$  ауданына көбейтіндісімен алмастырып, мынаны аламыз:

$$\Delta'A = pS\Delta h.$$

Алайда  $S\Delta h$  дегеніміз газ көлемінің өсімшесі  $\Delta V$ . Сондықтан элементар жұмыстың өрнегін төмендегі түрде жазуға болады:

$$\Delta'A = p\Delta V \quad (96.1)$$

(96.1) теңдеудегі  $\Delta'A$  шамасының алгебралық шама болатындығы сөзсіз. Шынында да, газ сығылған кезде  $\Delta h$  орын ауыстырудың және газ тарапынан поршеньге әсер ететін  $f$  күштің бағыты қарама-қарсы болады. Сондықтан  $\Delta'A$  элементар жұмыс теріс таңбалы болады. Бұл жағдайда көлемнің  $\Delta V$  өсімшесі де теріс таңбалы болады. Сөйтіп (96.1) формула газ көлемінің кез келген өзгерістері кезінде жұмыстың дұрыс өрнегін береді.

Егер де газдың қысымы тұрақты болып қалатын болса (олай болу үшін осыған сәйкес температура да өзгеруі тиіс), онда көлемді  $V_1$  мәнінен  $V_2$  мәніне дейін өзгерткен кездегі істелген жұмыс мынаған тең болады:

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (96.2)$$

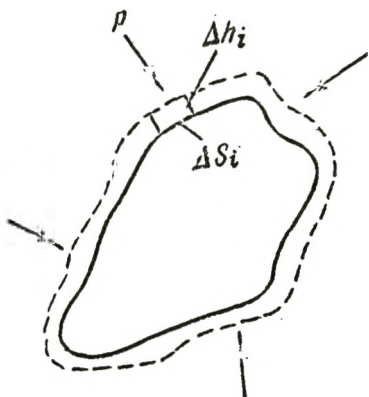
Егер де көлем өзгерген кезде қысым тұрақты болмаса, онда (96.1) формуласы тек  $\Delta V$ -ның өте азғантай жеткілікті аз мәндері үшін ғана орындалады. Бұл жағдайда көлемнің өзгерісінің шекті мәндері үшін істелген жұмысты (96.1) — түріндегі элементар жұмыстардың қосындысы ретінде, яғни интегралдау жолымен есептеуге болады:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (96.3)$$

93-параграфта айтылғаннан, осы алынған формулаларымызды тек тепе-тең процестерге ғана қолдануға болады.

Жоғарыда жұмысқа арналған өрнекті қатты, сұйық және газ тәрізді денелердің көлемдерінің кез келген өз-

герістеріне қолдануға болады. Осы айтылғанның дұрыстығына көз жеткізу үшін, тағы бір мысал қарастырайық. Дененің барлық нүктелеріне бірдей  $p$  қысым түсіретін сұйық немесе газ түріндегі ортаға батырылған кез келген формадағы қатты денені алайық (214-сурет). Дене бетінің әрбір элементар  $\Delta S_i$  учаскелері әр түрлі  $\Delta h_i$  орын ауыстыру алатындай ұлғаяды деп есептейік. Сонда  $i$ -учаске  $p\Delta S_i\Delta h_i$ -қа тең болатын  $\Delta'A_i$  жұмыс істейді. Дененің істейтін жұмысын жеке учаскелердің жұмыстарының қосындысы ретінде табуға болады:

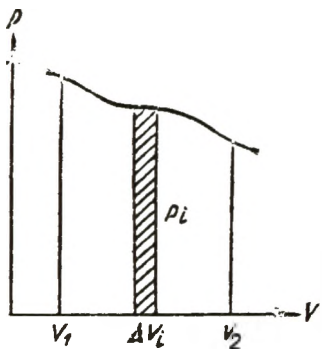


214-сурет.

$$\Delta'A = \sum \Delta'A_i = \sum p \Delta S_i \Delta h_i.$$

Дененің бетінің барлық учаскелері үшін бірдей  $p$  қысымды қосынды белгісінің сыртына шығарып және  $\sum \Delta S_i \Delta h_i$ -тың дене көлемінің  $\Delta V$  өсімшесін беретінін ескеріп,

$$\Delta'A = p\Delta V$$



215-сурет.

деп жаза аламыз, яғни жалпы жағдайда (96.1) формулаға келеміз.

Дененің көлемінің өзгеру процесін  $(p, V)$  диаграммасымен кескіндейік (215-сурет)  $\Delta'A = p_i \Delta V_i$  элементар жұмысқа графиктің штрихталған жолағы сәйкес келеді.  $V$  осімен,  $p=f(V)$  қисығымен және  $V_1$  мен  $V_2$  түзулерімен шектелген ауданның сан

жағынан көлемнің  $V_1$  мәнінен  $V_2$  мәніне дейін өзгерген кезде істелген жұмысқа тең болатындығы айқын.

(96.1) өрнегін пайдаланып (дифференциалдарға өту арқылы), термодинамиканың бірінші бастамасының (95.4) тендеуін төмендегіше жазуға болатындығына назар аударайық:

$$d'Q = dU + pdV \quad (96.4)$$

## § 97. Температура

Температура ұғымының анықтамасына төмендегідей пікірлер арқылы келуге болады. Егер бір-біріне жанасқан бірнеше дене жылулық тепе-тең күйде тұрған болса, яғни жылу беру арқылы энергиямен алмаспаса, онда мұндай денелердің температурасы бірдей болады деп есептейміз. Денелер арасындағы жылу контактісін орнатқан кезде, олардың біреуі жылу берілу арқылы, екіншісіне энергиясын берсе, онда бірінші дененің температурасы екіншісінен жоғары болып есептеледі. Денелердің көлемі, электр кедергісі және т. с. с. бірқатар қасиеттері температураға тәуелді болады. Осы қасиеттердің кез келгенін температураның сандық анықтамасын жасауға пайдалануға болады.

Температураны өлшеуге арналған денені (термометрлік денені) ери бастаған мұзбен жылулық тепе-теңдікке келтіріп, осы жағдайдағы оның температурасын  $0^\circ$  деп алайық та, дененің температурасын өлшеу үшін пайдаланғымыз келіп отырған дене қасиетін (температуралық белгісін) санмен сипаттайық. Дененің осындай белгісі ретінде оның көлемі таңдап алынсын дейік. Оның  $0^\circ$ -тағы мәні  $V_0$  болсын. Бұдан кейін осы денені атмосфералық қысымда қайнап жатқан сумен жылулық тепе-теңдікке келтіріп, оның осы күйдегі температурасын  $100^\circ$ -қа теңестіріп, осыған сәйкес оның  $V_{100}$  көлемін анықтайық. Біздің таңдап алған температуралық белгіміз (қарастырылып отырған мысалда — көлем) температурамен сызықты түрде өзгереді де термометриялық дененің көлемі  $V$  болатын осы күйдің температурасын

$$t^\circ = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} 100^\circ \quad (97.1)$$

деп жазуымызға болады.

Осылайша анықталған температуралық Цельсий шкаласы деп аталатыны белгілі. (97.1)-ге ұқсас қатысты, температураны өлшеуге көлем емес, қандай да бір басқа температуралық белгі алынатын жағдай үшін жазуға болады.

Термометрді осы айтылған тәсілмен градуирлеп, оны температураны өлшеуге пайдалануға болады, ол үшін термометрді температурасын өлшегіміз келіп отырған

денмен жылулық тепе-теңдікке келтіріп, көлемнің өзгерісіне есептеу жүргіземіз.

Табиғаты түрліше термометриялық денелерді (мәселен, сынап пен спирт) немесе әр түрлі температуралық белгілерді (мәселен, көлем мен электр кедергісі) пайдаланатын термометрлерді салыстырған кезде, осы термометрлердің көрсетулері,  $0^\circ$  және  $100^\circ$  болғанда градуирленгендіктен, осы температураларда бірдей болып, ал басқа температуралардағы көрсетулері бірдей болмайтындығы байқалды. Осыдан, температура шкаласын бір мәнді анықтау үшін, градуирлеу тәсілімен қатар, термометриялық дене мен температуралық белгіні де таңдап алу жайында келісіп алу қажет. Келесі параграфта (температураның эмпириялық шкаласы деп аталатын шкаланы тағайындаған кезде осы айтылғандарды қалай таңдау керек екендігі жайлы сөз болады. Термодинамиканың екінші бастамасының негізінде термометриялық дененің қасиетіне тәуелсіз болатын температуралық шкаланы тағайындауға болатындығы жайлы алда сөз болатындығын айта кетейік (130-параграфты қараңыз). Бұл шкала температураның абсолют шкаласы деп аталады.

### § 98. Идеал газ күйінің теңдеуі

Газ массасының күйі үш параметрдің:  $p$  қысымның,  $V$  көлемнің және  $t^\circ$  температураның мәндері арқылы анықталады. Бұл параметрлердің бірінің өзгерісі, қалғандарын өзгертетін заңдылық арқылы байланысқан. Көрсетілген байланыс аналитикалық

$$F(p, V, t^\circ) = 0 \quad (98.1)$$

функциясы түрінде жазылуы мүмкін.

Қандай да бір дененің параметрлерінің арасындағы байланысты беретін қатыс осы дененің күй теңдеуі делінеді. Демек, (98.1) газдың берілген массасының күй теңдеуі болып табылады.

Егер де (98.1) теңдеуді қандай да бір параметрге, мысалы,  $p$ -ға қатысты шешетін болсақ, ондай күй теңдеуі

$$p = f(V, t^\circ) \quad (98.2)$$

түрінде жазылады.

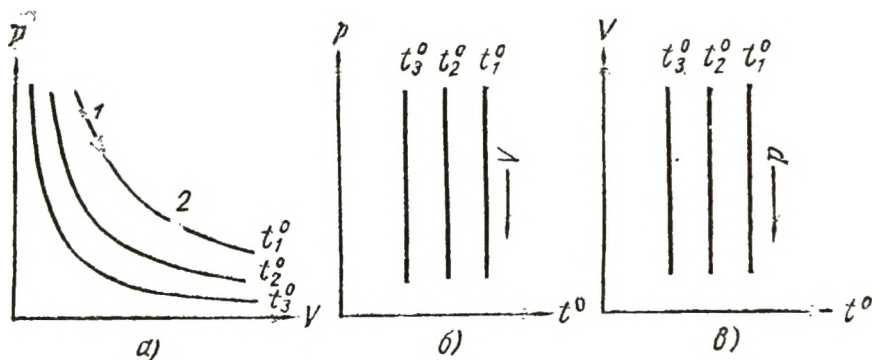
Мектептің физика курсынан Бойль — Мариотт және Гей-Люссак заңдары, параметрлердің бірі тұрақты бол-

ғанда күй теңдеулерін беретіндігі белгілі. Мысалы, Бойль — Марриотт заңы температура тұрақты болғанда газдың берілген массасының қысымы оның көлеміне кері пропорционал өзгертінін көрсетеді. Аналитикалық түрғыда мұны былай жазуға болады:

$$pV = \text{const} \quad (t^\circ = \text{const}). \quad (98.3)$$

Бірдей температураға сәйкес келетін күйлердің жиынтығы ( $p$ ,  $V$ ) диаграммада (98.3) теңдеуімен анықталатын қисықпен, яғни гиперболамен кескінделеді. Температураның әрбір мәніне белгілі қисық сәйкес келеді (216, а-сурет). Бұл қисықтар **и з о т е р м а л а р** («изо» — бірдей, тең) деп аталады.

Тұрақты температура кезінде газдың бір күйден екінші күйге өту процесі **и з о т е р м а л ы қ** процесс деп аталады. Изотермалық процесс кезінде газ күйін кескіндейтін нүкте изотерма бойымен орын ауыстырады.



216-сурет.

( $p$ ,  $t^\circ$ ) немесе ( $V$ ,  $t^\circ$ ) диаграммада изотермалық процесс  $p$  осіне ( $V$  осіне сәйкес) параллель түзу түрінде кескінделеді. Бұл түзулер де изотермалар болады. Үшінші  $V$  параметр ( $p$ -ге сәйкес) стрелкамен көрсетілген бағытта түзуді бойлай орын ауыстырған кезде арта отырып, осы түзудің бойында тұрақты мәнін сақтамайды (216, б және в-суреттер).

Гей-Люссак заңы, тұрақты қысым кезінде газдың берілген массасының көлемі температурамен сызықты тәуелділікте өзгертінін айтады.

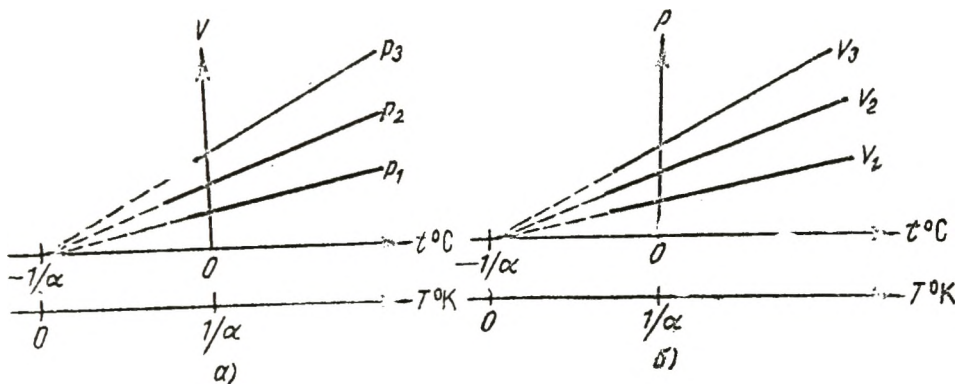
$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (p = \text{const}). \quad (98.4)$$

Тұрақты көлем кезіндегі қысым үшін де осыған ұқсас тәуелділік бар.

$$p = p_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (V = \text{const}). \quad (98.5)$$

Бұл теңдеулердегі  $t^\circ$  — Цельсий шкаласы бойынша алынған температура,  $V_0 - 0^\circ$  кезіндегі көлем,  $p_0 - 0^\circ$  С кезіндегі қысым.  $\alpha$  коэффициенті екі теңдеуде де бірдей болады және мәні  $1/273 \text{ 1/град}^1$  шамасына тең.

Тұрақты қысым кезінде өтетін процесс **изобара**лық деп аталады. Газ үшін бұл процесс ( $V, t^\circ$ ) диаграммада (98.4) түзуімен беріледі (217. а-сурет; әрбір қысық қысымның әр түрлі мәніне сәйкес келеді). Бұл түзу **изобара** деп аталады. ( $p, t^\circ$ ) немесе ( $p, V$ ) диаграммасында **изобара**  $t^\circ$  осіне параллель немесе  $V$  осіне сәйкес түзу түрінде болады.



217-сурет.

Тұрақты көлем кезінде өтетін процесс **изохоралық** деп аталады. ( $p, t^\circ$ ) диаграммасында **изохоралар** 217, б-суреттегідей түрде болады.

(98.4) және (98.5) өрнектерінен шығатынындай, барлық **изобаралар мен изохоралар**  $t^\circ$  осін

$$1 + \alpha t^\circ = 0$$

шартынан анықталатын бір ғана нүктеде кесіп өтеді, бұдан

$$t^\circ = -\frac{1}{\alpha} = -273,15^\circ\text{C}.$$

Температураның бастапқы санақ нүктесін осы нүктеге ауыстырып, температураның Цельсий шкаласымен **абсолют** (немесе **Кельвин шкаласы**)<sup>2</sup> деп аталатын басқа температуралық шкалаға өтеміз. Ілгеріде абсолют тем-

<sup>1</sup> Дәлірек алсақ,  $1/273,15 \text{ град}^{-1}$

<sup>2</sup> Бұл шкаланың градусы осыған сәйкес  $^\circ\text{K}$  болып белгіленеді.

ператураның (яғни абсолют шкала бойынша өлшенген температураның) терең физикалық мағынасының барлығын көреміз.

Абсолюттік шкаланы анықтауымызға сәйкес, абсолют температура (бұл температураны біз  $T$  әрпімен белгілейміз) мен Цельсий бойынша анықталған  $t^\circ$  температураның арасында мынадай қатынас болады:

$$T = t^\circ + \frac{1}{\alpha} = t^\circ + 273,15. \quad (98.6)$$

Мысалы,  $0^\circ \text{C}$ -қа  $273,15 \text{ K}$  сәйкес келеді.  $0^\circ \text{K}$ -қа тең температура абсолют ноль деп аталады, оған  $-273,15^\circ \text{C}$  мәні сәйкес келеді.

(98.4) және (98.5) теңдеулерде Цельсий бойынша температурадан абсолют температураға өтейік. Бұл үшін, (98.6) теңдеуі бойынша  $t^\circ$ -нің орнына  $T - 1/\alpha$ -ны қою керек.

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ) = V_0 \left[ 1 + \alpha \left( T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = \alpha V_0 T \quad (98.7)$$

және осыған ұқсас:

$$p = \alpha p_0 T \quad (98.8)$$

Осы теңдеулерден

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (p = \text{const}), \quad (98.9)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (V = \text{const}) \quad (98.10)$$

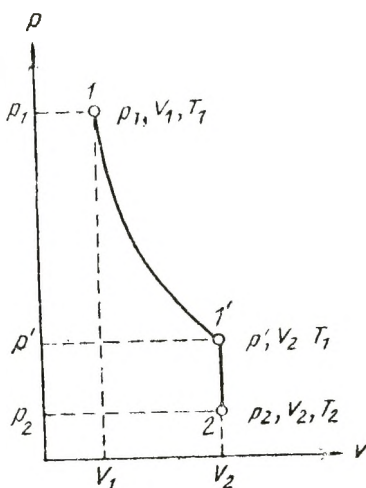
екендігі шығады, мұндағы 1 және 2 индекстері бір ғана изобарамен [(98.9) болған жағдайда] немесе бір ғана изохорамен [(98.10) болған жағдайда] анықталатын кездейсоқ алынған күйлерге сәйкес келеді.

Бойль — Мариоттың және Гей-Люссактың заңдары жуықталып алынған заңдар болып табылады. Нақты газдың тығыздығы неғұрлым аз болған сайын, яғни неғұрлым көлемі үлкен болған сайын (98.3), (98.9) және (98.10) теңдеулеріне дәлірек бағынады. (98.3) бойынша қысым азайған сайын көлем артады, ал (98.9) бойынша температураның жоғарылауымен көлем артады. Демек, Бойль — Мариотт және Гей-Люссак заңдары орындалуы үшін температураның онша төмендемей, қысымның онша жоғарыламай тұрған кезінде орын алады.

(98.3), (98.9) және (98.10) теңдеулеріне дәл бағына-

тын газ идеал газ деп аталады. Идеал газ дегеніміз абстракция болып табылады. Кез келген нақты газдың тығыздығы азайған сайын оның қасиеттері идеал газға жақындай түседі. Ауа, азот, оттегі секілді кейбір газдар бөлме температурасында және атмосфералық қысым кезінде идеал газға өте жақын болады. Әсіресе, гелий мен сутегі газдары өздерінің қасиеттері бойынша идеал газға таяу.

Бойль—Мариоттың және Гей-Люссактың теңдеулерін біріктіріп, идеал газдың күй теңдеуін табуға болады. Бұл үшін  $(p, V)$  диаграммдан параметрлердің  $p_1 V_1 T_1$  және  $p_2 V_2 T_2$  мәндерімен анықталатын кез келген екі күй аламыз (218-сурет).  $1-1'$  изотерма мен  $1'-2$  изохорадан тұратын  $1$ -ден  $2$ -ге өту процесін қарастырайық.  $1'$  күйінің температурасының  $1$  күйінің температурасына, ал  $1$  күйінің көлемінің  $2$  күйінің көлеміне тең екендігі анық.



218-сурет.

Жалпы алғанда,  $p'$  қысымы  $p_1$  және  $p_2$  қысымдарынан өзгеше.

$1$  және  $1'$  күйлері бір изотерманың бойында жатыр. Сондықтан (98.3)-ке сәйкес былай болады:

$$p_1 V_1 = p' V_2.$$

$1$  және  $2$  күйлері бір изохорада жатыр. Демек, (98.10) бойынша

$$\frac{p'}{p^2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Осы теңдеулерден  $p'$ -ті шығарып тастасақ, онда

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

теңдігін аламыз.

$1$  және  $2$  күйлері қалауымызша алынғандықтан, кез келген күй үшін

$$\frac{pV}{T} = B \quad (98.11)$$

болады деп тұжырымдауға болады, мұндағы  $B$  — газдың белгілі массасы үшін тұрақты шама.



Авогадроның заңы бойынша бірдей жағдайларда (яғни бірдей температура мен қысымда) барлық газдардың килограмм-молекулаларының көлемі бірдей болады. Атап айтқанда, қалыпты деп аталатын жағдайларда, яғни температурасы  $0^\circ \text{C}$ , ал қысымы  $1 \text{ атм}$  кезінде кез келген газдың киломоляның көлемі  $22,4 \text{ м}^3/\text{кмоль}^1$  болады. Осыдан, газ массасы бір киломоль болған кезде (98.11)-дегі  $V$  шамасының барлық газдар үшін бірдей болатындығы шығады. Бір киломоляға сәйкес келетін  $V$  шамасын  $R$  деп, киломоляның көлемін  $V_{\text{км}}$  деп белгілеп (98.11) теңдеуін мына түрде жаза аламыз:

$$\frac{pV_{\text{км}}}{T} = R. \quad (98.12)$$

Бұл теңдеу Клапейрон теңдеуі деп аталады. Ол идеал газдың киломоляның параметрлерінің арасындағы байланысты береді, демек, идеал газдың күй теңдеуі болып табылады. Ол негізінен мына түрде жазылады:

$$pV_{\text{км}} = RT \quad (98.13)$$

$R$  шамасы газдың универсаль тұрақтысы деп аталады. Оның мәнін Авогадро заңының негізінде есептеп шығаруға болады, ол үшін (98.12)-ге  $p$ -нің  $1,01 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$  ( $1 \text{ атм}$ )-ға  $V_{\text{км}}$ -нің  $22,4 \text{ м}^3/\text{кмоль}$ -ға және  $T$ -нің  $273^\circ \text{K}$ -қа тең болатын мәндерін қою керек:

$$R = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,4}{273} \frac{(\text{н/м}^2) \cdot \text{м}^3}{\text{град} \cdot \text{кмоль}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{дж}}{\text{град} \cdot \text{кмоль}}.$$

Газдың бір моляның қалыпты жағдайлардағы көлемі  $22,4 \text{ л/моль}$ . Газдың киломоляны мольге, джоульден эргпен калорияға өте отырып, газдың универсаль тұрақтысының төмендегі мәндерін оңай анықтауға болады:

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{град} \cdot \text{моль}} = 1,99 \frac{\text{кал}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

Қейде  $R$  мәнін литр атмосфера бөлінген градус және моль түрінде де анықтайды:

<sup>1</sup> Қалыпты жағдайларда  $1 \text{ м}^3$  көлемде

$$L = \frac{6,06 \cdot 10^{26}}{22,4} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ молекула,}$$

ал  $1 \text{ см}^3$  көлемде  $L' = 2,68 \cdot 10^{19}$  молекула болатындығын ескертейік.

$L$  (немесе  $L'$ ) саны Лошмидт саны деп аталады.

$$R = \frac{1 \text{ ат.м.} \cdot 22,4 \text{ л/моль}}{273 \text{ град}} = 0,0820 \frac{\text{л} \cdot \text{атм}}{\text{град} \cdot \text{моль}}$$

Газдың бір киломоли үшін жазылған тендеуден газдың кез келген  $m$  массасы үшін жазылған тендеуге жеңіл өтуге болады, ол үшін бірдей қысым мен температурадағы газдың  $z$  киломолинің көлемі бір киломольдің көлемінен  $z$  есе артық болатындығын ескеру керек:

$V = zV_{\text{км}}$  (98.13) тендеуін  $z = m/\mu$  шамасына көбейтіп ( $m$  — газдың массасы,  $\mu$  — киломольдің массасы) және  $zV_{\text{км}}$  көбейтіндісін  $V$ -мен ауыстырып, мына тендеуді аламыз:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (98.14)$$

Бұл газдың кез келген  $m$  массасы үшін жазылған идеал газдың күй тендеуі. Бұл тендеуден (98.3), (98.9) және (98.10) тендеулерін жеңіл шығарып алуға болады.

Идеал газдың температурасы оның басқа параметрлерінің арасындағы қарапайым байланыс оны термометриялық зат есебінде пайдалануға итермелейді. Көлемнің тұрақтылығын қамтамасыз етіп және температуралық белгі ретінде газ қысымын пайдаланып, идеал сызықтық температуралық шкаласы бар термометр аламыз. Бұдан әрі бұл шкаланы температураның идеал газ шкаласы деп атайтын боламыз.

Халықаралық келісім бойынша, термометриялық дене ретінде сутегі алынады. (98.14) тендеуді пайдаланып, сутегі бойынша анықталған шкала температураның эмпирикалық шкаласы деп аталады.

## XII ТАРАУ

### ГАЗДАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТАР КИНЕТИКАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫ

Молекула-кинетикалық теория заттың ең қарапайым газ түріндегі күйін түсіндіруде зор табыстарға жетті. Кинетикалық теория, тіптен өзінің элементар, жеңілдетілген түрінде де газ күйіндегі заттың негізгі қасиеттерін және газда болып өтетін құбылыстарды сапа жағынан ғана емес, сандық жағынан да (бірге жуық сандық коэффициентке көбейтуге дейінгі дәлдікпен) түсіндіре алады.

Біздің алға қойғалы отырған бірінші мақсатымыз газдың ыдыс қабырғаларына түсіретін қысымын есептеп шығару болып табылады. Бұл мәселені шешу абсолют температураның физикалық табиғатын түсінуге де көмектеседі.

#### § 99. Газдардың кинетикалық теориясының қысым үшін теңдеуі

Газдың ең қарапайым молекула-кинетикалық моделі төмендегідей болады. Газ дегеніміз бірдей, хаосты қозғалыстағы, өз ара жанасқанша бір-бірімен әрекеттеспейтін молекулалардың жиынтығы. Молекулалардың мөлшерлері өте аз, сондықтан да олардың қорытқы көлемін, ыдыстың көлемімен салыстырғанда, ескермеуге болады. Молекулалардың әрқайсысы кейде бір-біріне немесе ыдыстың қабырғасына серпінді соқтыққаны болмаса, уақытының басым көпшілігін еркін қозғалыста өткізеді.

Бұл айтылып отырған моделіміз идеал газдың моделі. Нақты газдардың молекулаларының шектік өл-

шемдері бар және олар бір-бірінсі өз ара алыстаған кезде тез әлсірейтін күшпен әрекеттесіп отырады. Бірақ тығыздық азайған сайын молекулалардың меншікті көлемі газдың алып тұрған көлемінен азая түседі, ал молекулалардың орташа қашықтықтарының ұлғаятыны соншалықты, олардың арасындағы өз ара әрекеттесу күштерін ескермеуге де болады. Демек, кез келген газ идеал газға жақын болатын жағдайда жоғарыда сипатталған моделдің негізіндегі біздің ойларымыз дұрыс болады екен.

Молекула ыдыстың қабырғасына соққан кезде, ол оған сан мәні өз импульсының өзгерісіне тең импульс береді. Қабырға бетінің әрбір  $\Delta S$  элементіне көп мөлшерде молекулалар үздіксіз соғылады да, осының арқасында ол  $\Delta t$  уақытта  $\Delta S$ -ке нормаль бойынша бағытталған қорытқы  $\Delta K$  импульс алады. Механикадан білетініміздей,  $\Delta K$ -ның  $\Delta t$ -ге қатынасы  $\Delta S$ -ке әсер ететін күшті, ал осы күштің  $\Delta S$ -ке қатынасы  $p$  қысымды береді.

Молекулалар ретсіз, хаосты қозғалады; қозғалыс бағыттарының ықтималдығы бірдей, олардың қайсысының да басқаларынан ешбір артықшылығы жоқ. Бұлай дейтін себебіміз ыдыстың қабырғасына түсірілген қысым барлық жерлерде де бірдей болады. Егер қайсыбір бағытта молекулалар қозғалысы басым болса, онда ыдыс қабырғасының осы учаскесіне түсірілген қысым да артық болар еді.

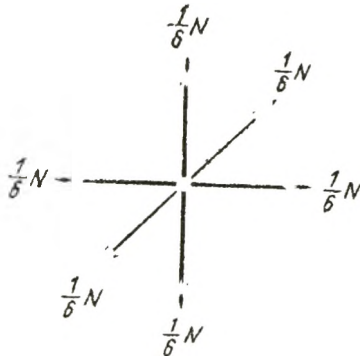
Молекулалардың жылдамдықтарының шамалары әртүрлі бола алады. Сонымен қатар, әрбір соқтығыстан<sup>1</sup> кейін молекуланың жылдамдығы өзгеріп отыруы тиіс, әрі жылдамдықтың өсу немесе азаю мүмкіншіліктері де бірдей болады. Бұл екі молекуланың кинетикалық энергияларының қосындысының соқтығысқанға дейін де, соқтығысқаннан кейін де бірдей болуы тиіс екендігінен шығады. Демек, бір молекуланың жылдамдығы артқан кезде, екінші молекуланың жылдамдығы кемиді.

Қойылған мәселенің шешуін оңайлату үшін біз молекулалардың қозғалысына қатысты кейбір жеңілдететін шарттарды енгіземіз. Біріншіден, молекулаларды өз ара перпендикуляр үш бағытта қозғалады деп есептейміз. Егер газдың  $N$  молекуласы болса, онда уақыттың кез

---

<sup>1</sup> Массалары бірдей екі шардың серпімді центрлік соқтығысуы кезінде, шарлардың энергия алмасатындығын ескерте кетейік.

келген мезгілінде әрбір бағытпен  $N/3$  молекула, ал олардың бірінші жартысы (яғни,  $N/6$  молекула) берілген



219-сурет.

бағытпен бір жаққа, ал екінші жартысы — екінші жаққа қозғалады (219-сурет). Осындай ұйғарымға сүйене отырып, біз қарастырғалы отырған бағытта (мәселен,  $\Delta S$  қабырғаның берілген элементіне нормаль бойымен) молекулалардың  $1/6$  бөлігі қозғалады деп есептейміз.

Екіншіден, барлық молекулалардың  $v$  жылдамдықтарының мәндерін бірдей деп аламыз.

Келесі параграфта көрсететініміздей, алғашқы шарт қысымды есептеудің ақырғы нәтижесіне әсер етпейді; екінші шартты қарастырмаудың қандай нәтижеге әкеп соғатынын осы параграфта баяндаймыз.

Ыдыстың қабырғасына соққан молекуланың оған беретін импульсын есептеп шығарайық. Қабырғаға соқтыққанға дейінгі молекуланың импульсы сыртқы нормаль бойымен  $\Delta S$ -ке қарай бағытталған және  $mv$ -ге тең болады. Соқтығыстан кейін молекуланың импульс таңбасы өзгереді. Сөйтіп, молекула импульсының өсімшесі мынаған тең болады:

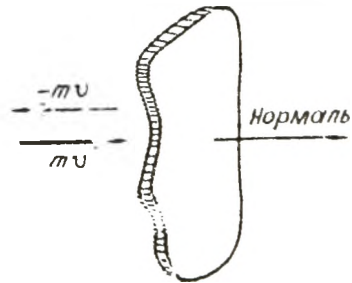
$$(-mv) - (mv) = -2mv. \quad (99.1)$$

Ньютонның үшінші заңы бойынша, қабырға соқтығысу кезінде нормаль бойымен бағытталған  $2mv$  импульс алады.

$\Delta t$  уақытта қабырғаның  $\Delta S$  элементіне дейін осы бағытта қозғалып келе жатқан (табаны  $\Delta S$ , биіктігі  $v\Delta t$  цилиндрдің ішіндегі) барлық молекулалар келіп жетеді (221-сурет). Бұл молекулалардың саны мынаған тең болады:

$$\Delta N = \frac{1}{6} nv \Delta S \Delta t, \quad (99.2)$$

мұндағы  $n$  — бірлік көлемдегі молекулалар саны. Шынында молекулалардың бір бөлігі қабырғаға жетем де-



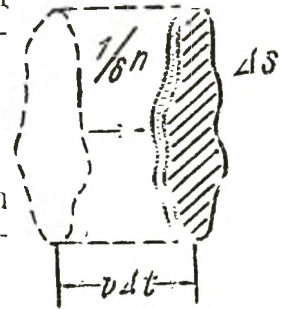
220-сурет.

генше басқа молекулалармен соқтығысып, өзінің бағытын өзгертеді де  $\Delta S$ -ке жете алмайды деген қарсы пікір айтуға да болады. Алайда соқтығысулар молекулалардың хаосты қозғалысының сипатын өзгерте алмайды: қабырғаға қарай беттеген молекулалар тобының кейбіреулерінің басқа бағыттарда қозғалатын молекулалар тобына өтуі, дәл сол шамалы молекулалардың басқа топтарынан, қабырғаға қарай беттеген молекулалар тобына өтуімен қатар жүреді. Сондықтан қабырғаға келіп жететін молекулалардың санын есептеген кезде молекулалардың бір-бірімен соқтығысуларын ескермеуге болады. (99.2) бойынша бірлік уақыттың ішінде  $\Delta S$  ауданға келіп соғатын молекулалар саны мынаған тең болады:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} n v \Delta S,$$

ал бір секунд ішінде бірлік ауданға ( $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ ) келіп соқтығатын молекулалар саны

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n v. \quad (99.3)$$



221-сурет.

(99.2)-дегі соқтығысулар санын әрбір соқтығысудан қабырғаға берілетін (99.1)-дегі импульсқа көбейтіп,  $\Delta t$  уақытта қабырғаның  $\Delta S$  элементіне берілетін қосынды  $\Delta K$  импульсты анықтаймыз.

$$\Delta K = 2 m v \frac{1}{6} n v \Delta S \Delta t = \frac{1}{3} n m v^2 \Delta S \Delta t.$$

$\Delta K$  импульстың  $\Delta t$  уақытқа қатынасын алып,  $\Delta S$ -ке әсер етуші күшті табамыз. Ақыры, табылған күштің  $\Delta S$  ауданға қатынасын алып, ыдыстың қабырғасына түсірілген газдың қысымын табамыз. Демек,

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} n m v^2. \quad (99.4)$$

$\epsilon = m v^2 / 2$  шамасының молекуланың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясы екенін ескере отырып, қысымның өрнегін төмендегідей түрге келтіруге болады:

$$p = \frac{2}{3} n \epsilon. \quad (99.5)$$

Табылған формулаларға талдау жасалмастан бұрын, барлық молекулалардың жылдамдығы бірдей болады деген ұйғарымымыздың осы формулалардың жазылу түріне қандай әсерін тигізетіндігін қарастырайық.

Молекулалардың жылдамдықтары әр түрлі болсын делік, сонымен бірге, бірлік көлемдегі  $n$  молекуладан  $n_1$  молекуланың жылдамдығы  $v_1$ ,  $n_2$  молекуланың жылдамдығы  $v_2$  және жалпылай алғанда  $n_i$  молекуланың жылдамдығы  $v_i$  болсын. Онда

$$n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots = \sum n_i = n$$

болатындығы анық.

Молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуын біле отырып, молекулалардың орташа жылдамдығын анықтауға болады. Бұл үшін барлық  $n$  молекулалардың жылдамдықтарын қосып, алынған шаманы  $n$ -ге бөлу керек:

$$\bar{v} = \frac{\overbrace{v_1 + v_1 + \dots + v_1}^{n_1} + \overbrace{v_2 + v_2 + \dots + v_2}^{n_2} + \dots + \overbrace{v_i + v_i + \dots + v_i}^{n_i} + \dots}{n}$$

Бұл жерде біз  $v_1$ -ді  $n_1$  рет;  $v_2$ -ні  $n_2$  рет және т. с. с. рет алуымыз керек. Демек,  $\bar{v}$  шамасын

$$\bar{v} = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_i v_i + \dots}{n} = \frac{1}{n} \sum n_i v_i \quad (99.6)$$

түрінде жазуға болады.

Дәл осындай есептеулерді молекулалардың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясы  $\varepsilon$  үшін жүргізіп, оның орташа мәні үшін мынадай өрнекке келеміз.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum n_i \varepsilon_i \quad (99.7)$$

мұндағы  $n_i$  энергиясы  $\varepsilon_i$  жүзінде  $\varepsilon_i$ -ға тең болатын молекулалардың саны.

(99.7) бойынша, бірлік көлемдегі молекулалардың қосынды кинетикалық энергиясы  $\bar{\varepsilon}$ -ға, яғни бірлік көлемдегі молекулалар саны мен жеке молекуланың орташа энергиясының көбейтіндісіне тең, сонымен бірге бұл нәтиже молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуының нақты түріне тәуелсіз болады.

Молекулаларды жылдамдықтар бойынша қайсыбір заңдылықпен таралған деп есептеп, молекулалардың ыдыстың қабырғасына соқтығысу санын анықтайық.

Жылдамдық мәні  $v_i$  болатын молекулалардың ішінде кез келген бағытта қозғалып жүрген молекулалар бар. Сондықтан, жеңілдік үшін, қабырғаның  $\Delta S$  элементіне қарай осы молекулалардың  $1/6$  бөлігі бағытталады деп есептеуге болады. Демек, жылдамдықтарының шамасы  $v_i$  болатын молекулалардың ішінен  $\Delta t$  уақытта  $\Delta S$  элементке

$$\Delta N_i = \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t \quad (99.8)$$

молекула келіп жетеді.

Ал кез келген жылдамдықтағы молекулалардың толық соқтығысу саны

$$\Delta N = \sum_i \Delta N_i = \frac{1}{6} \Delta S \Delta t \sum_i n_i v_i.$$

(99.6)-ға сәйкес  $\sum n_i v_i$  шамасын  $n\bar{v}$ -мен алмастырып, бірлік уақытта бірлік ауданға соқтығысу санының төмендегідей өрнегін аламыз:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} \quad (99.9)$$

Бұл өрнектің бұдан бұрын алынған (99.3)-өрнектен айырмашылығы сол, мұнда барлық молекулалар үшін бірдей болатын  $v$  жылдамдықтың орнына молекулалардың орташа  $\bar{v}$  жылдамдығы кіреді.

$\Delta N_i$  молекулалардың әрқайсысы [(99.8)-ді қарандар] қабырғаға соққан кезде оған  $2mv_i$  импульс беріледі.  $\Delta S$  элементіне  $\Delta t$  уақытта барлық жылдамдықтардағы молекулалардың беретін қорытқы импульсы

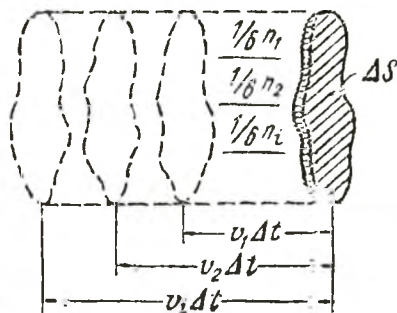
$$\Delta K = \sum_i 2mv_i \Delta N_i = \sum_i 2mv_i \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t.$$

Қысымды анықтау үшін  $\Delta K$ -ны  $\Delta S$  пен  $\Delta t$ -ге бөлу керек:

<sup>1</sup> Бұл формула жуықталған формула болып табылады. Дәлірек есептеулер (келесі параграфты қараңыз)

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

формуласын береді.



222-сурет.



$$p = \frac{2}{3} \sum_i n_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{2}{3} \sum_i n_i \varepsilon_i,$$

мұндағы  $\varepsilon_i = mv_i^2 / 2$  — жылдамдығы  $v_i$  молекуланың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясы.

(99.7) бойынша  $\sum n_i \varepsilon_i$  шамасын  $n \bar{\varepsilon}$  көбейтіндісімен алмастырып, мынаны аламыз:

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2} \quad (99.10)$$

Бұл өрнектің бұдан бұрын анықталған (99.5) өрнектен айырмашылығы мұнда барлық молекулаларға ортақ  $\varepsilon$  энергияның орнына орташа  $\bar{\varepsilon}$  энергия кіреді.

(99.10)-тендеу газдардың кинетикалық теориясының негізгі тендеуі болып табылады. Бұл тендеу бойынша қысым бірлік көлемдегі молекулалардың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясының үштен екісіне тең болады.

(99.10) тендеуінен  $n$  тұрақты болғанда (яғни газ массасының көлемі өзгермеген кезде), қысымның молекуланың  $\varepsilon$  ілгерілемелі қозғалысының орташа кинетикалық энергиясына пропорционал болатындығы шығады. Сонымен қатар, өткен параграфта көргеніміздей, идеал газ шкаласында  $T$  температура тұрақты көлем кезіндегі идеал газдың қысымына пропорционал шама ретінде анықталады. Осыдан  $T$  температураның  $\bar{\varepsilon}$  шамасына пропорционал болатындығы шығады. Абсолют температура  $T$  мен  $\bar{\varepsilon}$ -ның арасындағы пропорционалдық коэффициентті анықтау үшін, (99.10) тендеуді идеал газ күйінің (98.13) тендеуімен салыстырайық. Ол үшін (99.10) тендеуді киломольдің көлемі  $V_{\text{км}}$ -ге көбейтейік:

$$pV_{\text{км}} = \frac{2}{3} (nV_{\text{км}}) \bar{\varepsilon}.$$

Бірлік көлемдегі молекулалар санының бір киломольдің көлеміне көбейтіндісі Авогадро санына тең болатындығын ескере отырып, соңғы тендеуді мына түрде жазуға болады:

$$pV_{\text{км}} = \frac{2}{3} N_A \bar{\varepsilon}.$$

Осы тендеуді идеал газ күйінің бір киломоль үшін жазылған  $pV_{\text{км}} = RT$  тендеуімен салыстырып,

$$\frac{2}{3} N_A \bar{\varepsilon} = RT$$

екендігін байқаймыз, осыдан

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT \quad (99.11)$$

болады, мұнда  $k$  арқылы Больцман тұрақтысы деп аталатын  $\frac{R}{N_A}$  шамасы белгіленген. Оның мәні мынаған тең:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \cdot 10^3}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{дж}}{\text{град}} = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}}$$

Сөйтіп, біз аса маңызды қорытындыға келіп тірелдік: абсолют температура дегеніміз жеке молекуланың қозғалысының орташа энергиясына пропорционал шама. Бұл қорытынды тек газдар үшін ғана емес, кез келген күйдегі зат үшін де орындалады.

(99.11) өрнегінің тағы бір тамаша әсері, орташа энергия  $\varepsilon$  тек температураға ғана тәуелді, ал молекуланың массасына тәуелсіз.

Идеал газ күйінің теңдеуіндегі  $R$ -ді  $N_A k$  арқылы алмастырып және  $N_A \cdot V_{\text{км}}$  екенін ескеріп, өте маңызды формуланы аламыз:

$$p = nkT \quad (99.12)$$

Егер де бірнеше газдардың қоспасын алсақ, онда массалары әр түрлі газдардың молекулаларының орташа жылдамдығы әр түрлі болады, бірақ молекулалардың орташа энергиясы бірдей болады. Бұл жағдайдағы қысым мынаған тең болады:

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + \dots) kT \quad (99.13)$$

мұндағы  $n_1$ ,  $n_2$  және т. с. с. бірлік көлемдегі молекулалардың бірінші, екінші және т. с. с. сорттарының санын білдіреді. (99.13) өрнекті

$$p = n_1 kT + n_2 kT + \dots$$

түрінде жазуға болады. Бірақ,  $n_1 kT$  — ыдыста молекулалардың тек бірінші сорты ғана болған жағдайдағы  $p_1$  қысымы, ал ыдыста тек екінші сорттық молекулалары болған жағдайда  $n_2 kT$  — сол газдың  $p_2$  қысымы, және т. с. с. Қоспаға кіретін молекулалардың қайсыбір сортының дәл сол қоспадағыдай мөлшерде ыдыста жалғыз өздері қалған кездегі қысымы, газ қоспасының сол

компонентінің парциал қысымы деп аталады. Парциал қысымды пайдаланып, (99.13)-ке сүйеніп,

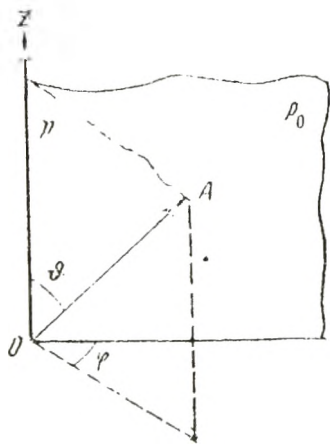
$$p = p_1 + p_2 + \dots = \sum p_i \quad (99.14)$$

деп жаза аламыз.

Сөйтіп, біз *идеал газ қоспасының қысымы, сол қоспаны құрайтын газдардың парциал қысымдарының қосындысына тең* деп айтылатын *Дальтон заңына* келдік.

### § 100. Молекулалардың жылдамдықтарының әр түрлі бағыттар бойынша таралуын дәлірек есептеу

Бұл параграфта біз, молекулаларды тек өз ара перпендикуляр үш бағытта ғана қозғалады деп есептейтіп жеңілдетуші шартты пайдаланбай-ақ, молекулалардың



223-сурет.

ыдыстың қабырғасына соқтығысу санына дәл есептеулер жүргіземіз. Сонымен қатар, аталған жеңілдетуші шарттың өткен параграфта қысымға арналған (99.4) өрнегіне әсерін тигізбейтінін де көрсетелік.

Қеңістіктің кез келген бағытын қандай да бір  $O$  нүктесінен бастап бағыттала салынған  $OA$  кесіндісімен (223-сурет) беруге болады.  $O$  нүктесі арқылы  $Z$  осін және осы ось арқылы өтетін  $P$  жазықтығын жүргіземіз.  $OA$  бағыты жатқан,  $OZ$  осі арқылы өтетін  $P$  жазықтығы санақ басы ретінде алынған  $P_0$  жазықтығымен  $\varphi$  бұрышын жасайды.  $OA$  бағыты  $OZ$  осімен  $\theta$  бұрыш жасайды.  $\theta$  және  $\varphi$  бұрыштарының берілуі  $OA$  бағытын толық анықтайтындығы сөзсіз. Әр түрлі бағыттар үшін  $\varphi$  бұрыш  $0$ -ден  $2\pi$ -ге дейін, ал  $\theta$  бұрышы —  $0$ -ден  $\pi$ -ге дейін өзгереді.

Сөйтіп, газ молекулаларының қозғалыс бағытын, әрбір молекула үшін қандай да бір белгіленген  $OZ$  бағыт (мұндай бағыт үшін, мәселен, ауданшаның нормалының бағытын алуға болады) пен сол арқылы жүргізілген  $P_0$  жазықтығынан бастап саналатын  $\theta$  және  $\varphi$  бұрыштарының мәндерін беру арқылы сипаттауға болады екен.

Алайда басқадай көрнектірек тәсілді де қолдануға

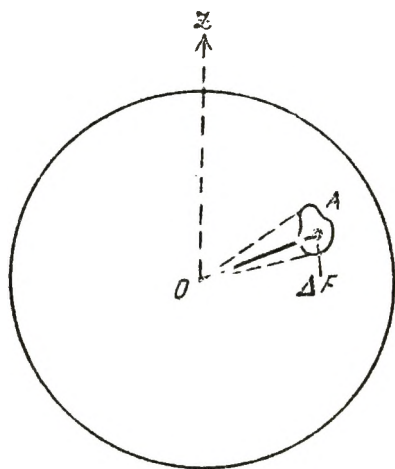
болады.  $O$  нүктесін  $R$  радиусы қалауымызша алынған сферамен қоршайық (224-сурет) Осы сферадағы кез келген  $A$  нүктесі  $O$ -дан  $A$ -ға қарай бағытты анықтайтын болады. Демек, газ молекулаларының қозғалыс бағыттарын сфера бетіндегі нүктелер арқылы да беруге болады екен.

Барлық бағыттағы тең ықтималдылық молекулалардың қозғалыс бағытын кескіндейтін нүктелердің сфера бойынша қарастырылатын молекулалардың  $N$  санын сфераның бетіне бөлгенге тең болатын, тұрақты тығыздықпен таралатындығын көрсетеді, яғни

$$\rho = \frac{N}{4\pi R^2}. \quad (100.1)$$

Соқтығысулар молекулалардың қозғалыс бағыттарын өзгертеді, осының әсерінен сфераның бетіндегі  $N$  нүктелердің орны да үздіксіз өзгерісте болады. Алайда қозғалыс хаосты болғандықтан, нүктелердің тығыздығы барлық уақытта өзгеріссіз қалады.

Көріп отырғанымыздай, кеңістіктегі мүмкін бағыттардың саны шексіз көп. Әрбір уақыт мезетінде, қарастырылып отырған молекулалардың  $N$  санына тең шектеулі бағыттар ғана іске асырылады. Бұдан, белгілі бағыттағы (сферада  $A$  нүктесімен өрнектелетін немесе  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарының мәндерімен анықталатын) молекулалар саны жайлы мәселені қоюдың ешқандай мағынасының болмайтындығы шығады. Шынында да, мүмкін болатын бағыттар саны шектеусіз, ал молекулалар саны шектеулі болғандықтан, белгілі бағытта бір молекуланың болса да ұшып шығуы жайындағы ықтималдығы нольге тең болады.



224-сурет.

Мәселені  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарымен анықталатын бағытқа іргелес бағыттарда қанша молекула қозғалады деп қойған әлдеқайда дұрысырақ болады. Мұндай бағыттарға  $A$  нүктесінің төңірегінде алынған сфера бетінің  $\Delta F$  элементіне келетін нүктелер сәйкес келеді (224-сурет). Молекулалардың қозғалыс бағыттарын кескіндей-

тін нүктелер сфера бетінде біркелкі таралғандықтан  $\Delta F$  шегіндегі нүктелер саны мынаған тең болады:

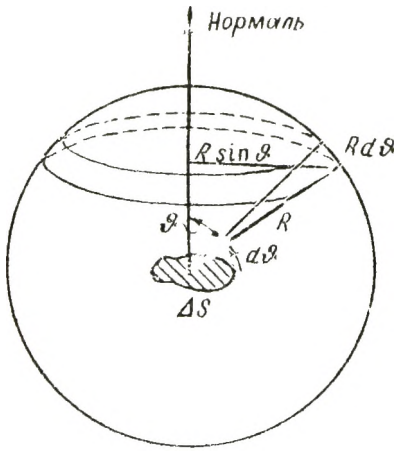
$$\Delta N_{\vartheta, \varphi} = \rho \Delta F = N \frac{\Delta F}{4\pi R^2}. \quad (100.2)$$

$\Delta N$  болғандағы  $\vartheta$  және  $\varphi$  индекстері қозғалыс бағыттары  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарымен анықталатын бағыттарға жақын қозғалыс бағыттары жайлы сөз болып отырғанын көрсетеді.  $\Delta F$  арқылы өтетін бағыттарды қамтитын  $\Delta\Omega = \Delta F/R^2$  денелік бұрышын енгізіп, (100.2)-өрнекті

$$\Delta N_{\vartheta, \varphi} = N \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \quad (100.3)$$

түрінде жазуға болады.

Молекулалардың қабырғамен соқтығысу шарттары (атап айтқанда, соқтығысу кезінде қабырғаға берілетін импульс) молекулалардың



225-сурет.

қозғалыс бағыты мен қабырғаның  $\Delta S$  элементіне қарай жүргізген нормальдың арасындағы  $\vartheta$  бұрышына ғана тәуелді, ал  $\varphi$  бұрышына тәуелсіз болады. Бірлік көлемдегі  $n$  молекуланың қаншасының (оны  $dn_{\vartheta}$  деп белгілейміз)  $\vartheta$ -ден  $\vartheta + d\vartheta$ -ге дейін аралықта жатқан нормальмен бұрыш жасайтын бағыттарының болатындығын табалық. Ол үшін (100.2) бойынша  $\vartheta$ -нің осындай мәндеріне сәйкес келетін сфера бетінің  $dF$  элементін табу керек.

Беттің бұл элементі, 225-суреттен көріп отырғанымыздай, ұзындығы  $2\pi R \sin \vartheta$ , ені  $Rd\vartheta$  болатын шар поясы болып табылады. Мұндай поястың беті мынаған тең:

$$dF_{\vartheta} = 2\pi R \sin \vartheta R d\vartheta = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

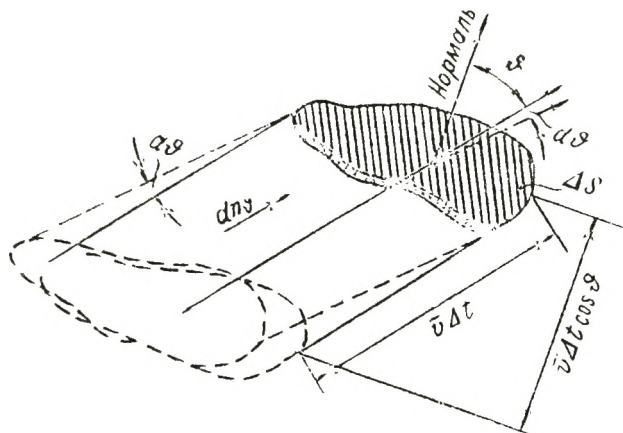
Демек, (100.2)-ге сәйкес мынаны аламыз:

$$dn_{\vartheta} = n \frac{2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta. \quad (100.4)$$

$\frac{1}{2} \sin \vartheta$  көбейткіші молекулалардың  $\vartheta$  бұрышының мәндері бойынша таралуын сипаттайды. Егер бірдей  $d\vartheta$  бұрыштар интервалы арқылы өтетін, бірақ  $\vartheta$  мәнімен

айырылатын  $dn_\vartheta$  молекулалар санын өз ара салыстыратын болсақ, онда мұндай  $dn_\vartheta$  шамалар  $\sin \vartheta$  тәрізді өзгереді.

Енді  $\Delta t$  уақыт ішінде кішкене  $\Delta S$  ауданға соғылатын молекулалар санын табайық. Қозғалыс бағытының  $\Delta S$ -ке жүргізген нормальмен жасайтын бұрыштары  $\vartheta$  және  $\vartheta + d\vartheta$  аралығында жататын молекулалардың ішінен, 226-суретте көрсетілген көлбеу цилиндрдің<sup>1</sup>,  $\Delta V$  көлеміндегі барлық  $dN_\vartheta$  молекулалар түгелдей  $\Delta t$  уақытта  $\Delta S$ -ке келіп жетеді;  $\Delta V$  көлемі



226-сурет.

$$\Delta V = \Delta S \Delta t \cos \vartheta,$$

мұндағы  $v$  — барлық молекулалар үшін бірдей деп ұйғарылған жылдамдық.

Бізге керекті бірлік көлемдегі молекулалар саны (100.4) формуласымен анықталады. Сондықтан

$$dN_\vartheta = dn_\vartheta \Delta V = \frac{1}{2} n \sin \vartheta d\vartheta \Delta S v \Delta t \cos \vartheta. \quad (100.5)$$

Осы өрнекті  $\vartheta$  бойынша 0-ден  $\pi/2$ -ге<sup>2</sup> дейінгі шекте интегралдап,  $\Delta t$  уақыт ішінде  $\Delta S$  ауданға соқтығысудың толық санын аламыз:

$$\Delta N = \int dN_\vartheta = \frac{1}{2} n v \Delta S \Delta t \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} n v \Delta S \Delta t.$$

<sup>1</sup> Берілген  $\vartheta$  мен бірге барлық бағыттарды біз ойша  $\varphi$  бұрышының кез келген мәніне сәйкес келетін бір жазықтыққа айналдырып отырмыз.

<sup>2</sup>  $\vartheta$ -ның  $\varphi$ -ге  $\pi/2$ -ден  $\pi$ -ге дейінгі мәндеріне  $\Delta S$  бағыттарынан ұшып келе жатқан молекулалар сәйкес келеді.

Осыдан бірлік уақыттағы бірлік ауданға соқтығысу саны үшін төмендегідей өрнекті табамыз:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n v, \quad (100.6)$$

бұл мәннің өткен параграфта алынған (99.3)-өрнектен  $3/2$ -ге тең сандық көбейткішке ғана айырмашылығы бар.

Енді қабырғаға түсірілетін газ қысымын есептеп шығаруға кірісейік.  $\vartheta$  бұрыш жасай түсетін әрбір молекула оған нормаль бойымен бағытталған  $2mv \cos \vartheta$  шамасына тең импульс береді (227-сурет).  $\Delta t$  уақыт ішінде қабырғаның  $\Delta S$  элементіне  $\vartheta$  бұрыш жасай, (100.5)-формуламен анықталатын,  $dN_\vartheta$  молекула келіп соғылады. Демек, осы молекулалардың  $\Delta S$ -ке беретін импульсы мына шамаға тең:

$$dK_\vartheta = 2mv \cos \vartheta dN_\vartheta = nmv^2 \Delta S \Delta t \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

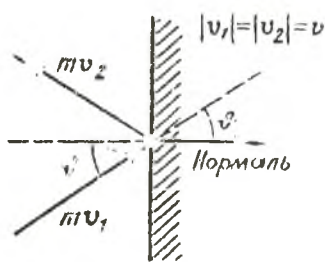
Барлық бағыттағы молекулалардың  $\Delta S$ -ке беретін толық  $\Delta K$  импульсын интегралдау арқылы аламыз:

$$\Delta K = \int dK_\vartheta = nmv^2 \Delta S \Delta t \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} nmv^2 \Delta S \Delta t.$$

Осыдан қысым

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} nmv^2. \quad (100.7)$$

(100.7)-өрнек молекулаларды өз ара перпендикуляр үш бағытта қозғалады деп ұйғару арқылы алынған қысымның (99.4) өрнегімен бірдей.



227-сурет.

Мұндай дәлме-дәлдікті былай түсіндіруге болады: бір жағынан, жоғарыда келтірілген болжам молекулалардың қабырғаға келіп соғу санын азайтады [(100.6) және (99.3)-өрнектерді салыстырындар], екіншіден, әрбір соқтығысу да қабырғаға берілетін импульсты арттырады. (99.4)-өрнекті шығарған кезде әрбір соқтығысу сайын қабырғаға  $2mv$ -ге тең импульс беріледі дедік. Шынында да, қабырғаға берілетін импульс  $\vartheta$  бұрышына тәуелді

болады, осыдан бір рет соқтығысу кезіндегі орташа импульс  $\frac{1}{3} mv$  болады. Нәтижесінде екі дәл келмеушілік бір-біріні жояды, сөйтіп жеңілдетіп қарағанның өзінде де қысымның дәл өрнегін алады екенбіз.

### § 101. Энергияның еркіндік дәрежелері бойынша біркелкі таралуы

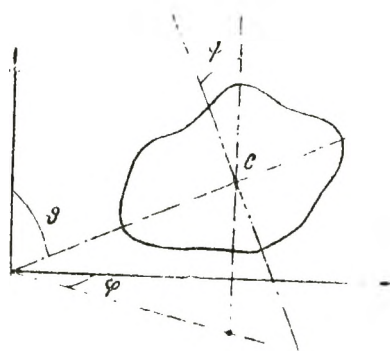
Молекуланың орташа энергиясы үшін 99-параграфта алынған

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT \quad (101.1)$$

өрнек молекуланың тек ілгерілемелі қозғалысының энергиясын ғана есептейді. Алайда ілгерілемелі қозғалыспен қатар молекулалардың айналуы және молекуланың қозғалыс құрамына кіретін атомдардың тербелуі де мүмкін. Қозғалыстың бұл екі түрі қандай да бір энергия қорымен байланысты болады, ал бұл энергияны анықтауға статистикалық физика тағайындайтын энергияның молекуланың еркіндік дәрежелері бойынша біркелкі таралуы жөніндегі қағида мүмкіндік береді.

*Механикалық системаның еркіндік дәрежелері деп системаның орнын анықтауда мүмкіндік беретін тәуелсіз шамалардың жиынтығын атайды.* Материялық нүктенің кеңістіктегі орны оның үш координаталарының (мәселен,  $x, y, z$  декарт координаталарының немесе  $r, \vartheta, \varphi$  т. б. сфералық координаталардың) берілген мәндерімен анықталады. Осыған сәйкес материялық нүктенің үш еркіндік дәрежесі болады.

Абсолют қатты дененің орнын оның инерция центрінің үш координаталарын ( $x, y, z$ ) және денемен байланысты, әрі дененің инерция центрі арқылы өтетін әйтеуір бір бағытын анықтайтын  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарын (228-сурет), ақырында, денемен байланысты бірінші оське перпендикуляр екінші осьтің бағытын анықтайтын  $\psi$  бұрышын беру арқылы



228-сурет.



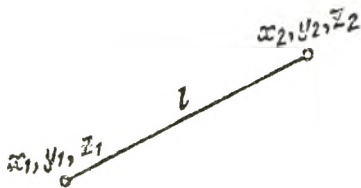
анықтауға болады. Сөйтіп, абсолют қатты дененің алты еркіндік дәрежесі болады.  $\theta$ ,  $\varphi$  және  $\psi$  бұрыштары өзгермеген кездегі инерция центрінің координаталарының өзгеруі қатты дененің ілгерілмелі қозғалысынан болады. Сондықтан осы сәйкестік ілгерілмелі еркіндік дәрежелері деп аталады. Инерция центрінің өзгермей,  $\theta$ ,  $\varphi$  және  $\psi$  бұрыштарының кез келген біреуінің өзгеруі қатты дененің айналмалы қозғалысынан болады, сол себептен бұл еркіндік дәрежелері айналмалы еркіндік дәрежелері деп аталады. Олай болса, абсолют қатты дененің алты еркіндік дәрежесінің үшеуі ілгерілемелі де, ал үшеуі — айналмалы болып табылады.

Нүктелерінің арасында қатаң байланысы жоқ  $N$  нүктелерден тұратын системаның  $3N$  еркіндік дәрежелері болады (нүктелердің әрбіреуінің орны үш координатамен берілуі тиіс). Екі нүктенің ара қашықтығын өзгеріссіз ұстап тұратын кез келген нақтылы байланыс еркіндік дәрежелерінің санын бірлік еркіндік дәрежесіне кемітеді. Мысалы, егер система

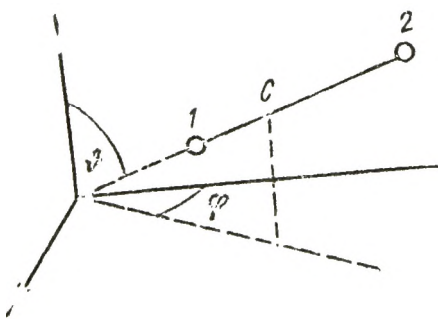
ара қашықтығы  $l$  өзгермейтін (229-сурет) екі материялық нүктеден тұратын болса, онда бұл системаның еркіндік дәрежелерінің саны бесеу болады. Шынында да, бұл жерде нүктелердің координаталарының арасында

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2 \quad (101.2)$$

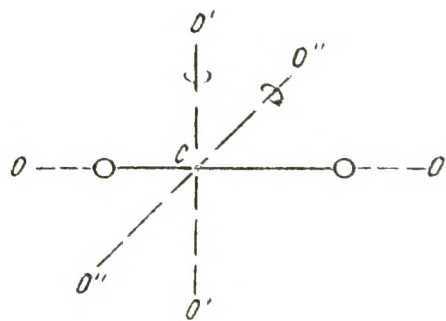
қатынасы болады да, координаталар өз ара тәуелсіз бол-



229-сурет.



230-сурет.



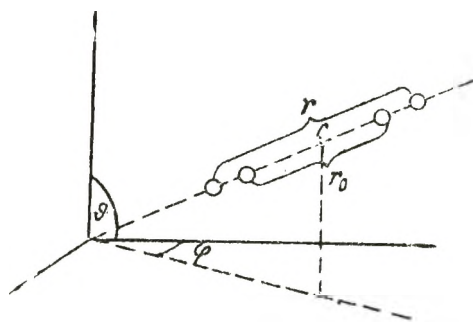
231-сурет.

май шығады: кез келген бес координатаны алудың өзі-ақ жеткілікті, алтыншы координата (101.2) шартымен анықталады. Осы бес еркіндік дәрежесін түр-түрге бөлу

үшін, өз ара қатаң байланысқан екі материялық нүктелерден тұратын системаның орнын былай анықтау керек екенін ескерелік: системаның инерция центрінің үш координата (230-сурет) және система осінің (яғни екі нүкте арқылы өтетін түзудің) кеңістіктегі бағытын анықтайтын  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарын беру керек. Осыдан келіп, үш еркіндік дәрежесінің — үшеуінің ілгерілемелі, ал қалған екеуінің айналмалы болатындығы шығады. Айналмалы еркіндік дәрежелері системаның  $OO$  осіне перпендикуляр болатын өз ара перпендикуляр  $O'O'$  және  $O''O''$  екі осін айнала қозғалуға сәйкес келеді (231-сурет). Материялық нүктелер үшін  $OO$  осі арқылы айналу туралы сөз етудің қажеті жоқ.

Егер екі материялық нүктенің арасындағы байланыс қатаң болмай, серпімді болатын болса, яғни нүктелердің тепе-теңдік аралығы  $r_0$  өзгерген кезде, нүктелерді бұрынғы орындарына әкелуге ұмтылатын күштер пайда болатын болса, онда

еркіндік дәрежелерінің саны алтыға тең. Бұл жағдайда системаның орнын инерция центрінің үш координаталарын,  $\vartheta$  және  $\varphi$  бұрыштарын және нүктелердің  $r$  ара қашықтығын беру арқылы анықтауға болады,  $r$ -дің өзгеруі системадағы тербеліске сәйкес



232-сурет.

келеді, сондықтан да бұл еркіндік дәрежесін тербелмелі деп атайды. Сонымен, қарастырылып отырған системаның үш ілгерілемелі, екі айналмалы және бір тербелмелі еркіндік дәрежесі болады екен.

Бір-бірімен серпімді байланысқан  $N$  материялық нүктеден тұратын системаны қарастырайық. Мұндай системаның  $3N$  еркіндік дәрежесі болады. Нүктелердің системаның потенциалық энергиясының минимумына сәйкес келетін тепе-теңдік конфигурациясы болады. Тепе-теңдік конфигурациясы нүктелердің ара қашықтықтарының белгілі мәндерімен сипатталады. Егер де нүктелерді тепе-теңдік конфигурациясына сәйкес келетін қалыптан шығарып жіберсек, онда системада тербелістер пайда

болады. Системаның орнын тепе-теңдік конфигурациясының қалпын және нүктелердің тепе-теңдік қалыптарынан ауытқуын сипаттайтын шамаларды беру арқылы анықтауға болады. Соңғы шамалар тербелмелі еркіндік дәрежелеріне сәйкес келеді.

Тепе-теңдік конфигурациясының орны абсолют қатты дененің орны тәрізді алты шамамен анықталады, оның үшеуі ілгерілемелі, үшеуі — айналмалы еркіндік дәрежелеріне сәйкес келеді. Сонымен, тербелмелі еркіндік дәрежесінің саны  $3N - 6$ <sup>1</sup> болады екен.

Газдардың жылу сыйымдылығын өлшеуде жүргізілген тәжірибеден шығатынындай, молекуланың еркіндік дәрежелерін анықтаған кезде, атомдарды материялық нүктелер деп есептеуге болады. Демек, бір атомды молекулаға үш ілгерілемелі еркіндік дәрежесін, екі атомды молекулаға, атомдары арасындағы байланыстың түріне қарай, не үш ілгерілемелі және екі айналмалы (серпімді байланыс болғанда) қатаң байланысқан үш атомды молекулаға — үш ілгерілемелі (егер байланыс қатаң болса) немесе осы бес еркіндік дәрежесінен басқа, тағы да бірсуін, тербелмелі еркіндік дәрежесін, қатаң байланысқан үш атомды молекулаға — үш ілгерілемелі және үш айналмалы еркіндік дәрежесін және т. с. с. жазуға болады.

Молекуланың еркіндік дәрежелерінің саны қанша болмасын, оның үшеуі міндетті түрде — ілгерілемелі болатынын ескерелік. Молекуланың ілгерілемелі еркіндік дәрежесінің қай-қайсысының да басқаларынан ешбір артықшылығы болмайтындықтан, олардың әрқайсысына орташа есеппен (101.1) мәнінің үштен біріне, яғни  $kT/2$ -ге тең бірдей энергия келуі керек. Қозғалыстың қай түрінің де бір-бірінен артықшылығы жоқ деп үйғару табиғи нәрсе, демек, көз келген еркіндік дәрежесіне — ілгерілемелі, айналмалы және тербелмелі — орта есеппен  $kT/2$ -ге тең бірдей энергия (дәлірек айтсақ, кинетикалық) келуі тиіс. Осы айтылған тұжырым энергияның еркіндік дәрежелері бойынша біркелкі таралу жайлы ереженің мазмұны болып табылады. Бұл ереженің қанша-

---

<sup>1</sup> Нүктелердің тепе-теңдік қалпы бір түзудің бойында жатпайды деп есептеледі. Олай болмаған кезде, айналмалы еркіндік дәрежесі екеу, ал тербелмелі еркіндік дәрежелері  $3N - 5$  ғана болады. Мұндан жағдаймен біз екі нүктеден тұратын системаны қарастырған кезде кездестік.

лықты орындалатындығын біз алдағы параграфта қарастырамыз.

Біркелкі таралу жайлы ереже бойынша бір молекуланың энергиясының  $\bar{\varepsilon}$  орташа мәні (бірдей температура кезінде), неғұрлым молекула күрделірек, неғұрлым оның еркіндік дәрежесі көп болған сайын, соғұрлым үлкен болады:  $\bar{\varepsilon}$  шамасын анықтаған кезде біз тербелмелі еркіндік дәрежесінің энергия сыйымдылығының ілгерілемелі немесе айналмалы еркіндік дәрежесінің энергия сыйымдылығынан екі есе артық болатындығын ескеру керек. Мұның өзі былай түсіндіріледі: молекуланың ілгерілемелі және айналмалы қозғалысы тек кинетикалық энергия қорымен ғана байланысты, ал тербелмелі қозғалыс болса, ол кинетикалық және потенциалық энергиялар қорымен байланысты, әрі гармониялық осциллятор үшін кинетикалық және потенциалық энергиялардың орташа мәндері өз ара тең. Сондықтан да, әрбір тербелмелі еркіндік дәрежесіне орта есеппен екі жарты  $kT$  келуі тиіс. Оның біреуі — кинетикалық энергия, екіншісі — потенциалық энергия түрінде. Сөйтіп, молекуланың орташа энергиясы мынаған тең болуы тиіс:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT \quad (101.3)$$

мұндағы  $i$  — ілгерілемелі, айналмалы және екі еселенген тербелмелі еркіндік дәрежелері сандарының қосындысы:

$$i = n_{i.l} + n_{aй} + 2n_{тер}. \quad (101.4)$$

Атомдарының арасында қатаң байланысы бар молекула үшін  $i$  молекуланың еркіндік дәрежелерінің санына тең болады.

## § 102. Идеал газдың ішкі энергиясы және жылу сыйымдылығы

Идеал газдың молекулалары қашықтықтан әрекеттеспейтін болғандықтан, мұндай газдың ішкі энергиясы жеке молекулалардың энергияларының қосындысынан тұрады. Демек, идеал газдың бір киломолияның ішкі энергиясы Авогадро санын бір молекуланың орташа энергиясына көбейткенге тең болады:

$$U_{км} = N_A \bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT \quad (102.1)$$

Массасы  $m$  газдың ішкі энергиясы газдың бір молінің энергиясын  $m$  массадағы киломольдердің санына көбейткенге тең болады:

$$U = \frac{m}{\mu} U_{\text{км}} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT \quad (102.2)$$

Қандай да бір дененің жылу сыйымдылығы деп оның температурасын бір градусқа көтеру үшін керекті жылу мөлшеріне тең шаманы айтады. Егер де денеге берілген  $d'Q$  жылу мөлшері оның температурасын  $dT$  шамасына арттыратын болса, анықтама бойынша жылу сыйымдылық

$$C_{\text{дене}} = \frac{d'Q}{dT} \quad (102.3)$$

болады. (102.3) шамасының өлшем бірлігі *дж/град*.

Заттың киломолінің жылу сыйымдылығын  $C$  әрпімен белгілейтін боламыз.  $C$ -нің өлшем бірлігі *дж/град·кмоль*.

Заттың бірлік массасының жылу сыйымдылығы меншікті жылу сыйымдылық деп аталады. Оны біз  $c$  әрпімен белгілейтін боламыз.  $c$ -нің өлшем бірлігі *дж/град·кг*.

Заттың киломолінің жылу сыйымдылығы мен осы заттың меншікті сыйымдылығының арасында төмендегідей қатыстың болатыны анық:

$$c = \frac{C}{\mu}. \quad (102.4)$$

Жылу сыйымдылығының шамасы денені қыздыру шарттарына тәуелді болады. Қыздыруды көлем немесе қысым тұрақты болған жағдайда жүргізгендегі жылу сыйымдылықтың айрықша маңызы бар. Бірінші жағдайда жылу сыйымдылық — тұрақты көлем кезіндегі жылу сыйымдылық ( $C_V$  деп белгіленеді). екінші жағдайда — тұрақты қысым кезіндегі жылу сыйымдылық ( $C_p$  деп белгіленеді) деп аталады.

Егер қыздыру тұрақты көлем кезінде болатын болса, онда дене сыртқы денелерге қарсы жұмыс жасамайды, сондықтан термодинамиканың бірінші бастамасы бойынша [(95.4)-ті қараңыз] барлық жылу дененің ішкі энергиясын арттыруға жұмсалады:

$$d'Q_V = dU. \quad (102.5)$$

(102.5) өрнегінен, көлем тұрақты болған кезде кез келген дененің жылу сыйымдылығының

$$C_V = \frac{dU}{dT} \quad (102.6)$$

болатындығы шығады.

Демек, тұрақты көлемде идеал газдың киломолинің жылу сыйымдылығын алу үшін газдың ішкі энергиясының (102.1) өрнегін температура бойынша дифференциалдау керек. Дифференциалдап, былай жазамыз:

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (102.7)$$

Осы өрнектен көріп отырғанымыздай, тұрақты көлемде идеал газдың жылу сыйымдылығы газ күйінің параметрлеріне, олардың ішінде температураға, тәуелсіз тұрақты шама болып шықты.

(102.7)-ні ескерсек, идеал газдың ішкі энергиясының өрнегі төмендегіше болады:

$$U_{\text{км}} = C_V T \quad (102.8)$$

Егер газды қыздыру тұрақты қысымда өтетін болса, онда газ ұлғаяды да сыртқы денелерге оң жұмыс жасайды. Демек, бұл жағдайда газдың температурасын бір градусқа арттыруға тұрақты көлем кезіндегіге қарағанда жылу көбірек керек болады, өйткені жылудың бір бөлігі газдың істейтін жұмысына кетеді. Сондықтан, тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылық тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылықтан артық болуы керек.

Газдың киломоли үшін термодинамиканың бірінші бастамасының (96.4) теңдеуін жазайық:

$$d'Q_p = dU_{\text{км}} + p dV_{\text{км}}. \quad (102.9)$$

Бұл өрнектегі  $d'Q$ -дың жанындағы  $p$  индекс жылудың газға  $p$  тұрақты болған жағдайында берілетіндігін көрсетеді. (102.9)-ды  $dT$ -ге бөліп, бір киломоль газдың тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылығының өрнегін табамыз:

$$C_p = \frac{dU_{\text{км}}}{dT} + p \left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p. \quad (102.10)$$

---

<sup>1</sup> Дәлірек айтсақ, бұл өрнек  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  түрінде жазылады. Осылай жазу  $U$  және  $T$  бойынша дифференциалдағанда көлемді тұрақты деп есептеуді білдіреді. Идеал газ жағдайында  $U$  шамасы  $T$  бойынша алынған функция болып табылады [(102.1)-ді қараңыз], демек, (102.6) өрнек қатаң сақталады.

$\frac{dV_{\text{км}}}{dT}$  қосылғышы, жоғарыда көргеніміздей, киломоль газдың тұрақты көлем кезіндегі жылу сыйымдылығын береді. Сондықтан (102.10) формуласын мына түрде жазуға болады:

$$C_p = C_v + p \left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p. \quad (102.11)$$

$\left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p$  шамасы,  $p$  тұрақты болып, температура бір градусқа артқан кездегі киломоль көлемінің өсімшесі болып табылады. (98.13) күй теңдеуіне сәйкес

$$V_{\text{км}} = \frac{RT}{p}.$$

Осы өрнекті  $T$  ( $p = \text{const}$ ) бойынша дифференциалдап, мынаны табамыз:

$$\left( \frac{dV_{\text{км}}}{dT} \right)_p = \frac{R}{p}$$

Ақырында, осы нәтижені (102.11)-ге қойып, мынаны аламыз:

$$C_p = C_v + R. \quad (102.12)$$

Сонымен, идеал газдың киломолінің тұрақты қысымда бір градусқа арттырған кезде оның жасайтын жұмысы газдың универсаль тұрақтысына тең болады екен.

(102.12) қатысын идеал газдың күй теңдеуіне сүйене отырып шығарғанымызды, сондықтан оның идеал газ үшін ғана орындалатындығын ескерте кетейік.

(102.7) формуласын ескеріп,  $C_p$  үшін мынадай өрнек аламыз:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (102.13)$$

(102.13)-ті (102.7)-ге бөліп, әрбір газға тән  $C_p$  -нің  $C_v$  -ге қатынасын табамыз:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (102.14)$$

(102.14)-тен байқағанымыздай,  $\gamma$  шамасы молекуланың еркіндік дәрежесінің саны мен сипаты арқылы анықталады.

4-таблицада әр түрлі молекулалар үшін (102.7), (102.13) және (102.14) формулалары бойынша анықтал-

ған  $C_V, C_p$  және  $\gamma$ -лардың мәндері келтірілген. 5-таблицада теориялық нәтижелер экспериментальдық деректермен салыстырылған. Теориялық нәтижелер (таблицадағы ескертпеде келтірілген жағдайдың біреуінен

4 - та б л и ц а

Молекула	Атомдар арасындағы байланыстың сипаты	Еркіндік дәреже саны			$i$	$C_V$	$C_p$	$\gamma$
		ілге.	айнал.	тербел.				
Бір атомды	—	3	—	—	3	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$	1,67
Екі атомды	катаң	3	2	—	3	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$	1,40
» »	серпімді	3	2	1	7	$\frac{7}{2} R$	$\frac{9}{2} R$	1,29
Үш және одан да көп атомды	катаң	3	3	—	6	$\frac{6}{2} R$	$\frac{8}{2} R$	1,33

5 - та б л и ц а

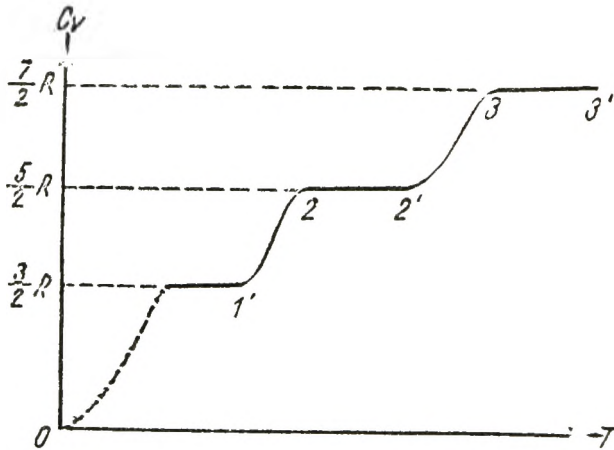
Газ	Молекуладағы атомдар саны	$C_V \cdot 10^{-3}$ дж/град. кмоль		$C_p \cdot 10^{-3}$ дж/град. кмоль		$\gamma$	
		теор.	экспер.	теор.	экспер.	теор.	экспер.
Гелий (He)	1	12.5	12.5	20.8	20.9	1.67	1.67
Оттегі (O <sub>2</sub> )	2	20.8	20.9	29.1	28.9	1.40	1.40
Көмір тотығы (CO)	2	20.8	21.0	29.1	29.3	1.40	1.40
Су буы (H <sub>2</sub> O)	3	25.0 33.2*	27.8	33.2 41.5*	36.2	1.33 1.25*	1.31

\*  $i=8$  үшін, яғни ұйғарымда қосымша тербелмелі еркіндік дәрежесі бар деген.



басқасы) молекулалардың атомдары қатаң байланысқан деген болжамға сүйеніп алынған: экспериментальды деректер бөлме температурасына жақын температура-ларда алынған.

5-таблицадан көріп отырғанымыздай, теория мен эксперимент арасындағы пікір бірлігі бір қарағанда бір және екі атомды молекулалар үшін ғана болса да ойдағыдай орындалатын сияқты. Шынында олай емес. Өзіміз қарастырған теория бойынша, газдардың жылу сыйымдылығы бүтін,  $R/2$ -ге еселі болуы қажет, өйткені еркіндік дәрежелері тек бүтін сан ғана бола алады. Сондықтан да,  $C_v$  және  $C_p$  мәндерінің  $R/2$ -ге еселі болатын шамалардан сәл ғана ауытқуының өзі принципиальды роль атқарады. Таблицадан көріп отырғанымыздай, мұндай өлшеудің мүмкін болатын қателерінен аса артық кеткен ауытқулар жоқ емес.



233-сурет.

Теория мен эксперименттің арасындағы айырмашылық, әсіресе, жылу сыйымдылықтың температураға тәуелділігінен аса білінеді. 233-суретте сутегі үшін алынған бір киломольдің  $C_v$  жылу сыйымдылығының температураға тәуелділігінің қисығы кескінделген. Теория бойынша, жылу сыйымдылық температураға тәуелсіз болуы тиіс [(102.7)-ші қараңыз]. Суреттен көріп отырғанымыздай, бұл тек кейбір температура интервалдарының жеке шектері үшін ғана орындалады екен, сонымен қатар әр түрлі температура интервалдары үшін жылу сыйымдылығының мәндері молекуланың еркіндік дәрежелерінің әр түрлі санына сәйкес келеді. Мәселен, 1—1'

учаскесінде  $C_V$  шамасы  $\frac{3}{2} R$ -ге тең. Бұл молекуланың тек ілгерілемелі еркіндік дәрежелері ғана бар система тәрізді ұстайтынын көрсетеді.  $2-2'$  учаскесінде  $C_V$  шамасы  $\frac{5}{2} R$ -ге тең. Демек, осы учаскеге сәйкес келетін

температураларда молекуланың бұдан анағұрлым төменгі температураларда байқалатын үш ілгерілемелі еркіндік дәрежесінің қатарына қосымша екі айналмалы еркіндік дәрежесі қосылады. Ақырында, біршама жоғары температураларда  $C_V$  шамасы  $\frac{5}{2} R$ -ге тең болады, мұның өзі осындай температураларда молекула тербелісінің пайда болғандығын білдіреді. Көрсетілген интервалдардың арасында жылу сыйымдылығы температураға тәуелді монотонды, яғни еркіндік дәрежелерінің айнымалы бөлшек санына сәйкес келетіндей түрде өседі.

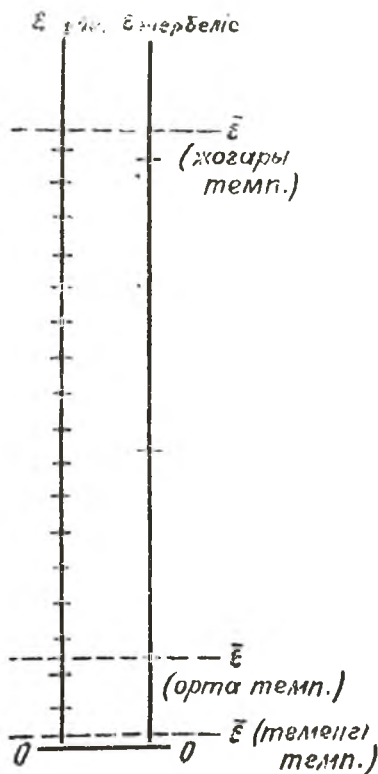
Сонымен, жылу сыйымдылық арқылы білінетін молекуланың еркіндік дәрежелері температураға тәуелді болады екен. Төменгі температураларда молекулалардың тек ілгерілемелі қозғалысы ғана байқалады. Жоғары температураларда ілгерілемелі қозғалыспен қатар молекулалардың айналмалы қозғалысы да байқалады. Ақырында, бұдан анағұрлым жоғары температураларда қозғалыстың алғашқы екі түріне молекулалардың тербелісі де қосылады. Бұл кезде, жылу сыйымдылық сызығының монотонды өзгерісінен көріп отырғанымыздай, айналмалы қозғалысқа, содан соң тербелмелі қозғалысқа молекулалардың барлығы бірдей араласпайды. Алдымен, мысалы, айналмалы қозғалыс молекулалардың бір бөлігінде ғана байқалады. Температура артқан сайын, айналмалы қозғалыстағы молекулалар саны да артып, ақыры температураның белгілі бір мәнінде айналмалы қозғалысқа барлық молекулалар қатысады. Осыған ұқсас процесс молекулалардың тербелмелі қозғалысы үшін де орын алады.

Жылу сыйымдылығының осындай өзгеріс-сипатын кванттық механика түсіндіреді. Кванттық теория тағайындағандай, айналмалы және тербелмелі қозғалыстардың энергиясы квантталған екен. Мұның өзі молекуланың айналмалы қозғалысының және тербелмелі қозғалысының энергиялары кез келген мән қабылдай алмайтынын, тек дискретті (яғни бір-бірімен шекті ша-

маға айырмашылығы бар, жеке) мәндер ғана қабылдай алатынын білдіреді. Демек, қозғалыстың осы түрлеріне байланысты энергиялар тек секірмелі түрде ғана өзгереді. Ілгерілемелі қозғалыстың энергиясы үшін мұндай шектеулер болмайды.

Энергияның рұхсат етілетін жеке мәндерінің интервалдары (немесе, энергия деңгейлерінің аралықтары), айналмалы қозғалысқа қарағанда, тербеліс үшін шамамен бір ретке жоғары болады. Екі атомды молекуланың айналмалы және тербелмелі деңгейлерінің жеңілдетілген схемасы<sup>1</sup> 234-суретте келтірілген.

106-параграфта көрсеткеніміздей, газ молекулалары энергия мәндері бойынша, басым көпшілігінің энергиясы  $\epsilon$ -ның орташа мәніне, ал өте аз бөлігінікі ғана  $\epsilon$ -нан едәуір артық болатындай түрде таралған. Сондықтан, молекулалардың айтарлықтай үлесі айналмалы немесе тербелмелі қозғалысқа араласуы үшін, олардың орташа энергиясы соларға сәйкес энергиялардың мүмкін деңгейлерінің ара қашықтығынан мейлінше артық болуы керек.



234-сурет.

Молекуланың  $\epsilon$  орташа энергиясының мәні айналмалы қозғалыстың мүмкін деңгейінің мәнінен де едәуір аз болатын мейлінше төменгі температураны алайық (234-суреттегі ең төменгі пунктир сызықты қараңыз). Сонда барлық молекулалардың тек азғантай бөлігі ғана айналмалы қозғалысқа келеді, сондықтан газ молекулалары түгелдей ілгерілемелі қозғалыста болады. Температураның аз өзгерісі тек ілгерілемелі қозғалыс энергиясының өзгерісін ғана тудызады, осыған сәйкес жылу сыйымдылық  $\frac{3}{2}R$ -ге тең болады (233-суреттегі кисықтың  $1-1'$  учаскесін қараңыз).

<sup>1</sup> Шындығында да, айналмалы деңгейлерінің арасы әр түрлі болады. Алайда бұл қарастырылып отырған мәселе үшін ескерусіз.

Температураның өсуі  $\epsilon$ -ның өсуімен қатар жүреді де, осының салдарынан молекулалардың айналмалы қозғалысқа араласатын бөлігі де арта түседі. Бұл процеске 233-суреттегі қисықтың  $1'—2$  учаскесі сәйкес келеді.

Молекулалар түгелдей айналмалы қозғалысқа келгеннен кейін  $2—2'$  горизонталь учаскесі басталады. Бұл учаскеге сәйкес келетін температуралар да  $\epsilon$ -ның мәні тербелмелі энергия деңгейлерінің ара қашықтығынан мейлінше аз, осының салдарынан молекулаларды тербелмейді деуге болады. Температураны одан әрі арттырғанда молекулалар көптеп тербелмелі қозғалысқа келе бастайды, бұған жылу сыйымдылығының қисығындағы  $2'—3$  өту учаскесі сәйкес келеді. Ақырында жеткілікті жоғары температурада молекулалар түгелдей тербелмелі қозғалысқа келеді де, осыған байланысты жылу сыйымдылық  $\frac{T}{2}R$ -ге тең болады.

Осы айтылған жылу сыйымдылықтың классикалық теориясына қайта оралып, оның нәтижелері жеке температура интервалдары үшін шамамен дұрыс деп айта аламыз, сонымен қатар оның әрбір интервалына молекуланың еркіндік дәрежесінің бір саны сәйкес келеді.

### § 103. Идеал газдың аднабаталық теңдеуі

Сыртқы ортамен жылу алмасусыз өтетін процесс аднабаталық процесс деп аталады. Аднабаталық процесс кезінде идеал газдың параметрлерін байланыстырып тұратын теңдеуді табайық. Термодинамиканың бірінші бастамасының (96.4) теңдеуіне идеал газ үшін  $dU$  өрнегін қоямыз:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV$$

Аднабаталық процесс үшін  $d'Q=0$  болғандықтан,

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + p dV = 0 \quad (103.1)$$

шарты орындалуы тиіс.

Енді  $p$ -ні идеал газдың күй теңдеуіне сәйкес  $V$  және  $T$  арқылы анықтаймыз:

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V},$$

мұны (103.1)-ге қоямыз. Нәтижесінде польден ерекше  $m/\mu$  көбейткішіне қысқартып, мынаны аламыз:

$$C_V dT + RT \frac{dV}{V} = 0.$$

Алынған өрнекті былайша түрлендірейік:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Соңғы қатынасты

$$d\left(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V\right) = 0;$$

түрінде жазуға болады, осыдан адиабаталық процесс кезінде

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const} \quad (103.2)$$

екендігі шығады.

Идеал газ үшін  $C_p - C_V = R$  екендігін ескерсек,  $R/C_V$  қатынасын  $\gamma - 1$ -мен алмастыруға болады, мұндағы  $\gamma = C_p/C_V$  (103.2)-де осындай түрлендіру жүргізіп және алынған шаманы потенциалеп,

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (103.3)$$

тендеуіне келеміз.

Табылған қатыс  $T$  және  $V$  айнымалыларда идеал газдың адиабаталық теңдеуі болып табылады. Бұл теңдеуден идеал газдың теңдеуіне сәйкес  $T$ -ні  $P$  және  $V$  арқылы өрнектеп,  $p$  және  $V$  айнымалылары арқылы жазылған теңдеуге өтуге болады:

$$T = \frac{\mu}{m} \frac{pV}{R}$$

$T$ -нің мәнін (103.3)-ке қойып және  $p$  және  $V$  шамаларының тұрақты екенін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$pV^{\gamma} = \text{const}^1 \quad (103.4)$$

(103.4) қатысы  $p$  және  $V$  айнымалылары арқылы жа-

<sup>1</sup> (103.2)—(103.4) формулаларындағы const мәнінің әр түрлі болатындығы сөзсіз.

зылған идеал газ адиабатасының теңдеуі болып табылады. Оны Пуассон теңдеуі деп те атайды.

Адиабатаның (103.4) теңдеуін изотерманың (98.3) теңдеуімен салыстырудан адиабатаның изотермаға қарағанда тезірек өтетінін көреміз. Изотерма мен адиабата үшін  $\frac{dp}{dV}$  -ның бір ғана  $(p, V)$  нүктедегі мәнін есептеп шығарайық (235-сурет).

(98.3)-теңдеуін дифференциалдасақ, былай болады:

$$pdV + Vdp = 0.$$

Осыдан изотерма үшін мынаны аламыз:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \quad (103.5)$$

(103.4)-ті дифференциалдасақ, былай болады:

$$p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dp = 0,$$

осыдан:

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Сонымен, адиабатаның көлбеу бұрышының тангенсі изотерманікінен  $\gamma$  есе артық болады екен.

Жоғарыда біз барлық уақыттарда да, газдың күйі әрбір уақыт мезетінде  $p$  және  $T$  параметрлерінің белгілі мәндерімен сипатталады, яғни, басқа сөзбен айтқанда, қарастырылып отырған адиабаталық процесс тепе-теңдікте өтеді деп ұйғардық. Біз білетіндей, тек өте баяу өтетін процесс қана тепе-теңдіктегі процесс бола алады. Сонымен қатар, табиғатта жылуды мүлдем өткізбейтін заттар болмайтындықтан, процесс неғұрлым аз уақытқа созылса, системаның қоршаған ортамен алмасатын жылу мөлшері адиабаталық процеске жуық болады. Мұндай процестің мысалына дыбыс толқыны таралған газдың әрбір нүктедегі сығылуы мен ұлғаюы жатады. Үлкен көлемнің шегінде бұл кездегі газ күйін тепе-теңдікте деп айтуға болмаса да (әр түрлі нүктелерде  $p$  мен  $T$  түрліше мән қабылдайды), әрбір мейлінше аз көлем үшін газ күйі (103.4) адиабата теңдеуін толық қанағаттандырады.

## § 104. Политроптық процестер

Жоғарыда қарастырылған процестердің барлығы да политропты процестің дербес жағдайлары болып табы-

лады. Политроптық процесс деп, идеал газдың қысымы мен көлемі

$$pV^n = \text{const} \quad (104.1)$$

қатысымен байланысқан процесті айтады, мұндағы  $n$  ( $-\infty$ )-тен ( $+\infty$ )-ке дейінгі мәндерді қабылдай алады.

6-таблицада политроптық процестің өзімізге белгілі процестің бірімен теңбе-тең болғандағы  $n$ -нің мәні көрсетілген. Кестенің алғашқы үш жолы белгілі. Төртінші жолдың да орындалатындығына көз жеткізу үшін политроптың (104.1) теңдеуін былай жазайық:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n, \quad (104.2)$$

мұндағы 1 және 2 индекстер қалауымызша алынған екі күйге жатады. (104.2)-ден  $n$ -дәрежелі түбір алайық:

$$p_1^{\frac{1}{n}} V_1 = p_2^{\frac{1}{n}} V_2.$$

Енді  $n$ -ді ( $+\infty$ )-ке немесе ( $-\infty$ )-ке ұмтылдырсак, онда изохоралық процесті сипаттайтын мына шартқа келеміз:

$$V_1 = V_2.$$

Бір киломоль үшін жазылған идеал газ күйінің теңдеуінен

$$p = R \frac{T}{V} \quad (104.3)$$

скендігі шығады.  $p$ -нің осы мәнін (104.1)-ге қойып және  $R$ -дің тұрақты екендігін ескере отырып, политроптың  $T$  және  $V$  арқылы жазылған теңдеуіне келеміз:

$$TV^{n-1} = \text{const}. \quad (104.4)$$

Идеал газдың киломолінің политроптық процесс кезіндегі жылу сыйымдылығын табайық. (96.4) және (102.8) бойынша былай болады:

$$d'Q = C_V dT + p dV$$

Демек,

$$C = \frac{d'Q}{dT} = C_V + p \frac{dV}{dT}. \quad (104.5)$$

6 - т а б л и ц а

$n$	процесс
0	изобаралық
1	изотермиялық
$\gamma$	адиабаталық
$\pm \infty$	изохоралық

$\frac{dV}{dT}$  -ні табу үшін, политроптың (104.4) түріндегі теңдеуін пайдаланамыз. Осы теңдеуді дифференциалдау мынаны береді:

$$V^{n-1}dT + T(n-1)V^{n-2}dV = 0,$$

бұдан

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T(n-1)} = -\frac{R}{p(n-1)}$$

[(104.3) қатысын пайдаландық].

$\frac{dV}{dT}$ -нің осы табылған мәнін (104.5) формулаға қойсақ, политроптық процесс кезіндегі идеал газдың бір мо­лінің жылу сыйымдылығы үшін мынандай өрнекке келеміз:

$$C_n = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{nC_V - C_p}{n-1}. \quad (104.6)$$

Бұл өрнекте күй параметрлері  $p$ ,  $V$  және  $T$  болмайды. Сондықтан, (104.6)-өрнектегі жылу сыйымдылық тұрақты шама болып табылады. Осыған сәйкес политроптық процесті жылу сыйымдылығы тұрақты болып қалатын процесс ретінде анықтауға болады. Бұл анықтама, (104.1)-дегі анықтамаға қарағанда, жалпылама — оны кез келген тектегі денелерге қолдануға болады, ал (104.1)-дегі анықтама тек идеал газ үшін ғана орындалады.

$C = C_n = \text{const}$  деген ұйғарымға сүйене отырып, осы жағдайдағы идеал газдың (104.1) теңдеуіне бағынатындығын көрсетуге болады, мұнда

$$n = \frac{C_p - C_n}{C_V - C_n}. \quad (104.7)$$

Осы қорытындыны жаттығу ретінде шығаруды ұсынамыз.

## § 105. Идеал газдың әр түрлі процестер кезінде істейтін жұмысы

Қандай да бір дененің 1 күйден 2 күйге өткен кезде сыртқы денелерге істейтін жұмысы

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (105.1)$$

шамасына тең болатыны белгілі [(96.3)-ті қараңдар].



Интегралдау үшін  $p$ -ні  $V$  арқылы анықтауымыз керек. Ол үшін әр түрлі процестер кезіндегі  $p$  мен  $V$  арасындағы байланысты пайдаланамыз.

Идеал газ политропының (104.1) теңдеуін былай жазуға болады:

$$pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n,$$

мұндағы,  $p_1, V_1$  және  $p_2, V_2$  — газдың бірінші (бастапқы) және екінші (ақырғы) күйлеріндегі қысымы мен көлемі, ал  $p$  мен  $V$  — кез келген аралық күйдегі қысым мен көлем.

Осы қатысқа сәйкес, газ қысымын оның көлемі мен бастапқы күйдегі<sup>1</sup> параметрлері арқылы өрнектейміз:

$$p = \frac{p_1V_1^n}{V^n}. \quad (105.2)$$

(105.2)-ні (105.1)-ге қойып, мынаны аламыз:

$$A_{12} = p_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \quad (105.3)$$

Әуелі  $n \neq 1$ ; болатын жағдайды қарайық, сонда (105.3)-тегі интеграл

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right)$$

шамасына тең болады.

Интегралдың осы мәнін (105.3)-ке қойып және қарапайым түрлендірулер жүргізгеннен кейін, мынаны аламыз:

$$A_{12} = \frac{p_1V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] \quad (105.4)$$

Табылған өрнекті түрлендіруге болады, ол үшін идеал газда қандай процесс жүріп жатқанмен де оның параметрлерінің (98.14) күй теңдеуі арқылы байланыста болатындығын пайдалану керек. Атап айтқанда, бұл бастапқы күй үшін де орындалады:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (105.5)$$

(105.5)-ті (105.4)-ке қойып, мынаны аламыз:

<sup>1</sup> Дәл осылай қысымды ақырғы күйдің параметрлері арқылы да өрнектеуге болады.

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] \quad (105.6)$$

(105.4) және (105.6) өрнектері идеал газдың, изотермалық процестен басқа, кез келген политроптық процесс кезіндегі істейтін жұмысын береді (изотермалық процесс кезінде  $n=1$  мәніне сәйкес<sup>1</sup> болады. Оның ішінде адиабаталық процесс үшін

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (105.7)$$

немесе

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (105.8)$$

Изотермалық процесс кезіндегі идеал газдың істейтін жұмысын есептеп шығару үшін, (105.1) формуладағы қысымды, күй теңдеуіне сүйеніп, басқа шамалар арқылы алмастырамыз. Нәтижесінде ( $T$  тұрақты болғандықтан, оны интегралдың сыртына шығаруға болады) мына төмендегі өрнекті аламыз:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Сөйтіп, изотермалық процесс кезінде идеал газдың істейтін жұмысы былай болады:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (105.9)$$

Изобаралық процесс кезінде кез келген дененің, оның ішінде идеал газдың, істейтін жұмысы, (105.1)-ден көріп отырғанымыздай, мынаған тең:

$$A_{12} = p(V_2 - V_1) \quad (105.10)$$

Егер де (105.4)-тегі  $n$ -ді нольге тең деп алсақ та, дәл осындай нәтижеге келеміз. Изохоралық процесс кезіндегі істелетін жұмыс нольге тең болады, бұл кез келген дене үшін де орындалады.

## § 106. Газ молекулаларының жылдамдықтар бойынша таралуы

<sup>1</sup> Газ молекулалары әр түрлі жылдамдықтармен қозғалыста болады да, әрбір жеке-жеке алынған молекула

<sup>1</sup>  $n=1$  болғанда (105.4) және (105.6) өрнектерінің анықталмайтын болып шығатынын ескерейік.

жылдамдығының шамасы да, бағыты да соқтығысулардың әсерінен үздіксіз өзгеріп отырады (алда көретініміздей, қалыпты жағдайларда, әрбір молекула секунд сайын 10 рет соқтығысады).

Қозғалыстың барлық бағыттары тең ықтималды болғандықтан, молекулалардың бағыттар бойынша таралуы бір қалыпты болады: белгілі бір аралықта қалай болса, солай бағытталған, бірақ шамасы тұрақты  $\Delta Q$  денелік бұрышта әрбір уақыт мерзімінде молекулалардың орташа есеппен  $\Delta N_{\vartheta, \varphi}$  болатын бірдей санының қозғалыс бағыттары жатады.

Молекулалардың  $v$  жылдамдығының сан мәндерінің жағдайы тіптен басқаша. Нольден шексіздікке дейінгі аралықтағы жылдамдықтың мүмкін мәндерін бірдей ықтималды дей алмаймыз. Бұл мына жағдайдан шығады. Молекулалардың жылдамдығының соқтығысу кезінде өзгеруі кездейсоқ өтеді. Қайсыбір жеке молекула бір-қатар жүйелі соқтығысқан сайын өз сыңарларынан энергия алып отыруы мүмкін, соның нәтижесінде оның энергиясы  $\epsilon$  орташа мәнінен артып кетеді. Алайда газдың барлық молекулалары өз энергияларын жалғыз молекулаға беріп, өздері тоқталып қалады деп ойлағанның өзінде бұл молекуланың энергиясы, демек, оның жылдамдығы, шектеулі шамада болады. Сөйтіп, газ молекулаларының жылдамдығы қандай да бір  $v_{\max}$ -нан басталып  $\infty$ -пен бітетін мәндер қабылдай алмайды. Барлық молекулалардың қорытқы энергиясының едәуір үлесін бір молекулаға беретін процестер ықтималдығы өте аз болады деп есептей отырып, мәні жылдамдықтың орташа мәнінен әлдеқайда артық жылдамдықтар да өте сирек кездеседі деген тұжырымға келеміз. Дәл осы тәрізді, соқтығысулар кезінде молекуланың жылдамдығы нольге айналады деп те айтуға болмайды. Демек, жылдамдықтың орташа мәнімен салыстырғанда өте аз және өте үлкен жылдамдықтардың пайда болуының да ықтималдылығы өте аз болады, сонымен қатар  $v$ -нің осы мәнінің ықтималдылығы  $v \rightarrow 0$  кезінде де,  $v \rightarrow \infty$  кезінде де нольге ұмтылады.

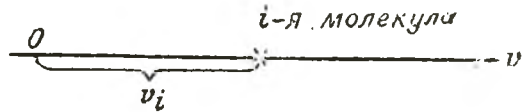
Осы айтылғандардан, молекулалардың жылдамдықтары жылдамдықтың аса ықтимал мәнінің төңірегінде топтасатындығы шығады.

Молекулалардың мәндері бойынша таралуын сандық сипаттап шығу тәсілін анықтау үшін төмендегідей көр-

некі әдісті пайдаланайық. Жылдамдықтың мәндерін  $v$  осіндегі нүктелермен белгілейік. Сонда әрбір молекулаға осы осьтегі нүкте сәйкес келеді, санақ басы болып табылатын  $O$  нүктесінен осы нүктеге дейінгі қашықтық сан мәні жағынан қарастырылып отырған молекуланың жылдамдығының шамасына тең болады (236-сурет)

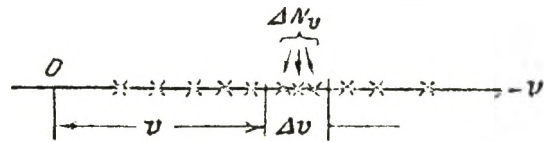
Біршама мөлшердегі газдың барлық  $N$  молекулаларының жылдамдығын бір мезгілде анықтай алатын әдісіміз болсын дейік.

Алынған нәтижені  $v$  осіндегі нүктелер<sup>1</sup> түрінде кескіндей отырып,  $t$  уақыт мезеті үшін барлық молекулалардың «лездік суретін» аламыз (237-сурет)



236-сурет.

Егер де жылдамдықтың барлық мәндері бірдей ықтималды болса, онда нүктелер  $v$  осінде біркелкі таралған болар еді. Алайда



237-сурет.

жоғарыда көргеніміздей, жылдамдықтар негізінен ықтималдылығы анағұрлым көбірек мәнінің төңірегінде топтасады екен. Нольге жуық немесе өте үлкен мәнді жылдамдықтар өте сирек кездеседі. Сондықтан,  $v$  осінде нүктелердің орналасуы әркелкі, осьтің әр түрлі участкелерінде түрліше тығыздықпен таралады.

Нүктелердің тығыздығын  $\Delta v$  интервалына (237-сурет) тап болатын  $\Delta N_v$  нүктелер санының осы интервалдың

$$\rho = \frac{\Delta N_v}{\Delta v}$$

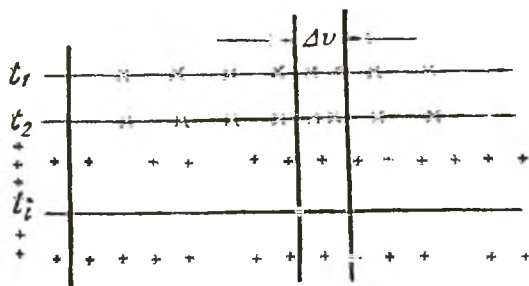
шамасына қатынасы түрінде анықтайтын болсақ, онда бұл шаманы  $v$ -нің функциясы деуге болады [ $\rho = \rho(v)$ ]. Шынында да, оның мәні  $\Delta v$  интервалда  $v$  осінің қай жерінде алғанымызға, яғни  $v$ -ге тәуелді болады.

Молекуланың арасындағы әрбір соқтығысу  $v$  осіндегі нүктелердің қалпын кездейсоқ түрде өзгертеді. Сондықтан  $t_1$ ,  $t_2$  және т. б. әр түрлі уақыт мезгілдері үшін «су-

<sup>1</sup> Әрбір нүктені салу үшін бір секунд ғана жұмсалатын болса, онда  $2,7 \cdot 10^{19}$  нүкте салу үшін  $10^{12}$  жыл еңбектену керек болатынын айта кетейік.

реттерді» алып, оларды бір-бірімен салыстыратын болсақ (238-сурет), онда осы «суреттерден» бір-бірімен дәлме-дәл түсетін нүктелерді кездестірмес едік. Алайда егер газ тепе-теңдік күйде (яғни параметрлері өзгермей қалатын күйде) тұрса, онда молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуы өзгермей қалады. Сондықтан да,  $v$  осінің әр түрлі учаскелеріндегі нүктелердің таралу тығыздығы барлық уақыт мезгілдері үшін бірдей болады.

Егер газдың бірдей жағдайлардағы ( $p$  және  $T$  бірдей болғанда) бірнеше порциясын алатын болсақ, онда



238-сурет.

олардағы молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуы да бірдей болады. Алайда  $v$  осіндегі нүктелер тығыздығының бірдей сипатта таралуы қарастырылып отырған молекулалардың  $N$  санына пропорционал болатындығы

анық, демек, газдың әр түрлі порциялары үшін әр түрлі болады. Әр түрлі порциялар үшін

$$f(v) = \frac{\rho(v)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\Delta N_v}{\Delta v} \quad (106.1)$$

қатынасы ғана бірдей болады.

Осылайша анықталған  $f(v)$  функциясы газ молекулаларының жылдамдықтар бойынша таралуын сипаттайды да таралу функциясы деп аталады.  $f(v)$ -нің түрін білсек, онда берілген  $N$  молекулалардың ішінен жылдамдықтары  $\Delta v$  интервалында жататын, яғни мәндері  $v$ -ден  $v + \Delta v$ -ге дейінгі  $\Delta N_v$  молекулалардың санын анықтай аламыз:

$$\Delta N_v = N f(v) \Delta v. \quad (106.2)$$

$$\frac{\Delta N_v}{N} = f(v) \Delta v \quad (106.3)$$

қатынасы молекула жылдамдығының берілген ( $v$  мен  $v + \Delta v$ -нің арасында жатқан) жылдамдық интервалы  $\Delta v$ -нің ( $\Delta N$  болған кезде  $v$  индекс  $\Delta v$  интервалын

белгілеуге арналған<sup>1</sup> шегіндегі мәнінің ықтималдығын береді.

$$\sum \Delta N_v = \sum N f(v_i) \Delta v_i = \sum \rho_i \Delta v_i$$

қосындысы молекулалардың  $N$  толық санына тең болуға тиіс. Осыдан таралу функциясының төмендегідей қасиеті шығады:

$$\sum f(v_i) \Delta v = 1. \quad (106.4)$$

Соңғы нәтижені былайша түсіндіруге болады:

$$\sum \frac{\Delta N_v}{N} = \sum f(v_i) \Delta v_i$$

өрнегі молекула жылдамдығының 0-ден  $\infty$ -ке дейінгі аралықтағы бір мәнге ие болатындығының ықтималдылығын береді. Молекула жылдамдығының сөзсіз бір мәні болады, сондықтан бұл ықтималдық нақты болатын уақиғаның ықтималдығы, демек, ол бірге тең болады.

(106.4) шарты, дәлірек айтқанда, төмендегі түрде жазылуы тиіс:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (106.5)$$

(106.2)—(106.5) қатыстары таралу функциясының жалпы анықтамасынан шығады және оның нақты түріне тәуелсіз болады.

Таралу функциясын теория жүзінде Максвелл ашты және соның есімімен аталады. Оның түрі мынадай:

$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2, \quad (106.6)$$

мұндағы  $A$  —  $v$ -ге тәуелсіз көбейткіш,  $m$  — молекуланың массасы,  $k$  — Больцман тұрақтысы.

Максвелдің таралу функциясына тән нәрсе,  $e$ -нің дәреже көрсеткішінде, «—» таңбасымен алынған, қарастырылып отырған  $v$  жылдамдыққа сәйкес келетін молекуланың  $mv^2/2$  кинетикалық энергиясының молекуланың орташа энергиясын сипаттайтын  $kT$  шамасына қатынасы болатын жағдай.

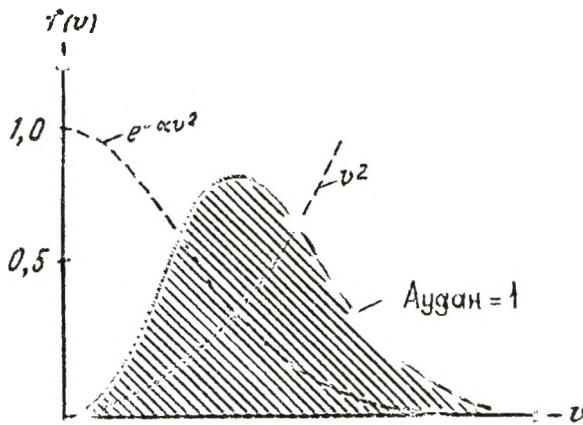
<sup>1</sup> Қайсыбір молекуланың жылдамдығы кез келген мәндегі анықталған  $v$  мәнге ие болса, оның ықтималдығы нольге тең болады. Мұны былай түсінуге болады:  $v$ -нің мүмкін мәндерінің саны шексіз де, ал молекулалардың саны  $N$  өте зор болғанмен, ол шектелген болады [100-параграфтағы (100.1)-ден (100.2)—дейінгі текспен салыстырындар].

$v$  артқан кезде,  $v^2$  көбейткішіне қарағанда  $e^{-\alpha v^2}$  түріндегі көбейткіш тезірек азаяды, сондықтан функция нольден басталып ( $v^2$ -тың себебінен), максимумға жетіп, содан асимптоталық түрде нольге ұмтылады (239-сурет)  $f(v)$  қисығы қамтитын аудан (106.5)-ке сәйкес бірге тең болады.

(106.5) шарты (105.6)-өрнегіндегі  $A$ -ны есептеп шығаруға мүмкіндік береді:

$$A \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = 1.$$

Бұл шарт функцияны нормалау шарты, ал  $A$  нормалау көрсеткіші деп аталады.



239-сурет.

Есептеулер  $A$  үшін  $4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$  мәнін береді. Сөйтіп, Максвелдің таралу функциясының түрі мынадай екен:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (106.7)$$

Ойлағандай-ақ, функцияның нақты түрі газдың тегіне (молекуланың массасына) және күй параметріне ( $T$  температураға) тәуелді болады екен. Газдың қисымы мен көлемі молекулалардың жылдамдықтарының таралуына әсер етпейді деп есептейік.

(106.7) функциясы таралуды дұрыс сипаттайтын секілді болып көрінуі де мүмкін, осыған байланысты ол тек шексіздікте ғана нольге айналады, ал нақты жыл-

дамдықтардың мәні болса, олар шектелген, олардың шегі болады. Алайда  $v$ -нің жеткілікті үлкен мәні үшін (106.7) функциясының нольден аздап қана айырмашылығы болады, сондықтан келтірілген ауытқу іс жүзінде ешқандай роль атқармайды.

Таралу функциясының максимум мәніне сәйкес келетін жылдамдықтың ең ықтимал жылдамдық болатындығы анық. Шынында, егер жылдамдықтары шамалары бірдей, бірақ әр түрлі алынған  $\Delta v$  интервалының шегінде жататын молекулалардың  $\Delta N_v$  сандарын салыстыратын болсақ, онда максимумның аймағында  $\Delta N_v$  орналасқан интервалға сәйкес келетін  $\Delta N_v$ -нің мәні ең үлкен болады. Сөйтіп, біз  $f(v)$  функциясының максимумын табуда есепті шеше отырып, ең ықтимал  $v_{\text{ык}}$  жылдамдықты табамыз. (106.6)-ны  $v$  бойынша дифференциалдап, табылған өрнекті нольге теңестіріп, былай жазамыз:

$$\frac{df(v)}{dv} = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left( 2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0.$$

Осы теңдеуді қанағаттандыратын  $v=0$  және  $v=\infty$  мәні  $f(v)$ -ның минимумына сәйкес келеді. Жақшадағы шаманы нольге айналдыратын  $v$  мәні іздеп отырған  $v_{\text{ык}}$ -нің мәні болып табылады:

$$v_{\text{ык}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (106.8)$$

(106.7)-ге ең ықтимал жылдамдықты қойып,  $f(v)$ -ның максимум мәнін табамыз.

$$f(v_{\text{ык}}) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}. \quad (106.9)$$

Таралу қисығының молекула массасы мен газ температурасына тәуелді түрде қалай өзгертіндігін зерттейік. (106.8) бен (106.9)-дан қисық максимумының температура артқанда (немесе молекуланың массасы кемігенде) оңға қарай жылжитыны және төмендейтіндігі шығады, сонымен қатар өзіміз білетіндей, қисықтың қамтитын ауданы өзгеріссіз қалады. 240-суретте не әр түрлі  $T_1$  және  $T_2$  температураларына жататын ( $m$  бірдей болғанда) не молекулалардың әр түрлі  $m_1$  және  $m_2$  массаларына ( $T$  бірдей) жататын қарастыруға болатын екі таралу қисығы салыстырылып берілген.

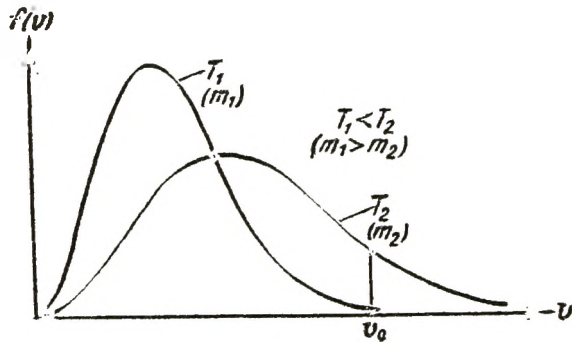


Жылдамдықтары қайсыбір  $v_0$  мәнінен артық болатын молекулалардың салыстырмалы саны

$$\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv$$

өрнегімен анықталады.

Графикте бұл интегралға ауданның  $v_0$ -ден оңға қарай жатқан қисықпен шектелген бөлігі сәйкес келеді. 240-суреттен көріп отырғанымыздай, жылдамдықтары  $v_0$ -ден



240-сурет.

асып түсетін молекулалардың салыстырмалы саны температура артқан кезде тез өседі.

7 - та б л и ц а

$\frac{v}{v_{\text{БК}}}$	$\frac{\Delta N}{N}, \%$	$\frac{v}{v_{\text{БК}}}$	$\frac{\Delta N}{N}, \%$
0—0,5	8,1	2—3	4,6
0,5—1,5	70,7	>3	0,04
1,5—2	16,6	>5	$8 \cdot 10^{-9}$

7-таблицада жылдамдықтардың әр түрлі интервалы үшін алынған молекулалардың (106.7) функциясына сәйкес келетін салыстырмалы саны  $\frac{\Delta N}{N}$  келтірілген.

Таблицадан көріп отырғанымыздай, молекулалардың 70%-тен артығының жылдамдықтарының ең ықтимал жылдамдықтан айырмашылығы 50%-тен аспайды. Молекулалардың 0,04%-і ғана жылдамдықтары ең ықтимал  $v_{\text{БК}}$  жылдамдықтан 3 есе артық болады.  $5v_{\text{БК}}$  жылдамдықтан артық жылдамдық орташа есеппен молекулалардың тек 12 миллиардтан бірінде ғана байқалады.

Молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуын біле отырып, жылдамдықтың, сондай-ақ жылдамдықтың функциясы болып табылатын кез келген шаманың, мәселен  $v^2$ -тың, орташа мәнін табуға болады. Жылдамдықтар осін шағын  $\Delta v_i$  интервалына бөлейік. Әрбір интервалға (106.2) бойынша, молекулалардың

$$\Delta N_{v_i} = N f(v_i) \Delta v_i \quad (106.10)$$

саны сәйкес келеді.

$\Delta v_i$  интервалы өте кішкене болғандықтан,  $\Delta N_{v_i}$  -дегі молекулалардың әрқайсысының жылдамдығын шамамен  $v_i$  -ге тең, яғни  $\Delta v_i$  интервалына жататын жылдамдықтардың бірінің мәніне тең деп алуға болады. Сонда барлық  $N$  молекулалардың жылдамдықтарының мәндерінің қосындысын  $\sum v_i \Delta N_{v_i}$  деп жазуға болады. Осы қосындыны молекулалар саны  $N$ -ге бөліп, орташа жылдамдық  $v$ -нің мәнін анықтаймыз [(106.10)-ды ескереміз]:

$$\bar{v} = \sum v_i f(v_i) \Delta v_i.$$

Қосындыдан интервалға өте отырып, мынаны табамыз:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (106.11)$$

Егер (106.11)-ге (106.7)-дегі  $f(v)$ -ның өрнегін қоссақ және есептеулер жүргізсек, онда былай болады:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (106.12)$$

Осыған ұқсас жылдамдықтың квадратының орташа  $v^2$  мәні үшін төмендегі өрнекті аламыз:

$$\bar{v}^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv.$$

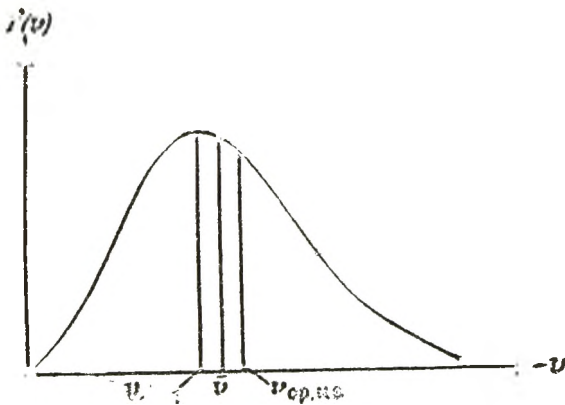
$f(v)$ -ны орнын алмастыра отырып есептеуден  $v^2 = 3kT/m$  шығады.  $\bar{v}^2$ -деп алынған квадрат түбір квадратталған орташа жылдамдық деп аталады. Сонымен,

$$v_{\text{ор. кв}} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (106.13)$$

Бұл нәтиже бұдан бұрын  $\varepsilon$  үшін табылған (99.11) өрнекпен бірдей. Осыған көз жеткізу үшін (99.11)-дегі  $\varepsilon$ -ді  $mv^2/2$ -мен алмастырсақ болғаны.  $\overline{v} \neq v$  және  $\overline{v^2} \neq \overline{v}^2$  болатындығын ескерту керек.

(106.8), (106.12) және (106.13)-терді салыстыра отырып,  $v_{\text{МК}}$ ,  $v$  және  $v_{\text{ОР}}$  -лардың өзгешеліктері тек сандық көбейткіштерде ғана болып, ал температура мен молекула массасына тәуелділіктері бірдей болатындығын байқауға болады. Егер  $v_{\text{МК}}$ -ды 1 деп алсақ, онда  $\overline{v} = 1,13$ ,  $v_{\text{ОР. КВ}} = 1,22$  болады (241-сурет).

Максвелл тағайындаған молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралу заңының және одан шығатын



241-сурет.

салдардың тек тепе-теңдікте тұрған газ үшін ғана орындалатынын тағы да баса айтқанымыз жөн. Заң кез келген  $N$  саны үшін орындалады. Онда да бұл сан жеткілікті үлкен болса, Максвелл заңы — статистикалық заң, ал статистика заңдары бірдей объектілердің неғұрлым көп санына қолданылған

сайын, соғұрлым дәлірек орындалады. Объектілердің саны аз болған кезде, статистиканың болжамдарынан едәуір ауытқу байқалады. Егер тепе-теңдікте тұрған газ қоспасы берілсе, онда молекулалардың әрбір сорты аралығындағы өздерінің  $m$  мәні үшін (106.7) таралу орындалады. Ауырырақ молекулалар жеңіл молекулаларға қарағанда орташа есеппен күрделірек қозғалады.

Молекулалардың жылдамдықтар бойынша

$$dN_v = N 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (106.14)$$

таралуынан шыға отырып, молекулалардың ілгерілемелі қозғалыстың кинетикалық энергияларының мәндері бойынша таралуын табуға болады. Ол үшін  $v$  айнымалыдан  $mv^2/2$ -ге тең  $\varepsilon$  айнымалыға өту керек. (106.14) —

өрнегіне  $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$  және  $dv = \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$  шамаларына алмастыру жасап, мынаны аламыз:

$$dN_\varepsilon = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \quad (106.15)$$

мұндағы  $dN_\varepsilon$  энергиясының мәні  $\varepsilon$ -нан  $\varepsilon + d\varepsilon$ -ға дейінгі аралықта болатын молекуланың санын білдіреді.

Сөйтіп,  $\varepsilon$  мәні бойынша молекуланың таралуы

$$f(\varepsilon) = A' e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} \quad (106.16)$$

функциясымен сипатталады. Мұндағы  $A'$ — нормалау көбейткіші, оның мәні  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}}$ .

Қорытындылай келе, мәселен, оттегі молекулаларының орташа жылдамдығын бағалап өтейік. Есептеулерді жеңілдету үшін (106.12)-дегі  $k/m$  қатынасын соған тең  $R/\mu$  қатынасымен алмастырған ыңғайлы. Сонда орташа жылдамдықтың өрнегі мына түрде болады:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (106.17)$$

Оттегінің молекулалық салмағы 32. Демек, киломольдің массасы  $\mu = 32$  кг/кмоль. Бөлменің температурасы  $300^\circ \text{K}$ . (106.17) формулаға оған енетін шамалардың санын қойсақ, мынаны аламыз:

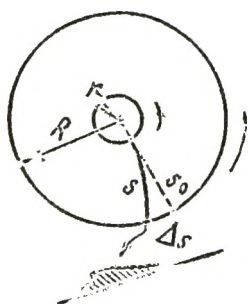
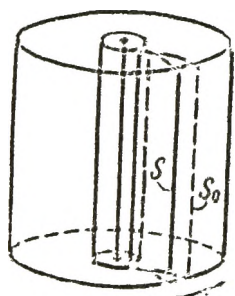
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 300}{3,14 \cdot 32}} \approx 500 \text{ м/сек.}$$

Сонымен, оттегінің әрбір молекуласы секунд сайын шамамен 0,5 км жол жүреді екен. Молекула басқа молекулалармен жиі-жиі соқтығысатын болғандықтан, бұл жол сынық сызық құрайтын көптеген кішігірім тұзулардан тұрады.

Сутегі молекулаларының массасы оттегі молекулаларыныкінен 16 есе жеңіл, сондықтан олардың сол температурадағы жылдамдығы оттегі молекулаларыныкінен 4 есе артық болады да бөлме температурасында орташа есеппен 2 км/сек шамасын құрайды.

## § 107. Максвелдің таралу заңын тәжірибеде тексеру

Молекулалардың жылдамдығын тұңғыш рет тәжірибеде 1920 жылы Штерн анықтады. Осы мақсатқа арналған прибор екі коасиальды цилиндрден тұрады (242-сурет). Прибордың осі бойынша күміс жалатылған платина жіп керілген. Жіпті электр тогымен қыздырған кезде оның бетінен күмістің атомдары буланып ұшып шығады.



242-сурет.

Ұшып шыққан атомдардың жылдамдықтары жіптің температурасына сәйкес келген. Жіпті тастап шыққан атомдар радиаль бағыттарда қозғалады. Ішкі цилиндрдің вертикаль орналасқан жіңішке ұзын саңылауы бар, ол арқылы атомның жіңішке шоғы (молекулалық шоқ) сыртқа өтеді. Күміс атомдары ауа молекулаларына соқтығысып ауытқымас үшін приборда ауа сиретілген. Сыртқы цилиндрдің бетіне жеткен күміс атомдары жіңішке вертикаль жолақ түрінде шөгіп қалады.

Егер приборды айналмалы қозғалысқа келтіретін болсақ, онда молекулалар шоғының ізі сыртқы цилиндрдің бетінде қайсыбір шамаға ығысады (242-сурет). Мұның себебі, күміс атомдары цилиндрдің арасындағы саңылаудан ұшып өткенше прибор  $\Delta\varphi$  бұрышына бұрылып үлгереді, нәтижесінде атомдар шоғына қарсы сыртқы цилиндрдің екінші бір учаскесі тап келеді. Бұл молекула шоғының алғашқы ізі  $s_0$ -ке қатысты  $\Delta s$  шамасына ығысқан болады да  $R\Delta\varphi$  ( $R$  — сыртқы цилиндрдің радиусы) күміс атомдарының қозғалысын айналмалы санақ системасындағы цилиндрмен байланыстыра қарастырып, іздің ығысуын  $2m[v\omega]$  шамасына тең кориолис күшінің әсерінен туады деп түсіндіруге болады.

Бастапқы және ығысқан күміс жолақтарының ара қашықтығы  $\Delta s$  цилиндр айналысының  $\omega$  бұрыштық жылдамдығымен, прибордың геометриясымен және атомдардың  $v$  жылдамдығымен өрнектеуге болады. Ұшып өту

уақытын  $\Delta t$  арқылы белгілеп, былай жазуға болады екен:

$$\Delta s = \omega R \Delta t. \quad (107.1)$$

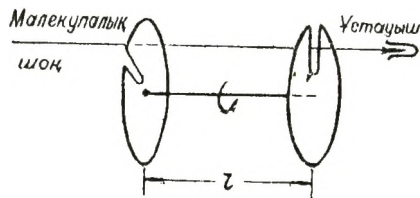
Ішкі цилиндрдің радиусы сыртқы цилиндрдің  $R$  радиусымен салыстырғанда өте аз болғандықтан, ұшып өту уақыты  $\Delta t$ -ні

$$\Delta t = \frac{R}{v}$$

деп алуға болады. Осы өрнекті (107.1)-ге қойып, алынған теңдеуді  $v$  жылдамдыққа қатысты шешіп, мынаны аламыз:

$$v = \frac{\omega R^2}{\Delta s}$$

Іздердің  $\Delta s$  ығысуын және прибордың айналыс жылдамдығын өлшеп, атомдардың  $v$  жылдамдығын анықтауға болады. Расында, жылдамдықтар бойынша таралудан атомдардың қозғалысы күрделене түседі, олардың жылдамдықтары да түрліше болып, ығысқан жолақ бұзылады<sup>1</sup>. Іздің профилін зерттей отырып (242-сурет), күміс атомдарының жылдамдықтар бойынша таралуын шамамен есептеуге болады.



243-сурет.

Штерн тәжірибесінің нәтижелері Максвелдің таралу заңынан шығатын атомдардың орташа жылдамдығының дұрыстығын дәлелдеді. Таралудың сипаты жайлы бұл тәжірибе тек жуықталған мәліметтерді ғана бере алады.

Таралу заңы дәлірек Ламмерттің тәжірибесінде тексерілді (1929 жыл). Ол молекулалар шоғын бір-бірімен  $\phi$  бұрышын жасайтын радиал орналасқан саңылаулары бар айналмалы қозғалыстағы екі диск арқылы жіберді (243-сурет). Бірінші дискідегі саңылаудан өткен молекулалардың ішінен екінші диск арқылы, сол мезетте молекулалар шоғының жолына екінші дискінің саңылауы

<sup>1</sup> Прибор қозғалмай тұрған кездегі іздің ені тек прибордың геометриясы арқылы, оның ішінде молекулалар шоғы өтетін саңылаудың ені арқылы анықталады.

дәл келген, молекулалар ғана өтеді. Анағұрлым жылдам қозғалатын молекулалар екінші дискіге ерте жетсе, ал баяуырақ қозғалатындары — кеш жетеді де, екеулері де екінші дискінің саңылауынан өтпейді. Сөйтіп, бұл тетік шоқтың ішінен белгілі бір мәндегі жылдамдықтары бар молекулаларды бөліп алуға мүмкіндік береді (саңылаулар ені белгілі бір шамада болғандықтан, аспап жылдамдықтары  $\Delta v$  интервалында жататын молекулаларды бөліп алады) Прибор бөліп алатын молекулалардың орташа жылдамдығы мына шарттан табылды: молекулалардың дискілерінің арасындағы  $l$  қашықтықты ұшып өтуге жұмсайтын  $t_1$  уақыты ( $t_1 = l/v$ ) дискілердің  $\varphi$  бұрышқа бұрылуға кететін  $t_2$  уақытымен дәл келуі тиіс ( $t_2 = \varphi/\omega$ ) Осы екі уақытты теңестіріп, мынаны аламыз:

$$v = \frac{\omega l}{\varphi}$$

Прибордың айналыс жылдамдығы  $\omega$ -ны (немесе дискілердің арасындағы  $\varphi$  бұрышын) өзгерте отырып, молекулалар шоғынан жылдамдықтары әр түрлі мәндегі молекулаларды бөліп алуға болады. Содан кейін осы молекулаларды белгілі бір уақыттың ішінде бақылай отырып, олардың шоқтағы салыстырмалы санын анықтауға болады.

Ламмерттің тәжірибесінің және осы мақсатта қойылған басқа да тәжірибелердің нәтижелері Максвелдің теория жүзінде тағайындаған таралу заңымен толық үйлеседі.

Ескерте кететін жәйт ыдыстағы тесік арқылы өткен шоқтағы молекулалардың жылдамдықтар бойынша таралуы жабық ыдыстағы молекулалардың таралуынан аздап өзгеше болады. Өйткені анағұрлым жылдамырақ қозғалатын молекулалар баяуырақ қозғалатын молекулаларға қарағанда тесік арқылы көбірек өтеді, сондықтан шоқ анағұрлым жылдамырақ қозғалатын молекулаларымен байи түседі. Тесік арқылы бірлік уақытта өтетін молекулалар саны  $v$ -ге пропорционал болғандықтан, шоқтағы молекулалардың таралуы (106.6) функциясымен емес,

$$f_1(v) = A_1 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3$$

функциясымен сипатталатын болады, мұндағы  $A_1$  — нормалау көбейткіші. Бұл кездегі ең ықтимал жылдамдық

мынаған тең:  $v_{\text{ык}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  орташа жылдамдық  $v' = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$  болады.

### § 108. Барометрлік формула

Қайсыбір  $h$  биіктіктегі атмосфералық қысым жоғарырақ жатқан газ қабатының салмағының әсерінен болады.  $h$  биіктіктегі қысымды  $p$  деп белгілейік. Сонда  $h+dh$  биіктіктегі қысым  $p-dp$  болады, егер мұнда  $dh$  нольден үлкен болса, онда  $dp$  нольден кіші болады, өйткені атмосфераның жоғарырақ жатқан қабаттарының салмағы, демек, қысым да, биіктеген сайын азая берсін.  $p$  және  $p+dp$  қысымдарының айырымы, табанының ауданы бірге тең, ал биіктігі  $dh$  болатын цилиндр көлеміндегі газдың салмағына тең болады (244-сурет):

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

мұндағы  $\rho$  —  $h$  биіктіктегі газдың тығыздығы.

Осыдан:

$$dp = -\rho g dh. \quad (108.1)$$

Күй теңдеуін пайдаланып, газдың тығыздығын қысым мен температура арқылы өрнектеуге болады. Жоғарыда атап өткеніміздей, қалыпты жағдайларға жуықтаған кезде, атмосфера құрамына кіретін газдардың қасиеттерінің идеал қасиеттерінен айырмашылығы аз болады. Сондықтан (98.14) теңдеуін пайдаланатын боламыз. Осы теңдеуді  $m/V$ -ге қатысты шешіп,  $\rho$  тығыздықты табамыз:

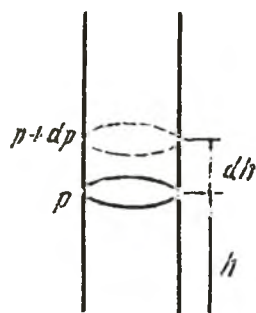
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (108.2)$$

$\rho$ -ға арналған өрнекті (108.1)-ге қойып, мынаны аламыз:

$$dp = -\frac{\Gamma\mu g}{RT} dh,$$

осыдан

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (108.3)$$



244-сурет.



$T$  температура қайсыбір  $h$ -тан алынған функция болып табылады. Егер осы функцияның түрі белгілі болса, онда (108.3) теңдеуді интегралдап,  $p$ -ні  $h$ -тың функциясы түрінде анықтай аламыз. Температура тұрақты болғанда (108.3)-ті интегралдасақ, мынаны аламыз:

$$\ln p = -\frac{\mu gh}{RT} + \ln C,$$

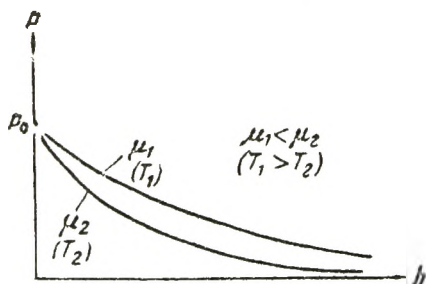
мұндағы  $C$  — тұрақты (интегралдау тұрақтысын  $\ln C$  арқылы өрнектеген ыңғайлы болады) Алынған өрнекті потенциалдай отырып, мынаны табамыз:

$$p = Ce^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

Осыған  $h=0$ -ді қойып, мынаны аламыз:

$$p_0 = C$$

мұндағы  $p_0$  —  $h=0$  биіктіктегі қысым.



245-сурет.

Сөйтіп, температураны тұрақты деп алып, қысымның биіктікке тәуелділігі жөніндегі біздің жорамалымыз

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \quad (108.4)$$

формуласымен өрнектеледі. Бұл формула барометрлік деп аталады. Бұдан, газ неғұрлым ауырласа ( $\mu$

артса) және температура төмендесе, қысымның биіктеген сайын тезірек азаятындығы шығады. 245-суретте (108.4) түріндегі екі қисық келтірілген, оларды әр түрлі  $\mu$  мәндеріне ( $T$  бірдей болғанда) немесе әр түрлі  $T$  мәндеріне ( $\mu$  бірдей болғанда) сәйкес келеді деп алуға болады.

## § 109. Больцманның таралу заңы

(108.4)-тегі  $p$  қысымды  $nkT$  арқылы алмастырып [(99.12)-ні қараңыз], бірлік көлемдегі молекулалар санының биіктік бойынша өзгеру заңын анықтаймыз:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

Мұндағы  $n_0$  — нольге тең болған биіктікте бірлік көлемдегі молекулалар саны, ал  $n$  —  $h$  биіктіктегі дәл сондай сан.

$\mu/R$  қатынасын оған тең  $m/k$  қатынасымен (мұндағы  $m$  — бір молекуланың массасы,  $k$  — Больцман тұрақтысы) алмастырып табылған өрнекті түрлендіруге болады:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (109.1)$$

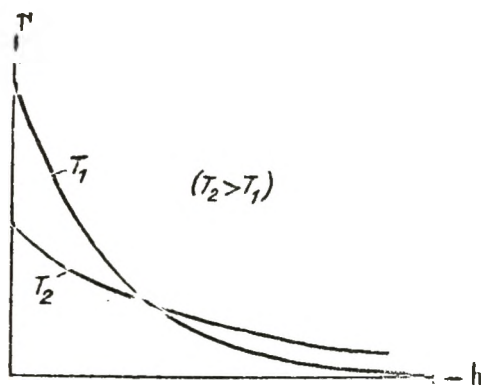
(109.1) өрнегінен температура төмендегенде нольге тең емес биіктіктерде бөлшектер санының азаятындығы, ал  $T=0$  болғанда, нольге айналатындығы шығады (246-сурет). Сөйтіп, абсолют нольде барлық бөлшектер жер бетінде орналасқан болар еді. Жоғары температураларда, керісінше, биіктікке көтерілген сайын  $n$  баяу кемиді, ендеше, молекулалар биіктікке көтерілген сайын біркелкі таралады дерлік.

Мұның физикалық мәнін оңай түсінуге болады. Молекулалардың биіктік бойынша әрбір нақты таралуы екі түрлі тенденцияның әсерлерінің нәтижесінде қалыптасады:

1) молекулалардың жерге тартылуы ( $mg$ -мен сипатталатын) оларды жер бетінде орналастыруға тырысады, 2) молекулалардың жылулық қозғалысы ( $kT$  шамасымен сипатталатын) оларды барлық биіктіктер бойынша біркелкі таратуға тырысады. Неғұрлым  $m$  үлкен, ал  $T$  аз болған сайын, бірінші тенденция күшейіп, молекулалар жер бетіне таяу жерде қоюлана түседі.  $T=0$  болатын шектік жағдайда жылулық қозғалыс толық тоқталып, молекулалар тартылыстың әсерінен жер бетінде орналасады. Жоғары температуралар кезінде жылулық қозғалыс артып, молекулалардың тығыздығы биіктеген сайын баяу түрде азая береді. Әр түрлі биіктікте молекуланың потенциялық энергия қоры да әр түрлі болады:

$$\epsilon_p = mgh. \quad (109.2)$$

Демек, молекулалардың биіктік бойынша таралуы сонымен қатар, олардың потенциялық энергияларының мәндері бойынша да таралуы болып табылады. (109.2)-



246-сурет.

ні пайдаланып, (109.1)-формуланы төмендегідей жазуға болады:

$$n = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}, \quad (109.3)$$

мұндағы  $n_0$  — молекуланың потенциялық энергиясы нольге тең болатын жердегі бірлік көлемге келетін молекулалар саны,  $n$  — молекуланың потенциялық энергиясы  $\epsilon$  -ға тең болатын кеңістіктегі нүктелерге сәйкес келетін бірлік көлемдегі молекулалар саны.

(109.3)-тен потенциялық энергиясы аз болатын жерлерде молекулалардың тығыз орналасып, ал потенциялық энергиясы көп болатын жерлерде — сирегірек орналасатындығы шығады.

(109.3) бойынша, молекуланың потенциялық энергиясының мәндері  $\epsilon_{p1}$  және  $\epsilon_{p2}$  болатын нүктелердегі  $n_1$ -дің  $n_2$ -ге қатынасы

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2}}{kT}} \quad (109.4)$$

Больцман (109.3) таралудың, одан шығатын (109.4) формуланың да тек жердің тартылыс күшінің потенциялық өріс жағдайында ғана емес, кез келген күштің потенциялық өрісінде хаосты жылулық қозғалыс күйінде болатын кез келген бірдей бөлшектер жиынтығы үшін де орындалатындығын дәлелдеді. Осыған сәйкес (109.3) таралу Больцманның таралу заңы деп аталады.

Максвелдің заңы бөлшектердің кинетикалық энергиялары бойынша таралуын берген кезде Больцманның заңы бөлшектердің потенциялық энергияларының мәндері бойынша таралуын береді. Таралу заңдарының екеуіне де тән нәрсе ол — экспоненциялық көбейткіштің барлығы, оның дәрежесінде жеке молекуланың кинетикалық энергиясының немесе оған сәйкес потенциялық энергиясының, молекуланың жылулық қозғалысының орташа энергиясына қатынасы тұр.

(106.14) және (109.3) таралуларын, жылдамдықтары  $v$  мен  $v + dv$  аралығында жататын бірлік көлемдегі молекулалар санының

$$dn_{\epsilon_p, v} = n_0 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_p + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv \sim e^{-\frac{E}{kT}} v^2 dv \quad (109.5)$$

шамасына тең болатындығын анықтайтын Максвелл-Больцман заңына біріктіруге болады, мұндағы  $n_0 - \epsilon_p = 0$  болатын нүктедегі бірлік көлемге келетін молекулалар саны, ал  $E$  — молекуланың толық энергиясы, ол оның кинетикалық және потенциалдық энергиясының қосындысына тең болады. (106.5) шартына сәйкес, (109.5)-ті 0-ден  $\infty$ -ке дейін интегралдасақ, (109.5) таралуымен дәл келетін

$$n = n_0 e^{-\frac{\epsilon_p}{kT}}$$

өрнегіне келеміз.

(109.5) — таралуында потенциалдық энергия  $\epsilon_p$  және кинетикалық энергия  $mv^2/2$ , демек, толық энергия  $E$ -нің мәндері үздіксіз қатар құрайды. Атомның ішкі энергиясына ұқсас, бөлшектің толық энергиясы  $E_1, E_2, \dots$ , тәрізді дискретті мәндер қабылдайтын болса, онда Больцман таралуы

$$N_i = A e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (109.6)$$

түрінде жазылады, мұндағы  $N_i$  — энергиясы  $E_i$  болатын күйдегі бөлшектер саны,  $A$  —

$$\sum N_i = A \sum e^{-\frac{E_i}{kT}} = N$$

шартын қанағаттандыратын пропорционалдық коэффициент ( $N$  — қарастырылып отырған системадағы бөлшектер саны).

Соңғы қатыстан табылған  $A$ -ның мәнін (109.6) формулаға қойып, энергияның дискретті мәндері үшін Больцман таралуының өрнегіне келеміз:

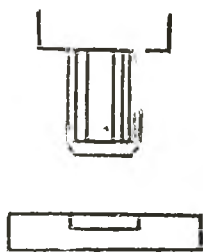
$$N_i = \frac{N e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}} \quad (109.7)$$

## § 110. Перреннің Авогадро санын анықтауы

(109.4) таралу Перреннің (1909 ж.) Авогадро санын анықтау жөніндегі тәжірибелерінің негізінде ашылған болатын. Сұйықта қалқын жүрген қатты кішкене бөлшектер броундық қозғалыс деп аталатын үздіксіз ретсіз қозғалыс күйінде болады (91-параграфты қараңыз). Мұның себебі мынада: бөлшектердің мөлшерлері мейлін-

ше кішкене болғанда молекулалармен соқтығысқанда оған әр жақтан берілетін импульстар бір-бірін компенсацияламайды екен. Өлшемі едәуір бөлшектерге әр жақтан молекулалардың басым көпшілігі бір мезгілде соқтығысатындықтан, нәтижесінде молекулалар соқтығысуларының орташа мәні алынады. Бөлшектің мөлшері кішкене болған кезде жеке молекулалар жылдамдықтарының және соқтығысатын молекулалар санының орташа мәнінен ауытқуы біліне бастайды. Егер бөлшекке бір жағынан соғатын молекулалардың жылдамдығы немесе саны, оған екінші жағынан соғып жатқан молекулалардың жылдамдығынан немесе санынан өзгеше болса, онда бөлшекке берілетін қорытқы импульс польден ерекше болады да бөлшек сәйкес бағытпен қозғала бастайды. Келесі мезетте қорытқы импульстың бағыты басқа болады. Демек, бөлшек өне бойы ретсіз орын ауыстырып отырады.

Броундық қозғалыс кішкене бөлшектердің молекулалардың жылулық қозғалысына еріп кететіндігін көрсетеді.



247-сурет.

Жылулық қозғалысқа қатыса отырып, мұндай бөлшектер өздерін орасан зор молекулалар жиынтығы тәрізді сезінеді, сондықтан олар кинетикалық теорияның заңдылықтарына, оның ішінде (109.4) заңына бағынуы тиіс.

Перрен тәжірибелерінде негізгі қиындық бірдей бөлшектерді дайындап, олардың массаларын анықтау болды. Центрифугирлеу әдісін бірнеше қайтара қолданып, Перрен радиусы микронның ондық үлесі дей болатын бірдей гуммигут<sup>1</sup> шариктерінен тұратын біртекті эмульсия дайындай алды. Эмульсия тереңдігі 0,1 мм жазық шыны кюветке құйылып, микроскоп арқылы бақыланды (247-сурет). Микроскоптың көру өрісінің тереңдігі өте аз еді. Ол тек қалыңдығы 1 мк болатын горизонталь қабаттағы бөлшектерді ғана көрсете алды. Микроскопты вертикаль бағытта жылжыта отырып, броундық бөлшектердің биіктік бойынша таралуын зерттеуге мүмкін болды. Микроскопта көрінетін қабаттың кюветтің түбінен биіктігін  $h$  әрпімен белгілейік. Микроскоптың көру өрісіне түсетін бөлшектердің саны

<sup>1</sup> Гуммигут — Ост Индияда және Цейлонда өсетін кейбір ағаш түрлерінің қабықтарын тілгенде алынатын қойылтылған сүтті шарыш.

$$\Delta N = n(h) S \Delta h$$

формуласымен анықталады, мұндағы  $n(h)$  — биіктіктегі  $h$  бірлік көлемге келетін броундық бөлшектердің саны,  $S$  — аудан, ал  $\Delta h$  — микроскоптың көру өрісінің тереңдігі.

Броундық бөлшектерге (109.3) — формуланы қолданып,

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{p' h}{kT}}$$

деп жаза аламыз, мұндағы  $n_0$  —  $h=0$  болғанда бірлік көлемдегі бөлшектер саны,  $p'$  — эмульсиядағы Броундық бөлшек, яғни Архимед заңындағы түзетуді ескере отырып алынған салмақ.

Бөлшектер саны  $\Delta N$ -ның екі түрлі  $h_1$  және  $h_2$  биіктіктерге арналған өрнегін жазып, мынаны аламыз:

$$\Delta N_1 = n_0 e^{-\frac{p' h_1}{kT}} S \Delta h,$$

$$\Delta N_2 = n_0 e^{-\frac{p' h_2}{kT}} S \Delta h.$$

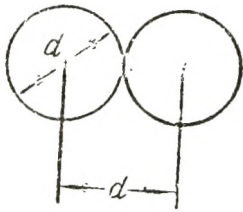
Ақыры,  $\Delta N_1/\Delta N_2$  қатынасын логарифмдеп, мынандай өрнекке келеміз:

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{p' (h_2 - h_1)}{kT}.$$

Осы формула арқылы өлшенген  $p'$ ,  $T$  және  $(h_2 - h_1)$   $\Delta N_1$  және  $\Delta N_2$  бойынша Больцманның тұрақтысы  $k$ -ны анықтаймыз. Одан әрі, газдың универсаль тұрақтысын  $R$ -ды  $k$ -ға бөліп, Авогадро санын анықтауға болады. Перреннің әр түрлі эмульсия үшін тапқан  $N_A$  мәні  $6,5 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>-ден  $7,2 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>-ге дейінгі аралықта жатты. Басқа дәлірек әдістермен анықталған  $N_A$  мәні  $6,02 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>. Сөйтіп, Перреннің тапқан мәні басқа әдістермен табылған мәндермен жақсы үйлеседі, бұл броундық бөлшектерге (109.4) таралуын қолдануға болатындығын көрсетеді.

## § 111. Еркін жүру жолының орташа ұзындығы

Жылудық қозғалыстағы газ молекулалары бір-бірімен үздіксіз соқтығыста болады. Соқтығысу кезінде екі молекуланың центрлерінің арасындағы ең минимал қашықтық молекуланың эффективтік диаметрі  $d$  деп аталады (248-сурет)



248-сурет.

Ілгеріде көретініміздей (117-параграфты қараңыз), эффективтік диаметр молекулалардың жылдамдықтары артқан кезде, яғни температура жоғарылаған кезде, шамалап азаяды.  $\sigma = \pi d^2$  шамасы молекуланың эффективтік қимасы деп аталады.

Бірінен соң бірі болатын екі соқтығысу арасындағы уақытта молекула еркін жүру ұзындығы деп аталатын қайсыбір  $l$  жол жүреді. Еркін жүру жолы — кездейсоқ шама. Кейде молекула соқтығысулар арасында бірталай жол жүрсе, басқа уақытта бұл өте мардымсыз болады. Молекуланың соқтығысуы  $l$  жол жүріп өтетіндігінің  $\omega(l)$  ықтималдығының

$$\omega(l) = e^{-\frac{l}{\lambda}} \quad (111.1)$$

формуласы бойынша анықталатындығын көрсетуге болады, мұндағы  $\lambda$  — бірінен соң бірі болатын екі соқтығысулар арасында молекуланың жүріп өтетін, орташа еркін жүру жолы деп аталатын орташа  $l$  жолы. (111.1)-ге сәйкес, молекуланың соқтығысусыз қалдай да бір жол жүруінің ықтималдығы  $l$ -дің артуымен экспоненциал түрінде кемі түседі. Бір секунд ішінде молекула орташа есеппен орташа жылдамдық  $v$ -ге тең жол жүреді. Егер бір секунд ішінде ол  $\nu$  рет соқтығысатын болса, онда орташа еркін жүру жолының

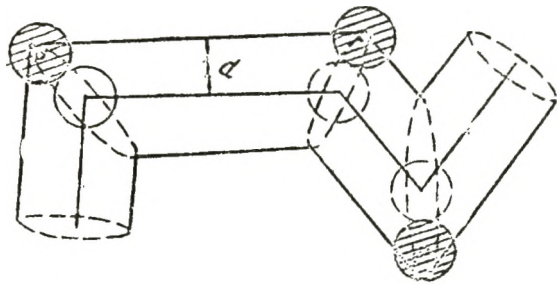
$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} \quad (111.2)$$

шамасына тең болатындығы сөзсіз.

Соқтығысулардың орташа саны  $\nu$ -ді есептеп шығару үшін, алдымен қарастырылып отырған молекуладан басқа молекулалардың барлығы да өз орындарында қозғалыссыз қалады деп ұйғаралық. Бөлін алған молекула-

ның қозғалысын бақылайық. Қозғалмай тұрған молекуламен соқтығысып, келесі соқтығысқанға дейін ол түзу сызықты қозғалыста болады (249-сурет)

Бұл соқтығысу тыныш тұрған молекуланың центрі ұшып келе жатқан молекуланың бағытынан молекуланың эффективтік диаметрі  $d$ -ден аз қашықтықта орналасқан жағдайда өтеді. Соқтығысудың нәтижесінде молекула



249-сурет.

өзінің ұшу бағытын өзгертіп, центрі 249-суретте көрсетілген радиусы  $d$  цилиндрдің шегінде орналасқан молекуламен кездескенше, тағы да біршама уақыт түзу сызықты қозғалады.

Бір секунд ішінде молекула  $\bar{v}$ -ге тең жол жүреді. Осы уақыттың ішінде тыныш тұрған молекулалармен соқтығысу санының, центрлері ұзындығы  $\bar{v}$ , радиусы  $d$  және көлемі  $\pi d^2 \bar{v}$  болатын сынық цилиндрдің ішінде қалатын молекулалардың санына тең болатындығы сөзсіз. Осы көлемді бірлік көлемдегі молекулалар саны  $n$ -ге көбейтіп, қозғалыстағы молекуланың бір секунд ішінде қозғалмай тұрған молекулалармен соқтығысуларының орташа санын аламыз:

$$v' = \pi d^2 \bar{v} n.$$

Шынында, барлық молекулалар да қозғалыста болады, сондықтан соқтығысулар саны молекулалардың бір-біріне қатысты қозғалысының орташа жылдамдығымен анықталады. Қажетті есептеулер көрсеткендей, молекулалардың салыстырмалы қозғалысының орташа жылдамдығы молекулалардың ыдыстың қабырғасына қатысты алынатын жылдамдығынан 2 есе артық болады. Сондықтан соқтығысулардың бірлік уақыттағы орташа саны

$$v = \frac{1}{2} \pi d^2 \bar{v} n \quad (111.3)$$

шамасына тең. Осы санды (111.2)-ге қойып, еркін жүрудің орташа жолына арналған өрнекке келеміз:



$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (111.4)$$

Эффективтік диаметр  $d$ -ні молекуланың  $\sigma$  эффективтік қимасымен алмастырып, төмендегі формулаға келеміз:

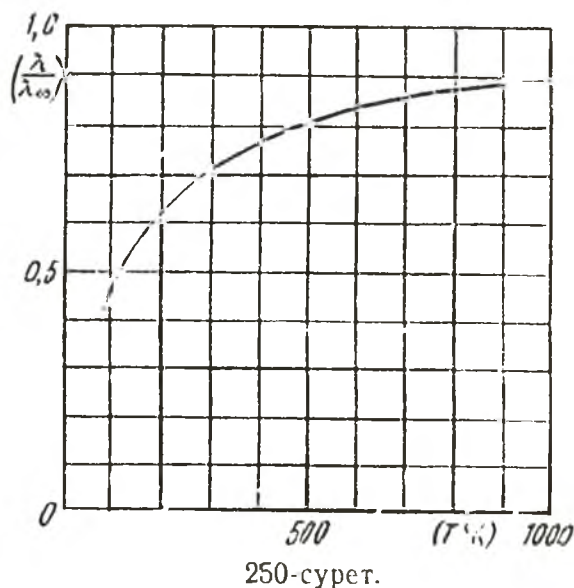
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n} \quad (111.5)$$

Температура тұрақты болғанда  $n$  қысым  $p$ -ге пропорционал өзгертіндіктен, еркін жүрудің орташа жолы қысымға кері пропорционал болады:

$$\lambda \sim \frac{1}{p} \quad (111.6)$$

Атап өткеніміздей, молекулалардың эффективтік диаметрі, температура артқан сайын, азая түседі. Сондықтан орташа еркін жүру жолы температураның жоғарлауымен артады.  $\lambda$ -ның  $T$ -ге тәуелділігі Сезерленд формуласымен өрнектеледі:

$$\lambda = \lambda_{\infty} \frac{T}{T + C}, \quad (111.7)$$



мұндағы  $C$  — Сезерленд тұрақтысы деп аталатын әрбір газға тән тұрақты шама, оның өлшемділігі температуранікіндей.  $\lambda_{\infty}$  —  $T = \infty$  болғандағы орташа еркін жүру жолы.

(111.7)-ден  $T = C$  болғанда  $\lambda$  мәнінің  $0,5\lambda_{\infty}$  болатындығы шығады.

250-суретте оттегі үшін ( $C=125^\circ$ )  $\lambda$ -ның температу-раға тәуелділігі келтірілген.

Орташа еркін жүру жолын және бір секунд ішіндегі соқтығысулар санын бағалайық. 92-параграфта біз молекулалардың мөлшерінің бірнеше ангстрем шамасында болатындығын тағайындадық. Молекуланың эффективтік радиусы  $1 \text{ \AA}$ -ге, яғни  $10^{-10} \text{ м}$ -ге тең деп алайық. Қалыпты жағдайларда  $n$  Лошмидт санына, яғни  $2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ -ге тең болады. Осы нәтижелерді (111.4) формулаға қойып,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 2,68 \cdot 10^{25}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$$

болатындығын көреміз. Қысым  $10^{-3} \text{ мм}$  сын. бағ-на тең болғанда (шамамен  $10^{-6} \text{ ат}$ )  $\lambda$  шамамен  $10 \text{ см}$  болады. Демек, егер ыдыстың сызықтық мөлшерлері бірнеше сантиметр шамасында болатын болса, онда мұндай қысым кезінде молекулалар қабырғадан қабырғаға дейін соқтығыспай-ақ өте алады. Қысым  $10^{-6} \text{ мм}$  сын. бағ-на тең болғанда  $\lambda$  шамамен ондаған метрге жетеді.

8-таблицада кейбір газдардың қалыпты жағдайлардағы  $\lambda$  мәндері мен молекулалардың эффективтік диаметрлері келтірілген.

8 - т а б л и ц а

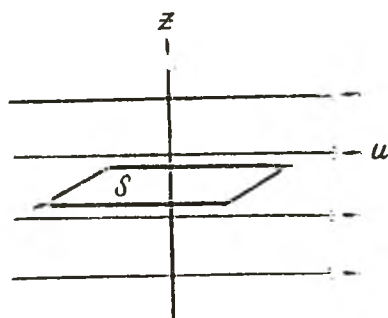
Газ	$0^\circ\text{C}$ және $760 \text{ мм}$ сын. бағ-насындағы $\lambda, \text{ м}$	$d, \text{ \AA}$	Газ	$0^\circ\text{C}$ және $760 \text{ мм}$ сын. бағ-насындағы $\lambda, \text{ м}$	$d, \text{ \AA}$
$\text{H}_2$	$1,10 \cdot 10^{-7}$	2,75	$\text{N}_2$	$0,59 \cdot 10^{-7}$	3,45
$\text{He}$	$1,75 \cdot 10^{-7}$	2,18	$\text{Ауа}$	$0,60 \cdot 10^{-7}$	3,74
$\text{O}_2$	$0,63 \cdot 10^{-7}$	3,64	$\text{CO}_2$	$0,39 \cdot 10^{-7}$	4,65

Бір секунд ішінде болатын соқтығысулар санын молекулалардың орташа жылдамдығы  $\bar{v}$ -ні  $\lambda$ -ға бөлу арқылы анықтауға болады. 106-параграфта оттегі үшін  $\bar{v}$ -нің  $500 \text{ м/сек}$  шамасында болатындығын анықтадық. Осы шаманы 8-таблицадан алынған  $0,63 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  мәніне бөлсек, бір секунд ішіндегі соқтығысулар санының шамамен  $8 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$ -қа тең болатындығын табамыз. Сонымен, қалыпты жағдайларда, соқтығысулар саны секун-

дына бірнеше миллиард болады екен. Қысым азайған кезде соқтығысулар саны да азайып, қысымға пропорционал өзгеріп отырады.

## § 112. Тасымал құбылысы. Газдардың тұтқырлығы

Осы кезге дейін біз тепе-тең күйде тұрған газды қарастырып келдік. Мұндай күй газдың алып тұрған көлемінің барлық нүктесінде температура, қысым, әр түрлі сорттағы молекулалардың салыстырмалы саны және т. б. сияқты шамалардың бірдей болатындығымен сипатталады. Енді біз газ тепе-тең күйден ауытқыған кездегі құбылыстарды қарастыралық, сонымен қатар, осы ауыт-



251-сурет.

қулардың аса үлкен болмаған жағдайымен шектеле тұралық. Алдағы уақытта кейбір себептермен түсіндірілетін осындай құбылыстар тасымалдау құбылысы деп аталады. Біз осы құбылыстардың тек үшеуін ішкі үйкеліс немесе тұтқырлықты, жылу өткізгіштікті және диффузияны ғана қарастырамыз.

Статистикалық физиканың тек денелердің тепе-тең күйлерін қарастыратындығын атап өтеміз. Тепе-тең күйден ауытқыған кезде пайда болатын құбылыстарды зерттейтін ғылым физикалық кинетика деп аталады. Көшіру құбылыстарын қарастыруды біз газдың тұтқырлығынан бастаймыз. Егер газ ағынындағы  $u$  жылдамдық қабаттан қабатқа өзгеріп отыратын болса, онда қатар жатқан екі қабаттың арасындағы шекарада ішкі үйкеліс күші әсер ететін болады (251-сурет), оның шамасы, өзіміз механикадан білетініміздей, төмендегідей эмпирикалық формуламен анықталады:

$$f = \eta \frac{du}{dz} S, \quad (112.1)$$

мұндағы  $\eta$  — тұтқырлық коэффициенті немесе ішкі үйкеліс коэффициенті,  $\frac{du}{dz}$  — жылдамдықтың градиенті немесе қабаттарды бөліп тұрған бетке перпендикуляр  $z$  бағытында газдың қозғалыс жылдамдығы  $u$ -дың қанша-

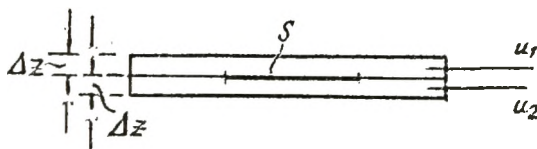
лықты тез өзгертіндігін көрсететін шама,  $S$  — күш түсірілген беттің шамасы.

Ішкі үйкеліс күшінің пайда болуын түсіну үшін қалыңдығы  $\Delta z$ , бір-біріне жанасып жатқан екі газ қабатын қарастырайық. Жанасқан қабаттар әр түрлі  $u_1$  және  $u_2$  жылдамдықтармен қозғалады деп есептейік (252-сурет). Газдың әрбір молекуласы екі түрлі қозғалысқа: орташа жылдамдығы  $\bar{v}$ -ге тең хаосты жылулық қозғалысқа және жылдамдығы  $u$ -дан көп кіші  $\bar{v}$  ( $v \sim 10^3$  м/сек, дауыл кезіндегі желдің жылдамдығы  $\sim 10^2$  м/сек) жылдамдықтағы ретті қозғалысқа қатысады.

Қайсыбір уақыт мезетінде қабаттардың импульстары  $K_1$  және  $K_2$  болсын. Бұл импульстар тұрақты болып қалмайды, өйткені жылулық қозғалыстың әсерінен молекулалардың бір қабаттан екінші қабатқа үздіксіз өтіп отыруы жүріп жатады.  $\Delta t$  уақыттың ішінде  $S$  бет арқылы екі бағытта саны бірдей

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \bar{v} S \Delta t \quad (112.2)$$

болатын молекулалар өтеді (ретті қозғалыстың молекулалардың жылдамдығына болымсыз әсерін ескермеуге болады)



252-сурет.

Келесі қабатқа өткен молекула осы қабаттың молекулаларының соқтығысына ұшырайды, осының нәтижесінде ол өзінің артық импульсын басқа молекулаларға береді (егер ол жеделірек қозғалатын қабаттан келсе) немесе басқа молекулалардың есебінен өзінің импульсын арттырады (егер баяуырақ қозғалатын қабаттан келсе). Ақыры, тезірек қозғалатын қабаттың импульсы азайып, баяуырақ қозғалатын қабаттың импульсы артады.

Мәселен,  $\Delta t$  уақыт ішінде бірінші қабаттан молекулалардың әкететін импульсы

$$\Delta K_1 = \Delta N m u_1$$

шамасына тең, мұндағы  $\Delta N$  — (112.2) формуламен анықталады,  $m$  — молекуланың массасы.

Мұнымен бір мезгілде бұл қабатқа

$$\Delta K_1'' = \Delta N m u_2$$

импульс әкелінеді.

Демек,  $\Delta t$  уақытта бірінші қабаттың импульсы

$$\Delta K_1 = \Delta K_1'' - \Delta K_1' = \Delta N m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_2 - u_1) S \Delta t$$

шамасына тең өсімше алады.

Осы сияқты пайымдаудан екінші қабаттың импульсының да

$$\Delta K_2 = -\Delta K_1$$

шамасындай өсімше алатынын анықтауға болады. Импульстың өзгерісі мен күштің арасындағы байланысқа сүйене отырып, қабаттардың қозғалысы  $S$  бетінің бойында бірінші қабатқа

$$f_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_2 - u_1) S \quad (112.3)$$

күш әсер ететіндей, ал екінші қабатқа

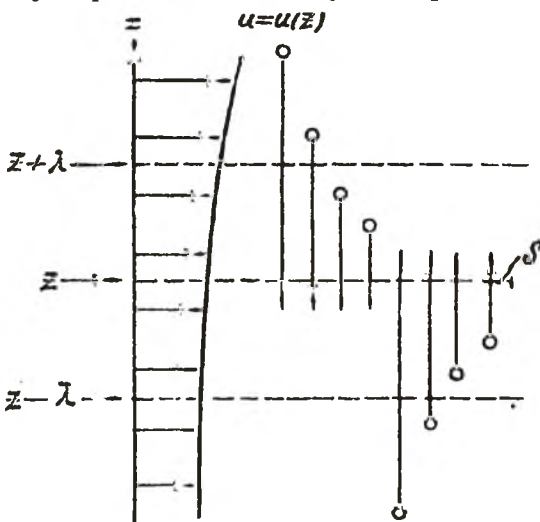
$$f_2 = -f_1 = \frac{1}{6} n \bar{v} m (u_1 - u_2) S$$

шамасындағы (—) таңбалы күш әсер ететіндей түрде болады деп айта аламыз.

(112.3) формуладан, іргелес қабаттардың өз ара әсерлесу күшінің, молекулалардың шектесу беті арқылы бір

секунд ішінде алып өтетін импульсына тең болатындығы көрінеді.

Үйкеліс күшінің ақырғы формуласын алу үшін, біз ұйғарғандай жылдамдық екі қабаттың шектесу бетінде секірмелі түрде өзгере алмайтындығын, тек қабаттарға перпендикуляр  $z$  бағытында үздіксіз өзгеретіндігін ескеру керек.  $[u = u(z)$  253-суретті қараңыз].  $S$  бет арқы-



253-сурет.

лы ұшып өтетін әрбір молекула ақырғы соқтығысу болып өткен жердегі  $u$  жылдамдықтың мәнімен анықтала-тын импульсты алып өтеді.  $S$  беті арқылы әр түрлі

$l$  қашықтықтарда соқтығысуларда болған молекулалар өтеді, сонымен қатар, әр түрлі  $l$  шамаларының ықтималдығы (111.1) формуламен анықталады. Орташа есеппен алғанда, соңғы соқтығысу  $S$  беттен орташа еркін жүру жолында  $\lambda$ -ға тең қашықтықта болады (253-сурет). Сондықтан  $S$  арқылы жоғарыдан төмен қарай өтетін (суретте) молекулалардың жылдамдығы координаталары  $z + \lambda$  болатын қимаға сәйкес келетін жылдамдыққа, ал төменнен жоғары қарай өтіп жатқан молекулалардың жылдамдығы координаталары  $z - \lambda$  болатын қимаға сәйкес келетін жылдамдыққа тең болады деп алу керек.  $\lambda$  өте аз болатындықтан, бұл жылдамдықтарды төмендегі түрде жазуға болады:

$$\left. \begin{aligned} u(z + \lambda) &= u(z) + \frac{du}{dz} \lambda, \\ u(z - \lambda) &= u(z) - \frac{du}{dz} \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (112.4)$$

мұндағы  $u(z)$  — шектелу беті  $S$ -ті ойша орналастырған қимадағы газдың жылдамдығы,  $\frac{du}{dz}$  — сол қимадағы туындының мәні.

Енді үйкеліс күшін  $u_1$  мен  $u_2$  орнына (112.4) мәндерді қойып, (112.3) формуласы бойынша есептеп шығаруға болады, яғни

$$f = \frac{1}{6} n \bar{v} m \left( \frac{du}{dz} 2\lambda \right) S.$$

$nm$ -нің газдың  $\rho$  тығыздығына тең болатындығын ескеріп, соңғы формуланы мына түрде жазуға болады:

$$f = \left( \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \right) \frac{du}{dz} S. \quad (112.5)$$

(112.5)-ті эмпирикалық (112.1) формуламен салыстыру, газ-кинетикалық ұғымдарға сүйене отырып,  $f$ -тың  $\frac{du}{dz}$  пен  $S$ -ке дұрыс тәуелділігін ғана емес, сонымен қатар тұтқырлық коэффициенті  $\eta$ -ның өрнегін анықтауға мүмкіндік бергенін көреміз. Шынында, оларды салыстырудан

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (112.6)$$

екендігі шығады.

Біз мән бермеген, бірқатар факторларды ескеретін, дәлірек жүргізілген есептеулер, тек сандық коэффициенті ғана басқаша дәл осындай формулага келтіреді.

Газдың тұтқырлық коэффициентіне арнаған (112.6) формуланы зерттейік.  $nm$ -ны  $\rho$ -мен алмастырып,  $v$  орташа жылдамдықтың  $\sqrt{T/m}$ -ға пропорционал, ал  $\lambda$  орташа еркін жүру жолының  $1/nd^2$ -қа пропорционалдығын ескеріп, былай деп жазуымызға болады:

$$\eta \sim nm \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{1}{nd^2} \sim \frac{\sqrt{m}}{\sigma} \sqrt{T} \quad (112.7)$$

Алдымен  $\eta$ -ның бірлік көлемдегі молекулалар санын, демек, қысымға ( $p = nkT$ ) тәуелсіздігі назар аудартады. Бір қарағанда таңқаларлық нәтижені былай түсіндіруге болады. Қысым азайған кезде  $n$ , яғни импульсты тасымалдауға қатысатын молекулалар саны, азаяды. Мұнымен бір мезгілде  $\lambda$  өседі, ендеше, жеке молекулалардың қарама-қарсы бағыттарда алып өтетін импульстарының айырмашылығы да өседі. Нәтижесінде жылдамдықтың берілген  $\frac{du}{dz}$  градиентінде молекулалардың алып өте-

тін қосынды импульсы қысымға тәуелді болмай шығады. Бұл тек  $\lambda$  газ ағып шығып жатқан саңылаудың мөлшерлерімен (мәселен, трубаның диаметрімен салыстырғанда) салыстырғанда аз болатын кезге дейін ғана орындалады. Бұл шарттың орындалуы тоқтағанда тұтқырлық

9 - т а б л и ц а

$T, ^\circ K$	$\eta, \text{ мкпэ}$	$\eta/\sqrt{T}$
273	171	10,4
313	190	10,7
573	295	12,3
673	328	12,6
773	358	12,9

қысымға көбірек тәуелді болып, қысым азайғанда ол да азайып отырады. Орташа еркін жүру жолының ұзындығы газ ағып жатқан саңылаудың мөлшерлерімен бірдей болғанда молекулалардың жүруі саңылаудың шамасымен анықталады да,  $\lambda$  қысымға тәуелсіз болып

шығады. Қысым азайған кезде бірлік көлемге келетін молекулалар саны да азая беріп, осы себептерден  $\eta$  да азаяды.

(112.7) бойынша тұтқырлық коэффициенті температураға байланысты  $\sqrt{T}$  шамасына пропорционал өседі. 9-таблицада тәжірибеден алынған ауаның әр түрлі тем-

пературалардағы тұтқырлығы келтірілген. Егер  $\eta$  температураға  $\sqrt{T}$  шамасына пропорционал өзгереді болса, онда  $\eta/\sqrt{T}$  қатынасы тұрақты болып қалуы тиіс еді.

Таблицадан көріп отырғанымыздай,  $\eta$  тұтқырлық  $\sqrt{T}$  шамасына қарағанда тезірек өсетін болғандықтан, бұл қатынас  $T$ -нің артуымен аздап өседі. Бұған өткен параграфта айтылып кеткен орташа еркін жүру жолының температураға тәуелділігі себеп болып табылады.

Газ тұтқырлығының молекулалар массасына тәуелділігін молекулаларының массалары әр түрлі болғанмен олардың эффективтік қималары бірдей болатын газдарда тексеруге болады. Мұндай газдарға, кәдімгі және ауыр сутегі (дейтерий) осыған мысал бола алады. Дейтерийдің атомдарының (осыған сәйкес оның молекулаларының) массасы байырғы сутегі атомдарының массасынан 2 есе артық болады. Сутегі мен дейтерийдің электрлік қасиеттері шамамен бірдей. Молекулалардың арасындағы өз ара әсерлесу, демек, олардың эффективтік қимасы, молекулалардың электрлік қасиеттерімен анықталатын болғандықтан, дейтерий мен сутегінің эффективтік қимасы бірдей болады, демек, бірдей температурада алынған олардың тұтқырлық коэффициенттері 2:1 қатынасындай болуы керек. Экспериментальдық тұрғыда көрсетілгендей, дейтерийдің  $\eta$ -сы сутегінің  $\eta$ -сынан 1,39 есе артық болады, ал бұл теориялық мәнге өте жақын.

### § 113. Газдардың жылу өткізгіштігі

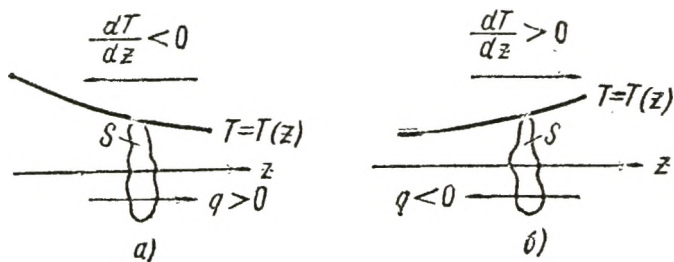
Қайсыбір ортада кез келген  $z$  бағытында температура тұрақты болып қалмайтын болса, онда осы бағытта, шамасы

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S \quad (113.1)$$

формуламен анықталатын жылу ағынының пайда болатындығы тәжірибеде анықталған, мұндағы  $q$  —  $z$  осіне перпендикуляр орналасқан  $S$  ауданнан бірлік уақытта өтетін жылу мөлшері,  $\frac{dT}{dz}$  — температура градиенті,  $\kappa$  — ортаның қасиеттеріне тәуелді болатын және жылу өткізгіштік коэффициенті деп аталатын пропорционалдық коэффициент.  $q$ -дың өлшем бірлігі Дж/сек-қа (немесе эрг/сек, кал/сек және т. т.) тең.



Демек,  $\kappa$  коэффициентінің өлшем бірлігі  $\text{дж/м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$  болады. (113.1)-дегі «—» таңбасы температураның артатын бағыты мен жылудың өтетін бағытының қарама-қарсы болатын жағдайын анықтайды, яғни жылу температураның азаятын бағытында өтеді. (113.1)-дегі жылу ағыны алгебралық шама: егер жылу  $z$  осінің оң бағытында өтетін болса, онда  $q$  оң, ал егер жылу  $z$  осінің теріс бағытында өтетін болса, онда  $q$  теріс болады (254-сурет).

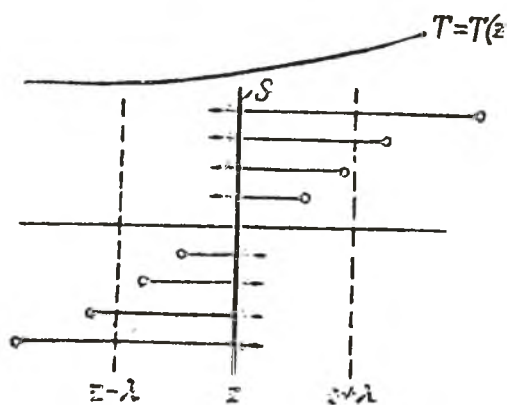


254-сурет.

$S$  аудан арқылы  $t$  уақыттың ішінде өтетін  $Q$  жылу мөлшерін анықтау үшін  $q$ -ды  $t$ -ге көбейту керек:

$$Q = qt = -\kappa \frac{dT}{dz} St \quad (113.2)$$

Газдағы жылу ағынын молекулалық кинетикалық көзқарастарға сүйене отырып есептеп шығарып көрейік.



255-сурет.

Егер газдың әр түрлі нүктесінде температураның мәндері түрліше болатын болса, онда сол нүктелердегі молекулалардың орташа энергиялары да әр түрлі болады. Жылулық қозғалыстың әсерінен бір жерден екінші жерге орын ауыстыра отырып, молекулалар өздерімен бірге энергия қорларын тасымалдайды. Энергияның міне осындай тасы-

малы газдардағы жылу өткізгіштік процестің туына себепші болады.

$z$  әрнімен белгіленетін бағытта температурасын қандай да бір тәсілмен тұрақты етіп ұстап тұратын газды

карастырайық. Осы бағытқа перпендикуляр орналасқан  $S$  аудан болсын дейік (255-сурет)  $S$  аудан арқылы оның нормалы бойымен ұшып өтетін молекулалар саны, өзіміз білетіндей,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} n \bar{v} S \quad (113.3)$$

өрнегімен анықталады.

Әрбір молекула, оның соңғы рет басқа молекуламен соқтығысқан жеріндегі температураға сәйкес келетін энергия мөлшерін өзімен бірге ала келеді. Орташа есеппен алғанда, бұл соқтығысу  $S$ -тен орташа еркін жүру жолы  $\lambda$ -ға тең қашықтықта өтеді. Сондықтан, солдан оңға қарай ұшып өтетін молекулалардың энергиясын  $(z - \lambda)$  жазықтығындағы температураға сәйкес келетін  $\varepsilon_1$  ал қарсы бағытта ұшып өтетін молекулалардың  $(z + \lambda)$  жазықтығындағы  $T_2$  температураға сәйкес келетін энергиясын  $\varepsilon_2$  деп алу керек.

$n$  және  $\bar{v}$  шамалары температураға тәуелді болады. Осыған байланысты  $S$  ауданы арқылы солдан оңға қарай ұшып өтетін молекулалардың санын анықтау үшін (113.3) формулаға  $n$  мен  $\bar{v}$ -нің  $T_1$  температураға сәйкес келетін мәндерін, ал оннан солға қарай ұшып өтетін молекулалардың санын анықтау үшін  $n$  мен  $\bar{v}$ -нің  $T_2$  температураға сәйкес келетін мәндерін қою керек сияқты. Алайда  $S$  ауданы арқылы қарама-қарсы бағыттарда ұшып өтіп жатқан молекулалар саны әр түрлі бола алмайтындығын түсіну оңай. Егер олар бірдей болмаса, онда  $S$  ауданы арқылы жылу ағынымен қатар заттың ағыны да байқалған болар еді, яғни газдың кеңістіктің бір бөлігінен екінші бөлігіне өткенін байқаған болар едік, бірақ біз газдың тұтастай қозғалысы жоқ деп алып отырмыз.

$S$  арқылы әрбір жаққа ұшып өтіп жатқан молекулалардың санын  $n$  пен  $\bar{v}$  үшін олардың  $S$  қимасындағы мәндерін алып, (113.3) формуласы бойынша табамыз. Сонда  $S$  ауданы арқылы  $z$  осінің оң бағытында молекулалардың бір секунд ішінде алып өтіп жатқан энергия мөлшерін былайша жазуға болады:

$$q = \frac{dN}{dt} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{6} n \bar{v} S \left( \frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2). \quad (113.4)$$

$\lambda$  аз болғандықтан,

$$T_1 = T - \frac{dT}{dz} \lambda, \quad T_2 = T + \frac{dT}{dz} \lambda$$

деп санауға болады, мұндағы  $T - S$  аудан тұрған жердегі температура,  $\frac{dT}{dz}$  —  $T$ -нің  $z$  бойынша дәл сол жерде алынған туындысы. Осы мәндерді (113.4) формулаға қойып, мынаны аламыз:

$$q = - \frac{1}{6} \bar{n} \bar{v} S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Осы шаманы молекуланың  $m$  массасына көбейтіп,  $N_A$  Авогадро санына бөлейік:

$$q = - \frac{1}{6} m \bar{n} \bar{v} S \frac{i}{2} \frac{k N_A}{m N_A} \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Одан әрі,  $m \bar{n} = \rho$ , ал

$$\frac{i}{2} \frac{k N_A}{m N_A} = \frac{1}{\mu} \frac{i}{2} R = \frac{1}{\mu} C_V = c_V.$$

екендігін ескеріп ( $c_V$  — тұрақты көлем кезіндегі меншікті жылу сыйымдылық),

$$q = - \left( \frac{1}{3} \rho \bar{v} c_V \right) \frac{dT}{dz} S \quad (113.5)$$

деп жазуға болады. (113.5)-ті (113.1)-мен салыстырып, газдардың жылу өткізгіштік коэффициенті үшін мынадай өрнекке келеміз:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} c_V \quad (113.6)$$

$\eta$ -ға арналған (112.6) формуласын  $\kappa$ -ға арналған (113.6) формуласымен салыстырып

$$\kappa = \eta c_V \quad (113.7)$$

екендігін көреміз.

Дәлірек есептеулер  $\kappa$  мен  $\eta$  арасында мынандай қатыстың бар екендігін көрсетеді:

$$\kappa = K \eta c_V$$

мұндағы  $K$  — сандық коэффициент, ол

$$K = \frac{9\gamma - 5}{4}$$

формуласымен анықталады.

Сонымен, бір атомды газдар үшін ( $\gamma = C_p / C_v = 5/3$ ) коэффициент  $K=2,5$ , екі атомды газдар үшін ( $\gamma=7/5$ )  $K=1,9$  және т. б. болады.

$\alpha$ -ның молекуланы сипаттайтын шамалар мен газ параметрлеріне тәуелділігін анықтайық.  $\alpha \sim \eta c^V$  болатындықтан, (112.7)-ні  $c_v$ -ның өрнегіне кіретін шамаларға көбейтсек болғаны:

$$c_v = \frac{1}{\mu} C_v = \frac{1}{mN_A} \frac{i}{2} R \sim \frac{i}{m}.$$

Осының нәтижесінде

$$\alpha \sim \frac{i}{\sigma \sqrt{m}} \sqrt{T} \quad (113.8)$$

болады.

Бұл тәуелділіктің  $\eta$ -ға арналған (112.7) тәуелділіктен айырмашылығы  $\alpha \sqrt{m}$  шамасына кері пропорционал болғанда, ал  $\eta \sqrt{m}$ -ге тура пропорционал. Сонымен қатар,  $\alpha$  молекуланың еркіндік дәрежелерінің саны мен сипатына тәуелді болады ( $i$  санына).  $\alpha$  мен  $\eta$  шамаларының қысым мен температураға тәуелділігі бірдей.

Демек, жылу өткізгіштік коэффициенті қысымға тәуелсіз (бойымен жылу берілетін ыдыстың мөлшерлерімен шамалас болғанға дейін) болады да және температура жоғарылауымен  $\sqrt{T}$ -ге қарағанда біршама тезірек артады.

## § 114. Газдардағы диффузия

Бірнеше компоненттерден, яғни молекулалардың бірнеше сортынан тұратын газ қоспасын қарастырайық.  $i$ -ші компонентінің бірлік көлемдегі молекулалар санын  $n_i$  деп белгілейміз. Бірлік көлемдегі молекулалардың толық саны мынадай болады:

$$n = \sum n_i.$$

Қоспадағы  $i$ -ші компоненттің салыстырмалы концентрациясы

$$c_i = \frac{n_i}{n}$$

өлшеусіз шама деп аталады.

Барлық компоненттердің салыстырмалы концентрациясының қосындысының бірге тең болатындығы анық:

$$\sum c_i = \sum \frac{n_i}{n} = 1.$$

Қайсыбір компоненттің абсолют концентрациясы деп молекулалардың осы сортының бірлік көлемдегі массасын айтады. Осылайша анықталған концентрация осы компоненттің парциал тығыздығы болып табылады. Егер  $i$ -ші компоненттің молекуласының массасы  $m_i$  болса, онда абсолют концентрация мына шамаға тең болады:

$$c_i = n_i m_i.$$

Газ қоспасының қысымы жеке компоненттердің парциал қысымдарының қосындысына тең болып, бірлік көлемдегі молекулалардың толық саны арқылы анықталады:

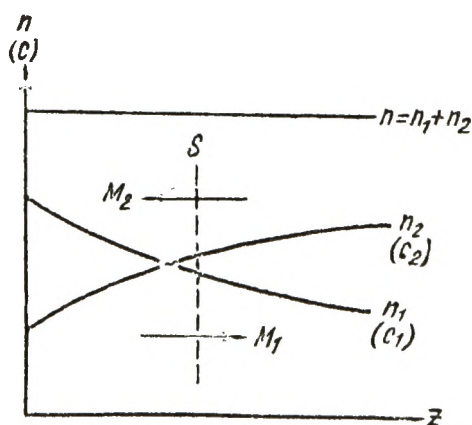
$$p = \sum p_i = \sum n_i kT = nkT$$

Газ компоненттерінің концентрациясы кеңістіктің әр түрлі нүктелерінде бірдей болмауы мүмкін. Бұл жағдайда молекулалардың жылулық қозғалысынан концентрацияның азаю бағытында  $i$ -ші компоненттің массаларын тасымалдау түрінде жүретін концентрациялардың теңесуі басталады. Бұл процесс диффузия деп аталады.

Молекулалардың толық саны, демек, қысым да диффузия кезінде өзгермейді. Тек молекулалардың әр түрлі сорттарының қайтадан таралуы немесе  $n_i$  шамаларының өзгеруі жүреді, ал бұл өзгеріс бір компоненттің бір жердегі  $n_i$  -і артса, онда басқа бір компоненттің  $n_i$  де өзгеріп,  $n_i$ -лердің қосындысы тұрақты болып қалады.

Осыдан былай бұл параграфта екі компонентті газ қоспалары жайлы сөз болатын болады.

Қайсыбір көлемде қандай да бір тасілмен  $z$  ба-



256-сурет.

ғытының бойында екі компоненттің де концентрацияларының градиентін уақыт бойынша өзгертпей ұстап тұрмаз делік (256-сурет; онда абсолют концентрациялардың орнына оларға пропорционал болатын бірлік көлемдегі молекулалар саны келтірілген). Көлемнің барлық жерінде қысым бірдей. Демек,  $n_1 + n_2$  қосындысы әрбір қима үшін бірдей болады. Бұл жағдайда  $z$ -ке перпендикуляр  $S$  ауданы арқылы солдан оңға қарай молекулалардың бірінші сортының басым ағыны пайда болады; бұл ағынды  $S$  арқылы бір секунд ішінде өтетін массаның  $M_1$  шамасымен сипаттауға болады. Тәжірибе көрсеткендей, бұл шама былай анықталады:

$$M_1 = -D \frac{dc_1}{dz} S, \quad (114.1)$$

мұндағы  $D$  — диффузия коэффициенті деп аталатын пропорционалдық коэффициент,  $\frac{dc_1}{dz}$  —  $S$  ауданды ойша орналастырған қимадағы абсолют концентрацияның градиенті.

$S$  ауданы арқылы  $t$  уақыттың ішінде массаның

$$M_1 t = -D \frac{dc_1}{dz} S t \quad (114.2)$$

шамасына тең болатындығы анық.

Бір мезгілде осыған ұқсас

$$M_2 = -D \frac{dc_2}{dz} S$$

өрнегімен анықталатын молекулалардың екінші сортының қарсы ағыны пайда болады.

(114.1) теңдеу диффузияның эмпирикалық теңдеуі болып табылады. «—» таңбасы массаның берілген газ компонентінің концентрациясы кемитін бағытында тасымалданатынын көрсетеді.

Диффузияның теңдеуін молекула кинетикалық ұғымдар негізінде алуға тырысалық, сонымен қатар есептеулерді оңайлату үшін екі компонент молекулаларының бір-бірінен массалары бойынша айырмашылығы аз деп ( $m_1 \approx m_2 \approx m$ ) және олардың эффективтік қималарын ( $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$ ) өз ара тең деп санаймыз. Сонда екі компоненттің де молекулаларының жылулық қозғалысының орташа  $\bar{v}$  жылдамдығы бірдей және орташа еркін жүру жолы

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

формуласына сәйкес есептеледі, мұндағы  $n = n_1 + n_2$ .

Бірінші компоненттің  $z$  осі бойындағы концентрация өзгерісі  $c_1 = c_1(z)$  функциясымен берілетін болсын.  $S$  ауданы арқылы ұшып өтетін әрбір молекула өзіне тән  $m$  массаны тасымалдайды ( $m_1 \approx m$  екендігін ескерте кетейік). Бір секунд ішінде  $S$  ауданы арқылы  $z$  осінің бағытында ұшып өтетін молекулалардың санын  $N_1'$  арқылы,  $z$  осіне қарсы бағыттағы дәл сондай санды  $N_1''$  деп белгілейік. Сонда бір секунд ішінде  $z$  осінің бағытында тасылған бірінші компоненттің массасын

$$M_1 = (N_1' - N_1'')m \quad (114.3)$$

түрінде жазуға болады.

Алдыңғы жағдайдағы сияқты (112 және 113-параграфтарды қараңыз),  $S$  ауданы арқылы өтетін молекулалар  $S$ -тен орташа еркін жүру жолына тең жерде орналасқан қимадан ұшып келеді деп есептеуге болады. Сонда  $S$  арқылы  $z$  осінің бағытында ұшып өтетін молекулалардың саны координаталары  $z - \lambda$  болатын қимаға сәйкес келетін бірлік көлемдегі молекулалар санының  $n_1'$  мәнімен, ал қарсы бағытта ұшып өтетін молекулалар саны  $z + \lambda$  координаталары болатын қимаға сәйкес келетін бірлік көлемдегі молекулалар санының  $n_1''$  мәнімен анықталады. Сөйтіп,  $N_1'$  және  $N_1''$  сандары

$$N_1' = \frac{1}{6} n_1' \bar{v} S$$

өрнегімен анықталады, мұндағы  $N_1'$  үшін  $n_1' = n_1(z - \lambda)$  саны алынуы керек, ал  $N_1''$  үшін  $n_1'' = n_1(z + \lambda)$  саны алынуы керек.  $N_1'$  және  $N_1''$  мәндерін (114.3) өрнегіне қойып, мынаны аламыз:

$$M_1 = - \frac{1}{6} \bar{v} S \frac{dn_1}{dz} 2\lambda m.$$

$m$  — тұрақты шама болғандықтан,  $m \frac{dn_1}{dz}$  өрнегін  $\frac{d(mn_1)}{dz}$  түрінде жазуға болады, ал бұл  $\frac{dc_1}{dz}$  концентрацияның градиенті болып табылады: Сонда

$$M_1 = - \left( \frac{1}{3} \bar{v} \lambda \right) \frac{dc_1}{dz} S. \quad (114.4)$$

(114.4)-ті (114.1)-мен салыстыра отырып, диффузия коэффициентінің төмендегідей газ-кинетикалық өрнегін аламыз:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda. \quad (114.5)$$

(114.5)-тен  $D$  өлшемділігінің  $m^2/сек$ -қа тең екендігі шығады.

Осы айтылғандар бірдей түрде қоспаның екі компонентіне де қолданымды. Демек, екі компонент үшін де диффузия коэффициенттерінің мәндері бірдей болады.

(114.5)-ті (112.6)-мен салыстыра отырып,  $\eta$  пен  $D$  арасындағы мына байланысты аламыз:

$$\eta = \rho D.$$

$v$  және  $\lambda$ -ға арналған (114.5) ке қойып, мынаны алуға болады:

$$D \sim \frac{1}{n \bar{v} \lambda} \sqrt{T}$$

Диффузия коэффициентінің  $\eta$  және  $\kappa$ -лардан айырмашылығы, ол бірлік көлемдегі молекулалар санына, демек, қысымға, кері пропорционал болады екен:

$$D \sim \frac{1}{p}$$

$D$ -ның температураға тәуелділігі  $\eta$ -ның  $\kappa$ -ға тәуелділігіндей. Екі компоненттің де молекулалары массалары әрі эффективтік қималары бойынша бірдей болатындықтан, (114.5) теңдеуі негізінен өздік диффузия коэффициентінің өрнегі, яғни қайсыбір газ молекулаларының дәл сол газ молекулаларынан тұратын ортадағы диффузияның өрнегі болып табылады. Өздік диффузия құбылысын, біртекті газ молекулаларының бөлігін таңбалау арқылы бақылауға болар еді. Сонда, таңбаланған молекулалар мен таңбасы жоқ молекулалардың концентрациясы тұрақты болмаған жағдайда әртекті молекулалардың қарсы ағыны пайда болып, ал бұл ағынның шамасы (114.4) формуласымен анықталған болар еді. Шындығында, іс жүзінде өздік диффузияны таңбаланған атомдардың әдісін қолдану арқылы зерттеуге болады. Бұл әдіс изотоптардың, яғни бір элементтің әр түрлі



атомдарының (мәселен, олардың біреулері — радиоактивті де екіншілері — орнықты) қоспасын пайдаланудан тұрады.

Массалары мен қималары әр түрлі болатын молекулалар қоспасы үшін жүргізілген есептеулер диффузия коэффициентінің төмендегідей өрнегін береді:

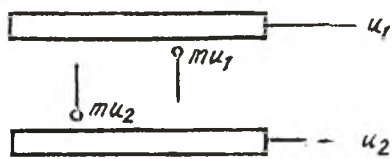
$$D = B \sqrt{\frac{T}{m'}} \frac{1}{d_{12}^2 n}$$

мұндағы  $B$  — сандық коэффициент,  $m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  молекулалардың келтірілген массасы деп аталады, ал  $d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$  — молекулалардың эффективтік қималарының жартылай қосындысы.

### § 115. Ультрасиретілген газдар

Молекулалардың еркін жүру жолының ұзындығы ыдыстың сызықтық өлшемінен артық болған жағдайда ыдыста вакуум болады. Мұндай кезде газды ультрасиретілген деп атайды. Вакуум деген сөздің тікелей мағынасы «бостық» дегенді беретін болса да, ультрасиретілген газдың бірлік көлеміндегі молекулалар саны көп болады. Мәселен,  $10^{-6}$  мм сын. бағанасындағы қысым кезінде  $1 \text{ м}^3$  көлемде шамамен  $10^{16}$  молекула болады. Бұдан басқа өте кішкене қуыстарда, вакуум сияқты күйді атмосфералық қысым кезінде де алуға болады.

Ультрасиретілген газдардың өзгеріс-сипатының бірқатар ерекшеліктері болады. Вакуум кезінде газдардың бір бөлігінің екіншісіне түсіретін қысымы жайлы сөз етудің қажеті жоқ. Әдеттегі жағдайда молекулалар бірбірімен жиі соқтығысады. Сондықтан газды ойша екі бөлікке шектеп тұрған кез келген бет арқылы молекула-



257-сурет.

лардың арасында импульс алмасулары жүріп жатады. Демек, газдың бір бөлігі бөліну беті арқылы екінші бөлігіне  $p$  қысыммен әсер етеді. Вакуумда молекулалар ыдыстың қабырғасымен ғана импульс алмасадy, сондықтан да тек

ыдыс қабырғасына түсірілген қысым жайлы ғана айтуға болады. Газда ішкі үйкеліс те болмайды. Алайда ультрасиретілген газда қозғалатын денеге үйкеліс күші әсер

етеді, бұл күш молекулалардың осы денемен соқтығысып, оның импульсын өзгертуге себепші болады. Осы мәселені толығырақ қарастырайық.

Айталық, ультрасиретілген газда бір-біріне параллель екі пластинка қозғалып келе жатсын (257-сурет) Пластинкалардың жылдамдықтары  $u_1$  және  $u_2$ -ге тең. Пластинка мен молекуланың арасындағы өз ара әсер соқтығысу мезетінде молекуланың пластинкадан ыршып түсіп, өзінің жылулық жылдамдығына шамасы мен бағыты пластинканың жылдамдығына тең болатын құраушы қосып алады.

Жоғарғы пластинканың бірлік бетіне секундына  $\frac{1}{6} n\bar{v}$  молекула келіп соғады, олардың бұдан бұрынғы төменгі пластинкаға келіп соқтығысқан кезде қабылданған  $u_2$  құраушы жылдамдығы болады. Осы молекулалардың әрқайсысында  $mu_2$  құраушы импульсы болады. Жоғарғы пластинкадан соғылып қайтқан молекуланың  $mu_1$ -ге тең құраушы импульсы болады. Демек, әрбір молекуланың жоғарғы пластинкамен соқтығысуы оның импульсын  $m(u_1 - u_2)$  шамасына кемітеді. Импульстың бірлік уақытта пластинканың бірлік бетіне келетін өзгерісі:

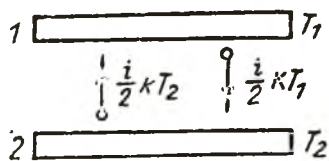
$$\frac{1}{6} n\bar{v} m (u_1 - u_2).$$

Ал бұл өзгеріс, өзімізге белгілі пластинканың бірлік бетіне әсер ететін күшке тең:

$$f = \frac{1}{6} \rho \bar{v} (u_1 - u_2) \quad (115.1)$$

( $mn$ -ды  $\rho$  арқылы алмастырдық)

Шамасы жағынан осындай, ал бағыты жағынан қарма-қарсы күш төменгі пластинканың бірлік бетіне де әсер етеді.



258-сурет.

Үйкеліс күші мен пластинкалардың жылдамдықтарының айырымының арасындағы пропорционалдық коэффициентті үйкеліс коэффициенті деп атау табиғи нәрсе. (115.1)-ден бұл коэффициенттің  $\frac{1}{6} \rho \bar{v}$ -ге тең екендігі

шығады, яғни газдың тығыздығына пропорционал, демек, газдың пластинка мен ыдыстың қабырғаларына түсіре-

тін қысымына пропорционал болады (бұл қысым үшін  $p = nkT$  өрнегі күшінде қалады).

Енді вакуум жағдайында газдың жылу беру мәселесіне назар аударайық. Арасында ультрасиретілген газ бар температуралары  $T_1$  және  $T_2$  екі пластинканы алайық (258-сурет). Егер молекулалардың қатты дененің бетімен соқтығысы абсолют серпімді болса, онда молекулалар пластинкадан бастапқы жылдамдығына тең жылдамдықпен (демек, энергиямен де) ыршып кетер еді. Осының нәтижесінде молекулалар пластинкадан пластинкаға энергия алып өте алмаған болар еді. Алайда мұндай қорытынды тәжірибеге қайшы келеді. Демек, қабырға мен оған келіп соқтығатын молекулалардың арасындағы өз ара әсер серпімді соқтығысу сипатында емес. Анығында процесс былай өтеді: молекула қабырғаға келіп соққаннан кейін, азғантай уақыт оған жабысып қалғандай болады, содан кейін қабырғаны тастап, кез келген бағытта, орташа есеппен қабырғаның температурасына сәйкес келетін жылдамдықпен ұшып кетеді<sup>1</sup>.

258-суретке қайта оралайық. Секунд сайын жоғарғы пластинкаға келіп соғылатын  $\frac{1}{6} n\bar{v}S$  молекулалардың әрқайсысы өзімен бірге  $\frac{i}{2} kT_2$  шамасында энергия әкеліп,  $\frac{i}{2} kT_1$  шамасына тең энергия алып кетеді. Демек, молекуланың әрбір соқтығысынан кейін пластинка  $\frac{i}{2} k(T_1 - T_2)$  шамасындай энергия жоғалтады. Дәл осындай энергия мөлшерін әрбір соқтығысудан кейін екінші пластинка да алады. Сонымен, молекулалардың секунд сайын пластинкадан пластинкаға алып өтетін энергиясы

$$q = \frac{1}{6} n\bar{v} \frac{i}{2} k(T_1 - T_2) S.$$

Осы өрнекті  $mN_A$ -ға көбейтіп және бөліп, мынаны аламыз:

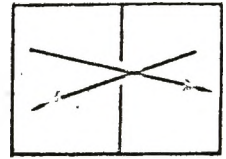
<sup>1</sup> Молекулалардың қабырғамен өз ара әсерінің сипатын көрсетілгендей дәлірек анықтау, қысымды есептеген кезде 99-параграфта алынған нәтижеге әсер етпейтіндігін атай кетейік. Егер газдың температурасы мен қабырғаның температурасы бірдей болса, онда молекулалар қабырғаға қандай жылдамдықпен келсе, оны сондай жылдамдықпен тастап шығады да, орташа есеппен алғанда соқтығысу кезінде молекулалардың импульсының өзгерісі абсолют серпімді соқтығысу кезіндегідей болады.

$$q = \frac{1}{6} \bar{p} \bar{v} c_v (T_1 - T_2) S. \quad (115.2)$$

$\frac{1}{6} \bar{p} \bar{v} c_v$  шамасына тең болатын жылу өткізгіштік коэффициенті ультрасиретілген газда газ тығыздығына пропорционал болып шықты. Демек, бір қабырғадан екіншісіне берілетін жылу берілу қысымның кемуімен азаяды екен, ал кәдімгі жағдайларда, өзіміз білетіндей, газдың жылу өткізгіштігі қысымға тәуелсіз болады.

## § 116. Эффузия

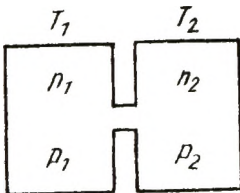
Тесігі бар тосқауылмен екіге бөлінген ыдыстағы ультрасиретілген газды қарастырайық (259-сурет). Тесіктің мөлшері еркін жүру жолынан кіші болған жағдайда молекулалар тесік арқылы бір-бірімен соқтығыспай біртіндеп өте алады. Осындай жағдайларда газдың тесік арқылы ағып өтуі эффузия деп аталады.



259-сурет.

Эффузия кезінде бір қатар құбылыстар байқалады, осылардың екеуін қарастыралық. Пікірімізді жеңілдету үшін ыдыстағы газдың сиретілгендігі сонша тіпті еркін жүру жолы ыдыстың сызықтық өлшемдерінен де үлкен болады деп ұйғаралық. Сонда тесіктен өткен молекула қарсы қабырғаға жеткенше түзу сызықты қозғалатын болады.

Жылулық эффузия. Ыдыстың екі бөлігінің қабырғаларының температуралары әр түрлі  $T_1$  және  $T_2$  болсын (260-сурет) Еркін жүру жолы  $\lambda$  тесіктің  $d$  ( $\lambda \ll d$ ) диаметрінен көп кіші болғанда, ыдысты толтырып тұрған газдың тепе-тең шарты  $p_1$  және  $p_2$  қысымдардың теңдігі болып табылады. Қысым  $nkT$  шамасына тең болатындықтан, бірлік көлемдегі молекулалар саны, демек, газдың екі бөлігіндегі тығыздықтарының қатынасы температуралардың қатынасына кері шамада болады:



260-сурет.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (116.1)$$

Ал ультрасиретілген газ үшін ( $\lambda \gg d$ ) тепе-тең шарты басқаша. Уақыт өткен сайын өзгермейтін (стационар-

лық) күй тек бір секунд ішінде тесік арқылы бір бөліктен екінші бөлікке өтіп жатқан молекулалар саны, осы тесік арқылы қарсы бағытта өтіп жатқан молекулалар санына тең болған жағдайда қалыптасады. Тесік арқылы өтіп жатқан молекулалар саны  $n\bar{v}$ -ға пропорционал болатындықтан, тепе-тең шарты мынадай болады:

$$n_1 \bar{v}_1 = n_2 \bar{v}_2.$$

$\bar{v} \sim \sqrt{T}$  болатындықтан, былай жазуға да болады<sup>1</sup>:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (116.2)$$

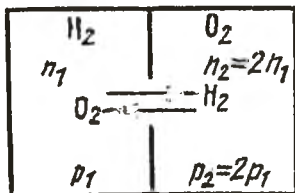
Сонымен, газдың тығыздықтарының қатынасы кәдімгі жағдайлардағыдан басқаша екен [(116.1)-ді қараңыз].

(116.2)-ні ескеріп, қысым үшін мынаны аламыз:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 k T_1}{n_2 k T_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Ыдыстың екі бөлігіндегі қысым бірдей болғанда тепе-тең күй байқалатын әдеттегі жағдайдан айырмашылығы, вакуум жағдайында қысым ыдыстың температурасы жоғары қабырға жағындағы бөлігінде артық болады.

Екі газдың қарама қарсы изотермиялық эффузиясы. Ыдыстың барлық жерінде температура бірдей және алдын ала ыдыстың әр түрлі бөлігінде молекулалары массасы бойынша айырылатын түрліше газдар бар болатын жағдайды қарастыралық. Анығырақ болу үшін сол жақта сутегін ( $M=2$ ), оң жақта — оттегін ( $M=32$ ) алайық. Сутегінің  $p_1$  қысымы оттегінің қысымынан 2 есе кіші болсын делік. Демек, оттегінің  $n_2$  шамасы сутегінің  $n_1$  шамасынан 2 есе артық:  $n = 2n_1$ . Ал қысым екі газда  $\lambda$  шамасы ыдыстың сызықтық өлшемдерінен артық болатындай етіп алынады.

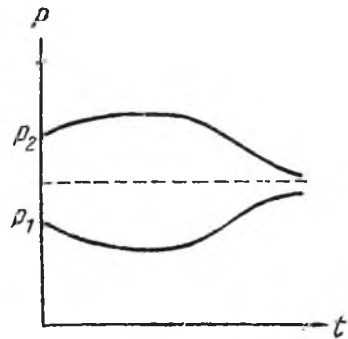


261-сурет.

Егер тосқауылдағы тесікті ашып жіберсек, онда тесік арқылы оттегі

<sup>1</sup> Алдыңғы параграфта айтылғанға орай, ыдыстың қабырғасына соқтыққан молекула қабырғаның температурасына сәйкес жылдамдықпен ыршиды деп есептейміз.

мен сутегінің қарсы бағытталған эффузиялық ағыны пайда болады (261-сурет). Сутегі молекулаларының ағыны  $n_1 v_1$  шамасына, ал оттегі молекулаларының ағыны  $n_2 v_2$  шамасына пропорционал болады.  $v \sim 1/\sqrt{m}$  болатындықтан, сутегі молекулаларының орташа жылдамдығы оттегінікінен 4 есе артық болады:  $v_1 = 4v_2$ . Осының нәтижесінде, сутегі бар ыдыстағы қысым оттегі бар ыдыстағы қысымнан 2 есе аз болса да сутегі молекулаларының ағыны оттегі молекулаларының ағынынан 2 есе артық болады. Эффузиялық ағындар қысымдарды теңестіру орнына қайта олардың айырмашылығын арттыра түседі. Уақыт өтуімен ыдыстың екі жағындағы сутегі мен оттегінің концентрациялары теңеседі (алғашында анағұрлым шапшаң молекулалар үшін, яғни сутегі үшін, кейінірек оттегінің концентрациясының теңесуі аяқталады) ақыр аяғында қысым теңеседі. Ыдыстың екі жағындағы  $p_1$  және  $p_2$  қысымдардың уақыт бойынша өзгерісі график түрінде 262-суретте кескінделген.

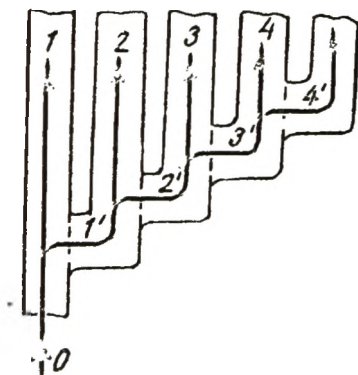


262-сурет.

Эффузия құбылысы компоненттерінің айырмашылығы тек олардың молекулаларының құрамына бірдей химиялық элементтердің әр түрлі изотоптары (атомдардың түрлері) кіретіндігінде ғана болып табылатын газ қоспаларын айыруға пайдаланылады. Изотоптардың химиялық қасиеттерінің

теңбе-теңдігінен оларды химиялық әдістермен бөлуді жүзеге асыру мүмкін емес.

Эффузиялық тәсілмен бөлудің принципі<sup>1</sup> 263-суретте көрсетілген. Газ қоспасының ағыны (суретте ол «О»-мен белгіленген) екіге тарамдалады да, біреуі кішкентай саңылаулары бар тосқауыл арқылы өткізіледі ( $\lambda >$  саңылаулардың өлшемдері).



263-сурет.

<sup>1</sup> Бұл әдістің, изотоптарды бөлудің диффузиялық әдісі делінетін, аса дәл емес тарихи қалыптасқан аты бар.

Массалары аз молекулалардың жылулық қозғалысының орташа жылдамдығы артығырақ болатындықтан, тосқауыл арқылы өткен ағын, бастапқы ағынға қарағанда, жеңіл молекулалармен аздап байытылған болады. Бұл байытылған ағын ( $1'$  ағын) тағы да екіге бөлініп, оның біреуі екінші саңылаулы тосқауылдан өтіп, жеңіл молекулалармен одан әрі байи түседі. Осындай процестің сан рет қайталануының нәтижесінде молекулаларының басым көпшілігі химиялық элементке сәйкес анағұрлым жеңіл изотоптардан тұратын газды алуға болады.

## XIII ТАРАУ НАҚТЫ ГАЗДАР

### § 117. Газдардың идеалдықтан ауытқуы

Бұрын ескертілгендей ,нақты газдардың өзгерісі

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

(98.14) теңдеуі арқылы, қысым онша жоғары болмаған жағдайда және температура жеткілікті жоғары болған жағдайда ғана біршама жақсы сипатталады. Қысым артып, температура төмендеген сайын теңдеуден едәуір ауытқу байқалады. Төменгі 10-таблицаның екінші бағанасында қалыпты жағдайларда бір литр көлем алып тұр-

10 - т а б л и ц а

$p, \text{ ат}$	$pV, \text{ ат} \cdot \text{ л}$	$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b'), \text{ ат} \cdot \text{ л}$
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

ған азот массасы үшін  $pV$  көбейтіндісінің мәндері келтірілген. Мұнда көрсетілген мәндер температура әрдайым  $0^\circ \text{C}$  болғандағы түрліше қысымдарға сәйкес келеді.

Теңдеу (98.14) бойынша температура өзгермеген жағдайда көбейтінді  $pV$  тұрақты болуға тиіс еді, бірақ қы-



сым 200 ат дәрежесіне жеткен кезде, таблицада көрсетілгендей, елеулі ауытқулар байқалады. Ол ауытқу қысым артқан сайын ұлғая келіп, қысым 1000 атмосфераға жеткен кезде 100 проценттен артық болып шығады, себебі (98.14) теңдеуді қорытқан кезде біз молекулалардың мөлшерлерін және олардың қашықтықтардағы өз ара әсерлерін ескермеген едік. Сонымен қоса, қысымды арттырған кезде газдың тығыздығы да артады; бұл молекулалардың ара-арасындағы орташа қашықтықты азайтады да, молекулалар көлемі мен олардың арасындағы өз ара әсерлер елеулі роль атқара бастайды.

Жоғарыдағы келтірілген бағалауымыз бойынша (92-параграфты қараңыз) молекулалардың мөлшерлері шамамен  $10^{-8}$  см. Молекуланың радиусын  $10^{-8}$  см-ге тең деп алсақ, бір молекуланың көлемі үшін мынадай мән шығады:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} 3,14 \cdot 10^{-24} \approx 4 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3.$$

Демек, қалыпты жағдайдағы  $1 \text{ см}^3$  газ үшін молекулалардың көлемі жуықтап мынадай боп шығады:

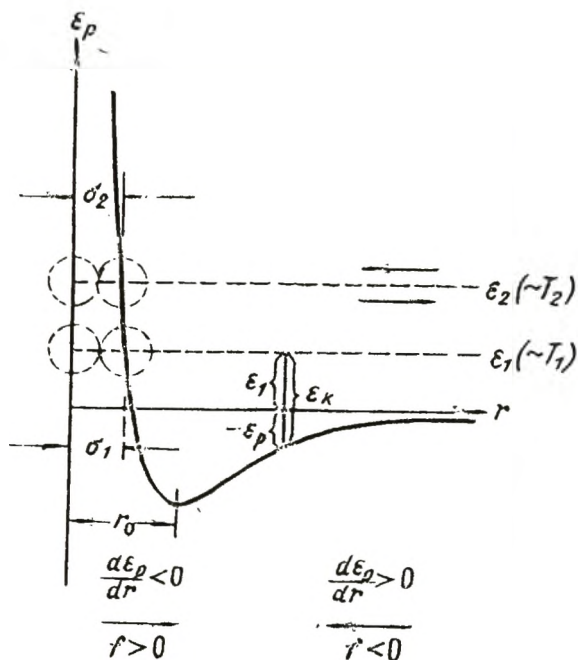
$$4 \cdot 10^{-24} \cdot 2,7 \cdot 10^{19} \approx 10^{-4} \text{ см}^3.$$

Газдың алып тұрған көлемімен ( $1 \text{ см}^3$ ) салыстырғанда, бұл көлемді ескермеуге әбден болады.

Егер газ (98.14) теңдеуге бағынатын болса, қысымды 5000 ат-ға дейін арттырған кезде, газдың тығыздығы да 5000 есе артар еді де,  $1 \text{ см}^3$ -дегі молекулалардың көлемі  $10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ см}^3$  болар еді. Сөйтіп, молекулалар үлесіне газ алып тұрған бүкіл көлемнің жартысы тиісті болар еді. Молекулалардың қозғалысына мүмкіншілік беретін көлем, атмосфералық қысымдағымен салыстырғанда 2 есе кіші болып шығар еді. Мұндай жағдайларда көлемнің қысымға кері пропорционалдығы бұзылуға тиіс екендігі өзінен-өзі түсінікті.

Молекулалар арасындағы өз ара әсерлер сипатын бәрінен де 264-суретте келтірілген, екі молекуланың өз ара потенциялық энергиясын, олардың центрлері арасындағы қашықтықтың  $r$  функциясы ретінде кескіндейтін қисық арқылы көрсеткен қолайлы. Бұл қисықты салу кезінде бір-бірінен шексіз қашықтықтағы молекулалардың потенциялық энергиясын (яғни олар өз ара әсерлеспей тұрған жағдайда) нольге тең деп алғанбыз. Демек, қисық  $r$ -дің шексіздікке ұмтылғанында, асимптотты  $r$  осіне ұмтылатындай алынған.

Потенциялық энергияны  $r$  функциясы ретінде біле отырып, молекулалардың түрліше қашықтықтарда өз ара қандай күштермен әсерлесетінін анықтауымызға бо-



264-сурет.

лады. Ол үшін механикадан белгілі мына қатысты пайдалануымыз керек:

$$f_r = - \frac{\partial \epsilon_p}{\partial r}.$$

Мұндағы «—» таңбасы, молекулалардың өз ара әсер күштерінің оларды потенциялық энергия анағұрлым аз боларлықтай күйге көшіруге тырысатындығын көрсетеді. Демек,  $r_0$ -ден артық қашықтықтарда молекулалардың арасында өз ара тартылыс күштері әсер етеді де, ал  $r_0$ -ден аз қашықтықтарда өз ара тебу күштері әсер етеді. Қисықтың барысындағы әр нүктедегі қисықтық сол нүктедегі күштің шамасын көрсетеді.

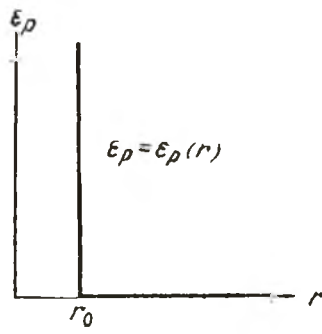
Потенциялық қисықтық  $\epsilon_p$ -нің көмегімен молекулалардың жақындасу (соқтығысу) процесін қарастырайық. Бір молекуланың центрін ойша координаталардың бас нүктесіне орналастырайық та, ал екінші молекуланың центрін  $r$  осінің бойымен орын ауыстырады деп алайық. Екінші молекула бағыты бойынша бірінші молекулаға

қарай шексіздіктен, кинетикалық энергиясының бастапқы қоры  $\epsilon_k = \epsilon_1$  болатындай, ұшып келе жатсын. Бірінші молекулаға жақындаған сайын екінші молекуланың қозғалыс жылдамдығы тартылыс күшінің әсерімен ұдайы арта беретін болады. Соған байланысты молекуланың кинетикалық энергиясы да  $\epsilon_k$  артады. Алайда системаның (екі молекуладан тұратын система тұйық системаға жатады)  $\epsilon = \epsilon_k + \epsilon_p$  толық энергиясы өзгеріссіз қала береді де,  $\epsilon_1$ -ге тең болады, өйткені кинетикалық энергияның артуымен бірге потенциялық энергия  $\epsilon_p$  азайып отырады. Молекула координатасы  $r_0$  нүктеден өткен кезде тартылыс күштерінің орнына тебіліс күштері пайда болады, осының салдарынан молекуланың жылдамдығы біртіндеп тез азая бастайды (тебіліс облысында  $\epsilon_p$  қисықтығы өте шұғыл). Потенциялық энергия  $\epsilon_p$  системаның толық энергиясы  $\epsilon_1$ -ге тең болып шыққан кезде, молекуланың жылдамдығы нольге айналады. Осы кезде молекулалар бір-біріне барынша жақын келеді. Молекулалар центрлері жақындай алатын ең аз (минималды) қашықтық  $d_1$  молекуланың эффективті диаметрі болып табылады. Молекула тоқтағаннан кейін құбылыстардың бәрі кері бағытта жүре бастайды: алғашқы кезде молекула тебіліс күшінің әсерінен қозғалыс жылдамдығын біртіндеп арттыратын болады: сосын  $r_0$  қашықтықтан өте берісімен молекула оның қозғалысын баяулататын тартылыс күшінің әсеріне ұшырайды, ақырында, кинетикалық энергияның алғашқы  $\epsilon_1$  қорына тап болып, шексіздікке кетіп қалады.

264-суреттен, молекула өз қозғалысын шексіздіктен энергияның көбірек  $\epsilon_2$  қорымен бастаса, онда молекулалар центрлерінің жақындаса алатын минималды қашықтығы  $d_2$  аз болып шығатындығы байқалады. Сонымен, молекулалардың эффективті диаметрі олардың орташа энергиясына, демек, әрі температураға байланысты болады. Температура артқан сайын молекулалардың эффективті диаметрі  $d$  азаяды, соның салдарынан молекулалардың еркін жолының орташа ұзындығы  $\lambda$  ұлғаятын болады [(111.7) қараңдар].

Идеал газ күйінің теңдеуін қорытқан кездегі ұйғарылған молекулалар арасындағы өз ара әсерлердің сипаты 265-суретте көрсетілген потенциалық қисыққа сәйкес келеді.  $r_0$ -ден артық қашықтықта  $\epsilon_p$  тұрақты, соның салдарынан күш нольге тең. Қашықтық  $r = r_0$  болғанда

$\varepsilon_p$  шексіздікке айналады да, молекулалар центрлерінің  $r_0$ -ден кіші қашықтықтарға жақындауына бөгет жасайды. Бұл сияқты қарапайым қарастыру, газдағы молекулалар арасындағы орташа қашықтықтар жеткілікті үлкен болған жағдайда ғана дұрыс: үлкен қашықтықтарда 264-суреттегі  $\varepsilon_p$  қисықтығы өте көлбеу кетеді де, осыдан  $\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \approx 0$  шығады. Молекулалар арасындағы орташа қашықтықтар азайған сайын, яғни газ тығыздығы ұлғайған сайын, молекулалар арасындағы тартылыс күштерінің ролі барған сайын арта түседі. Сонымен қоса, жоғарыда байқағанымыздай, газ алып тұрған көлемнің, молекулалар қозғалысқа түсе алатын бөлігі де біртіндеп азаятын болады.



265-сурет.

Осы айтылғандардың бәрінен, үлкен тығыздықтағы газдың өзгерісін дұрыс сипаттайтын теңдеудің біріншіден, молекулалардың бір-біріне өз ара тартылысын, екіншіден, молекулалардың меншікті көлемінің ақтық мөлшерін ескеруге тиісті екендігі шығады.

### § 118. Ван-дер-Ваальс теңдеуі

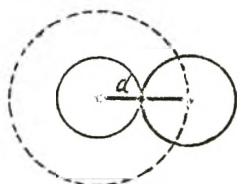
Нақты газдардың өзгерісін сипаттауға ұсынылған көптеген теңдеулердің ішінен Ван-дер-Ваальс теңдеуі ең қарапайым және сонымен бірге жеткілікті дәрежедегі жақсы нәтиже беретін теңдеу болып шықты. Бұл теңдеу  $pV_{км} = RT$  теңдеуге түзетулер енгізу арқылы шығарылып мына түрде беріледі:

$$\left(p + \frac{a}{V_{км}^2}\right)(V_{км} - b) = RT \quad (118.1)$$

Мұндағы  $p$  — газға сырттан түсірілген қысым (ол газдың ыдыс қабырғаларына түсіретін қысымына тең),  $a$  және  $b$  әр газ үшін әр түрлі мәндері болатын, тәжірибелер арқылы анықталатын Ван-дер-Ваальс тұрақтылары. Егер қысым квадрат метрге қатысты ньютондар арқылы, ал көлем киломольге қатысты алынған куб метрлер арқылы өрнектелсе, онда константа  $a$ -ның өлшемділігі:  $n \cdot м^4/кмоль^2$ , ал константа  $b$ -нікі  $м^3/кмоль$  болады. Кейде

константа  $a$  өлшемділігін  $ат \cdot л^2/моль^2$ , ал константа  $b$  өлшемділігін  $л/моль$  деп те өрнектеуге болады.

Константа  $b$  молекулалардың мөлшерлері шектеулі болатындықтан да олардың қозғалысы үшін пайдасы жоқ көлем үлесін анықтайды. Бұл константа мынадай себептерге байланысты молекулалардың төрт есе артырылған көлеміне тең болады. Ыдыста тек екі-ақ моле-



266-сурет.

кула болсын. Осы молекулалардың кез келген біреуінің центрі екіншісінің центріне молекула диаметрінен  $d$  аз қашықтыққа жақындай алмайды (266-сурет). Сөйтіп, молекулалардың екеуінің де центрлері үшін радиусы  $d$  сфералық көлемнің, яғни молекуланың сегіз көлеміне тең көлемнің пайдасы жоқ екен. Ал бір молекулаға есептеп алғанымызда молекуланың төрт еселенген көлеміне тең көлем пайдасыз боп шығады. Молекулалар қашан да болсын пар-парымен соқтығысатындықтан (үш және одан да көп молекуланың өз ара соқтығысу ықтималдығы шексіз аз), соңғы айтылған пікіріміз молекулалардың кез келген пары үшін дұрыс. Осыдан газ молекулаларының әрқайсысына есептегенде бір молекуланың төрт еселеп алған көлеміне тең, ал барлық молекулалар үшін молекулалардың төрт еселенген қосынды көлеміне тең көлемнің пайдасыз екендігі шығады.

Жетілдіру  $a/V_{км}^2$  молекулалардың бір-біріне өз ара тартылысына байланысты  $p_i$  ішкі қысымды береді. Егер молекулалардың өз ара әсерлері кенет тоқтап қалған болса, онда оларды сол көлем шегінде ұстап қалу үшін сыртқы қысымды  $p_i$  ішкі қысымға тең қысымға ұлғайтуымыз қажет болар еді.  $p_i$  ішкі қысымның көлем квадратына кері пропорционал екендігін мына себептер арқылы түсіндіруге болады. Молекулалардың өз ара әсерлері олардың арасындағы қашықтық артқан кезде тез азаятындықтан, қайсыбір  $r$  қашықтықтан басталатын молекулалардың арасындағы өз ара әсерлерді ескермесек те болады.  $r$  қашықтық молекулалық әсер радиусы деп аталады. Радиусы  $r$  сфераны молекулалық әсер сферасы дейді. Газ ішінде ойша жазықтық жүргі-



267-сурет.

зейік те (267-сурет). осы жазықтықтың екі жақ бетінде тұрған газ бөлшектерінің бір-біріне қандай күшпен әсер ететінін анықтап көрейік. Бұл күштің жазықтық беті бірлігіне қатынасын алсақ, ішкі қысым шығады.

Ойша алынған жазықтықтың сол жағындағы молекуланың әрқайсысы жазықтықтың оң жағындағы берілген молекуланы қоршай жүргізілген молекулалық әсер сферасының жазықтықтан шығып тұрған бөлігінің шегіне кіретін әрбір молекулалардың (мұндай молекулалар 267-суретте крестер арқылы белгіленген) тартылысына душар болады. Мұндай молекулалардың саны, демек, жазықтықтың сол жағындағы әрбір молекулаға әсер ететін күш бір өлшем көлемдегі молекулалардың  $n$  санына пропорционал болады. Жазықтықтың оң жағындағы молекулалардан тартылыс әсер жазықтықтың сол жақтағы қалыңдығы  $r$  қабатқа кіретін молекулаларға ғана беріледі. Мұндай молекулалардың саны да  $n$ -ге пропорционал. Сөйтіп, газдың бір бөлігінің екінші бөлігін тартатын күші, демек, ішкі қысым шамасы да,  $n^2$ -қа пропорционал болады екен. Мұндағы  $n$  газ көлеміне кері пропорционал болатындықтан, ішкі қысым көлемінің квадратына кері пропорционал болады.

Теңдеу (118.1) газдың бір киломоли үшін жазылған. Газдың киломолине сәйкес келетін ( $z = m/\mu$ ) газдың  $m$  массасына арналған теңдеуге көшу үшін, газдың  $z$  киломоли дәл сондай жағдайда  $z$  есе үлкен көлем алатынын ескеруіміз керек:

$$V = zV_{\text{км}}$$

(118.1) теңдеудегі  $V_{\text{км}}$  -ді  $V/z$  арқылы алмастыра отырып, мынаны шығарып аламыз:

$$\left(p + \frac{z^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{z} - b\right) = RT$$

Бұл теңдеуді  $z$ -ке көбейте отырып және

$$a' = z^2 a; \quad b' = zb \quad (118.2)$$

белгілеулерін енгізе отырып, газдың  $z$  молине арналған Ван-дер-Ваальс теңдеуіне көшеміз:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right) (V - b') = zRT, \quad (118.3)$$

мұндағы  $a'$  және  $b'$  әріптері арқылы  $z$  киломольге арналған Ван-дер-Ваальс константалары белгіленген. Бұлардың  $a$  және  $b$ -мен байланысы (118.2) қатысы арқылы

берілген.  $a'$  өлшемділігі  $n \cdot m^4$ , ал  $b'$  константасының өлшемділігі көлемдегідей.

Ван-дер-Ваальс теңдеуі (98.14) теңдеуіне қарағанда газ өзгерісін қаншалықты дәлірек сипаттайтынын 10-таблицада келтірілген (алдыңғы параграфты қараңыз) мәліметтерден көруге болады. Таблицаның үшінші бағанасында, екінші бағанадағы  $pV$  үшін берілген азот массасына арналған  $(p + \frac{a'}{V^2})(V - b')$ <sup>1</sup> шамасының мәндері берілген. Таблицада көрсетілгендей, Ван-дер-Ваальс теңдеуінің экспериментке сәйкестігі, (98.14) теңдеумен салыстырғанда анағұрлым тәуір.

Нақты газдардың барлығының қасиеті тығыздық азайған сайын идеал газдар қасиетіне жақындайтындығы фактісіне сәйкес Ван-дер-Ваальс теңдеуі, көлемнің шексіздікке ұмтылуымен бірге өзгере отырып, ақыр аяғында, (98.14) теңдеуіне айналады. Бұған көз жеткізу үшін (118.3) теңдеудегі  $p$  мен  $V$ -ны жақшаның сыртына шығарамыз:

$$dV \left( 1 + \frac{1}{pV} \cdot \frac{a'}{V} \right) \left( 1 - \frac{b'}{V} \right) = zRT,$$

мұндағы көбейтінді  $pV$  шамамен тұрақты боп қалатынын есепке аламыз.

Жоғарғы (118.3) теңдеудегі жақшаларды ашып және одан шыққан өрнекті  $V^2$ -қа көбейтіп, Ван-дер-Ваальс теңдеуін мына түрге келтіруге болады:

$$pV^3 - (b'p + zRT)V^2 + a'V = a'b' \quad (118.4)$$

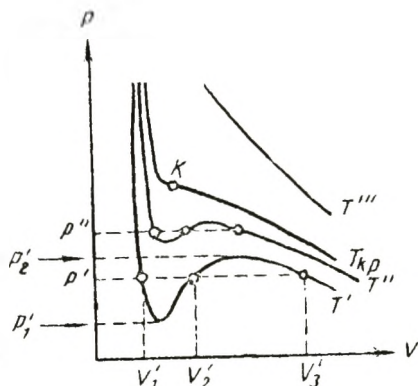
Коэффициенттері  $p$  және  $T$  параметрлерге тәуелді және  $V$ -ға қатысты кубтық теңдеу алынды. Бос мүшесі және заттық коэффициенттері бар кубтық теңдеудің үш шешуі болады, оның үстіне коэффициенттердің ара қатысына қарай не бұл шешудің үшеуі бірдей заттық шешу, не шешулердің біреуі — заттық, ал қалған екеуі — комплексті болады. Ал көлем тек заттық шама болатындықтан, комплексті шешулерде физикалық мән болмайды.

268-суретте температураның бірнеше мәніне арналған Ван-дер-Ваальс изотермалары келтірілген. Температура  $T$  және қысым  $p_1$  мен  $p_2$  шегінде болғанда (118.4), теңдеудегі коэффициенттердің мәні теңдеу шешулерінің

<sup>1</sup> (118.3)-ке сәйкес бұл шаманың тұрақты болуы міндетті.

үшеуі бірдей заттық шешулерге айналатындай болады, қысымның басқа мәндерінде тек бір шешу ғана заттық шешу болады. Теңдеудің үш түрлі заттық шешулерінің арасындағы айырмашылық температура артқан сайын азая түседі ( $T'$  және  $T''$  изотермаларды,  $T''' > T'$  салыстырыңыз) Әр зат үшін әр түрлі боп келетін белгілі бір нақтылы температурадан  $T_{кр}$

бастап, қалаған қысымда теңдеудің (118.4) тек бір ғана шешімі заттық шешім болып қалады. Температура  $T_{кр}$  кризистік температура деп аталады. Егер температураны жоғарылатсақ, онда теңдеудің шешулеріне  $V_1$ ,  $V_2$  және  $V_3$  сәйкес нүктелер барған сайын жақындай түседі де, ақырында, кризистік температураға жеткенде, 268-суретте  $K$  арқылы белгіленген бір нүктеге айналады.  $K$  нүктесі кризистік



268-сурет.

нүкте деп аталады. Сәйкес изотерма үшін  $K$  нүктесі болып табылады. (118.4) теңдеуінің өз ара тең үш шешуі осы нүктеге сәйкес келеді. Кризистік изотермаға осы  $K$  нүктесінде жүргізілген жанама температура кризистік мәнге жақындаған сайын  $p'$ ,  $p''$  және т. б. қиюшылардың ұмтылатын шегі боп табылады. Демек, бұл жанама барлық қиюшылар сияқты  $V$  осіне параллель болады да, содан  $K$  нүктесінде туынды  $\frac{dp}{dV}$  нольге тең болып шығады.

Оның үстіне нүктеде екінші туынды да  $\frac{d^2p}{dV^2}$  нольге тең болуға тиіс.

(118.1) теңдеуін  $p$ -ға қатысты шешелік:

$$p = \frac{RT}{V_{км} - b} - \frac{a}{V_{км}^2}. \quad (118.5)$$

Бұл өрнекті  $V_{км}$  бойынша дифференциалдаудан мынау шығады:

$$\frac{dp}{dV_{км}} = - \frac{RT}{(V_{км} - b)^2} + \frac{2a}{V_{км}^3},$$

$$\frac{d^2p}{dV_{км}^2} = \frac{2RT}{(V_{км} - b)^3} - \frac{6a}{V_{км}^4}.$$



Кризистік нүктеде, яғни  $T = T_{\text{кр}}$ ,  $V_{\text{км}} = V_{\text{км.кр}}$  мән-дерін қойғанымызда, бұл өрнектер нольге айналуға тиіс:

$$-\frac{RT}{(V_{\text{км.кр}} - b)^2} + \frac{2a}{V_{\text{км.кр}}^3} = 0,$$

$$\frac{2RT_{\text{кр}}}{(V_{\text{км.кр}} - b)^3} - \frac{6a}{V_{\text{км.кр}}^4} = 0.$$

Кризистік  $K$  нүкте үшін жазылған

$$p_{\text{кр}} = \frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{км.кр}} - b} - \frac{a}{V_{\text{км.кр}}^2},$$

(118.5) теңдеуімен бірге  $p_{\text{кр}}$ ,  $V_{\text{км.кр}}$  және  $T_{\text{кр}}$  белгісіздері бар үш теңдеу шығады. Осы теңдеулер системасын шешкенімізде, мыналар шығады:

$$V_{\text{км.кр}} = 3b,$$

$$p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2},$$

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27bR}.$$

Сөйтіп,  $a$  және  $b$  Ван-дер-Ваальс константаларын біле отырып, кризистік шамалар деп аталатын  $V_{\text{км.кр}}$ ,  $p_{\text{кр}}$  және  $T_{\text{кр}}$  кризистік нүктеге сәйкес келетіндерді табуға болады. Сонымен қатар, керісінше, белгілі кризистік шамалар арқылы Ван-дер-Ваальс константаларын табуға болады.

Кризистік шамаларға арналған өрнектерден мынау шығады:

$$p_{\text{кр}} V_{\text{км.кр}} = \frac{3}{8} RT_{\text{кр}},$$

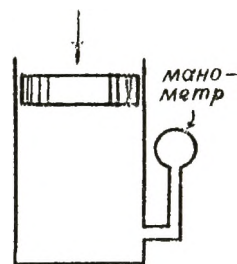
ал идеал газ күйінің теңдеуі бойынша мына теңдік орындалуға тиіс еді:

$$p_{\text{кр}} V_{\text{км.кр}} = RT_{\text{кр}}.$$

## § 119. Эксперименттік изотермалар

Изотерманы тәжірибе жүзінде шығарып алу үшін затты газ күйінде алу керек те, оны жылжымалы поршені бар ыдысқа (269-сурет) орналастыру керек. Содан кейін заттың температурасы тұрақты болуын қадағалай отырып және қысым мен көлемнің екеуін бірдей өлшей оты-

рып, затты жайлап сығу керек. Осындай тәжірибелердің кризистік температурадан төменгі температура жағдайындағы нәтижесі 270-суретте келтірілген. Алғашқыда көлемнің азаюына байланысты газдың қысымы<sup>1</sup> ұлғаяды, бұл жағдайдағы изотерманың барысы Ван-дер-Ваальс теңдеуімен бір шама жақсы сипатталады. Алайда, қайсыбір  $V_r$  көлемнің мәнінен бастап эксперименттік изотерма теңдеуге (118.3) бағынуды қояды. Көлемнің осы мәнінен бастап ыдыстағы қысымның өзгерісі тоқталады да, заттың өзі біртекті болудан қалады: газдың бір үлесі конденсацияға ұшырап сұйыққа айналады. Былайша айтқанда, заттың екі фазаға, сұйық пен газға жіктелуі пайда болады. Көлемді одан әрі азайтқан сайын заттың бұрынғыдан да көп үлесі сұйық фазаға ауысатын болады және бұл ауысу суретте  $p_{\text{кан.б}}$  арқылы белгіленген тұрақты қысымда жүзеге асады.



269-сурет.

Заттың сұйыққа конденсациялану процесі аяқталғаннан кейін (бұл жағдай көлемнің мәні  $V_c$ -ға жеткенде өтеді).

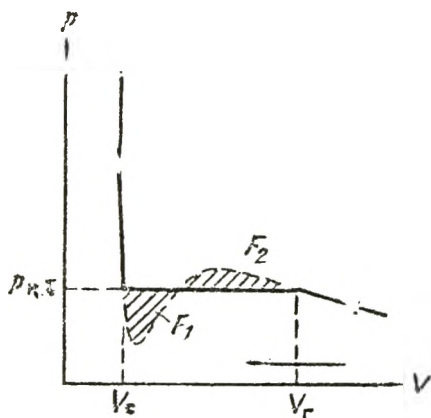
Көлемнің одан арғы азаюы қысымның тез артуымен байланысты болады. Бұл кезде изотерманың барысы жуықтап тағы да (118.3) теңдеуіне бағынатын болады. Изотерманың бұл учаскесіне сәйкес келетін заттың күйі тағы да біртекті болып шығады, бірақ ол газ күйі емес, сұйық күйге жатады.

Сонымен, Ван-дер-Ваальс теңдеуі заттың газ күйін ғана сипаттап қана қоймай, әрі сұйық күйге ауысу процесі мен сұйықты сығу процесін де қамтиды екен.

Эксперименттік изотерманы Ван-дер-Ваальс изотермасымен салыстырсақ, бұл екі изотерма заттың бір фазалық күйлеріне сәйкес келетін учаскелерде бір-біріне жеткілікті жақсы үйлесетіні, ал заттың екі фазаға жіктелу облыстарында бір-бірінен өте алшақ кететіні байқалады. Ван-дер-Ваальс изотермасындағы S-тәрізді иректің орнына сол облыста эксперименттік изотермада горизонталь түзу сызықты учаске пайда болады: бұл учаске ирек қамтитын  $F_1$  және  $F_2$  аудандар (270-сурет) бірдей болатындай орналасады.

<sup>1</sup> Заттың кризистік температурадан төменгі күйі кейде бу деп аталады.

Изотерманың горизонталь учаскелеріне сәйкес келетін күйлерде заттың сұйық және газ тәрізді фазаларының арасында тепе-теңдік байқалады. Өз сұйығымен тепе-теңдікте тұрған газ (не бу) қаныққан бу деп аталады. Алынған температурада тепе-теңдікті жүзеге асыруға болатын қысым  $p_{\text{қан.б}}$  қаныққан бу қысымы (не серпімділігі) деп аталады.

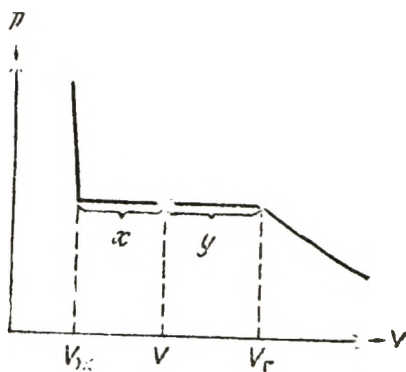


270-сурет.

$V_r$  — заттың газ күйіндегі  $p_{\text{қан.б}}$  қысымдағы алатын көлемі; ал  $V_c$  — заттың осы қысымдағы сұйық күйінде алатын көлемі. Заттың бір өлшем массасының көлемін  $V'$  меншікті көлем дейік. Сонда, егер заттың массасы  $m$ -ге тең болса, онда қаныққан бу мен сұйықтың  $T$  температурадағы және  $p_{\text{қан.б}}$  қысымдағы меншікті көлемдері мынаған тең болады:

$$V'_6 = \frac{V_r}{m}; \quad V'_c = \frac{V_c}{m}. \quad (119.1)$$

Кез келген  $V$  көлем аралық мәндерде (271-сурет) массасы  $m_c$  заттың бір үлесі сұйық күйде болады да, массасы  $m_6$  екінші үлесі бу күйінде болады. Демек, сұйықтың үлесіне  $V'_c m_c$  көлем тиісті болады да, қаныққан бу үлесіне  $V'_6 m_6$  көлем тиісті болады. Бұл екі көлемнің қосындысы  $V$  көлемге тең болуға тиіс:



271-сурет.

$$V = V'_c m_c + V'_6 m_6 \text{ т. б.}$$

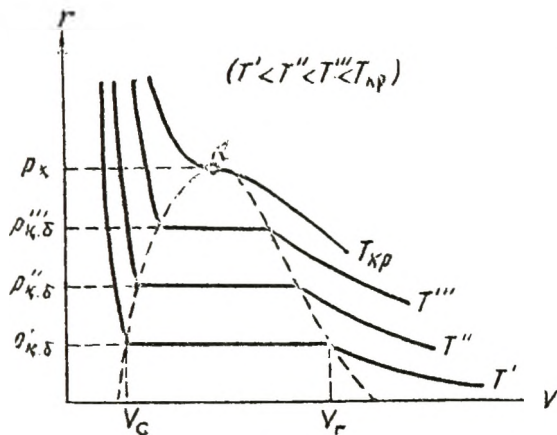
Меншікті көлемдерге арналған (119.1) өрнектерді қоя отырып,  $m$  массаны  $m_c + m_6$  қосындысымен алмастыра отырып, мыналарды аламыз:

$$V = V_c \frac{m_c}{m_c + m_6} + V_r \frac{m_6}{m_c + m_6}$$

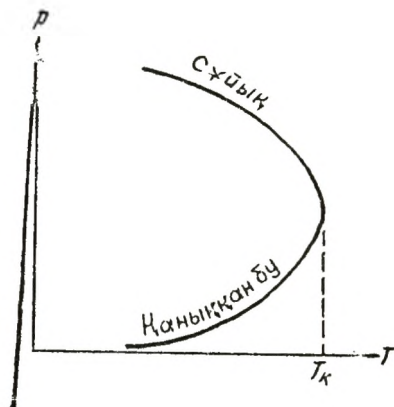
осыдан

$$\frac{m_c}{m_b} = \frac{V_r - V}{V - V_c} = \frac{y}{x}$$

Демек, екі фазалық күйдегі сұйық пен қаныққан бу массаларының қатынасы изотерманың горизонталь учас-



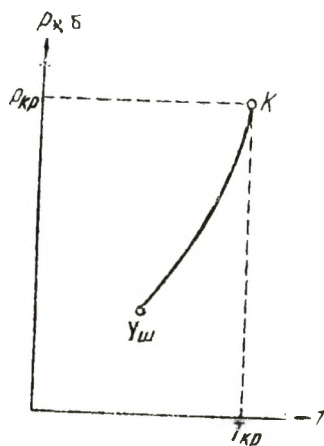
272-сурет.



273-сурет.

кесінің сол күйді кескіндейтін нүкте бөліп тұрған кесінділерінің қатынасына тең болады.

272-суретте температураның бірнеше мәндеріне арналған эксперименттік изотермалар келтірілген. Суреттен температура артқан сайын изотерманың горизонталь учаскесінің қысқара беретіні және  $T_{кр}$  кризистік температураға жеткен соң нүктеге айналатыны көрініп тұр. Осыған сәйкес меншікті көлемдердің айырмашылығы, демек, сұйық пен қаныққан бу тығыздықтарының айырмашылығы азая береді. Кризистік температурада бұл айырмашылық таза жойылып кетеді. Сонымен бірге сұйық пен будың арасындағы айырмашылық мүлде жойылады. Сұйық тығыздығы мен қаныққан будың температураға байланысты өзгерісі 273-суретте көрсетілген.



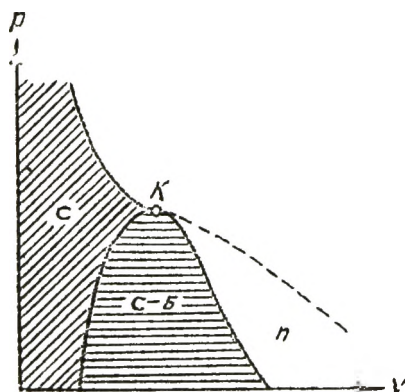
274-сурет.

272-суреттен қаныққан бу қысымы температураға байланысты өсе келіп, кризистік нүктеде  $p_{кр}$  мәніне жететіні байқалады. Қысымның  $p_{қан.б}$  температураға тә-

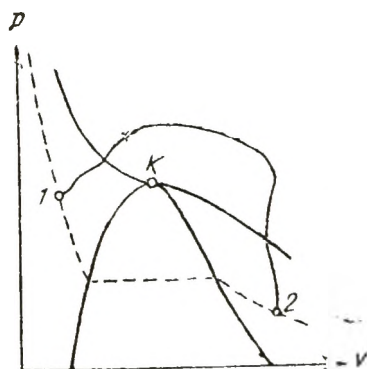
уелділігі 274-суретте көрсетілген. Қисық кризистік нүктеде аяқталады, себебі кризистік нүктеден жоғарғы температураларда қаныққан бу ұғымы өз мағынасын жояды. Қисық үштік нүкте үшін деп аталатын және келесі 151-параграфта сөз болатын нүктеден басталады.

Егер изотермалардағы горизонталь учаскелердің шеткі нүктелері арқылы сызықтар жүргізсек (272-сурет), заттың екі фазалық күйлері облысын шектейтін қоңырау тәрізді қисық пайда болады. Кризистіктен жоғарғы температуралардың бәрінде зат қалаған қысымда біртекті болатындығы байқалады. Мұндай температураларда қанша сықсақтағы затты сұйылтуға болмайды.

Кризистік температура ұғымын ғылымға алғаш 1860 ж. Д. И. Менделеев кіргізген. Менделеев оны сұйықтың абсолют қайнау температурасы деп атады да, оны молекулалардың арасындағы ілініс күштер жойылатын температура және сұйықтың қысым мен оның алып тұрған көлеміне тәуелсіз буға айналатын температурасы деп қарастырды.



275-сурет.



276-сурет.

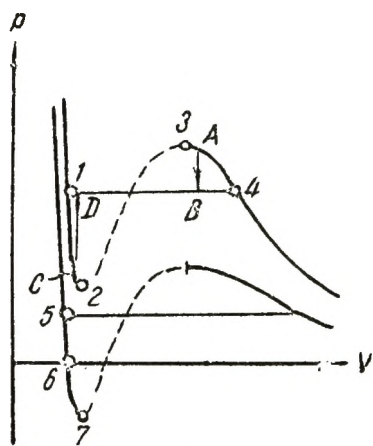
Қоңырау тәрізді қисық пен кризистік изотерманың ( $K$  нүктенің сол жағындағы) учаскесі диаграмманы ( $p, V$ ) үш облысқа бөледі (275-сурет). Көлбеу штрихтармен заттың біртекті сұйық күйі алып жатқан облысы көрсетілген. Қоңырау тәрізді қисықтың астында, өзімізге бұрыннан белгілі, екі фазалық облыс жатыр да, ал қоңырау тәрізді қисық пен кризистік изотерманың жоғары тармағының оң жағындағы облыс, заттың біртекті газ күйіне сәйкес келетін облыс болып табылады. Соңғы облыстан кризистік изотерманың оң жақ тармағының

астында жатқан учаскесін бұ облысы дей отырып, ерекше бөліп алуға болады. Бұл облыстағы қалаған күйдің қалған газдық күйлерден айырмашылығы мынадай: алғашқыдан осындай күйде тұрған затты изотермиялық қысса, зат сұйылу процесіне ұшырайтын болады. Зат кризистік температурадан жоғарғы күйлердің бірінде тұрғанда, оны ешқандай да қысым түсіру арқылы сұйылту мүмкін емес. Заттың газ тәрізді күйлерін газ және бұ деп екіге бөлу көпшілік қабылдамаған нәрсе болып табылады.

Екі фазалық облысты (276-сурет) қимайтындай етіп ауысу процесін таңдап ала отырып, сұйық күйден газ тәрізді күйге (және керісінше) ауыстыруды затты екі фазаға жіктемей-ақ жүзеге асыруға болады. Мұндай жағдайда зат ауысу процесінде әрдайым біртекті болып қала береді.

### § 120. Аса қаныққан бұ және асыра қыздырылған сұйық

Ван-дер-Ваальс изотермасын эксперименттік изотермамен салыстыра отырып, біз  $S$ -тәрізді ирек  $1-2-3-4$  орнына (277-сурет) эксперименттік изотермада, заттың екі фазалық күйіне сәйкес келетін, түзу сызықты учаске  $1-4$  пайда болатынын көрдік. Мұны ирекке  $1-2-3-4$  сәйкес келетін біртекті күйлердің орнықсыздығы арқылы түсіндіруімізге болады.  $2-3$  учаскедегі орнықсыздық, егер осы учаскеде  $\frac{dp}{dV}$  туындының оң сан екенін ескерсек, өзінен-өзі түсінікті болып шығады. Демек, егер зат  $2-3$  күйлер тізбегін өте алатын болса, онда оның қасиеттері табиғи қасиетке қарсы болар еді: газ көлемінің ұлғаюы қысымның азаюына байланысты емес, қайта ұлғаюына байланысты болар еді.



277-сурет.

Туындының  $\frac{dp}{dV}$  мәні  $1-2$  және  $3-4$  учаскелерде теріс сан, сондықтан бұл учаскелер іс жүзіне асуға тиіс сияқты. Шынында да, белгілі жағдайларда бұл учаске-

лерге сәйкес күйлер жүзеге аса алады. Алайда мұндай күйлер онша орнықты емес, мысалы,  $A$  күйдегі буға бір тозаң кездессе-ақ зат тұтасымен екі фазаға жіктеледі де  $B$  күйге ауысатын болады (277-суретте стрелкамен көрсетілген  $A \rightarrow B$  ауысуды қараңыз). Осындай онша орнықты емес күйлер метастабильді күйлер деп аталады. Зат 1—2 күйде тұрғанда асыра қыздырылған сұйық деп аталады, ал 3—4 күйдегі зат аса қаныққан бу деп аталады.

Жеткілікті төменгі температураларда Ван-дер-Ваальс изотермасы иемінің төменгі бөлігі  $V$  осін қиып, теріс қысымдар облысына өтеді (277-суреттегі төменгі изотерманы қараңыз). Зат теріс қысым әсерінен сығылған күйде емес созылған күйде болатыны айқын. Тиісті жағдайлар туғыза отырып, заттың мұндай күйлерін де туғызуға болады. Сөйтіп, төменгі изотерманың 5—6 учаскесі асыра қыздырылған, ал 6—7 учаскесі созылған сұйыққа сәйкес келеді.

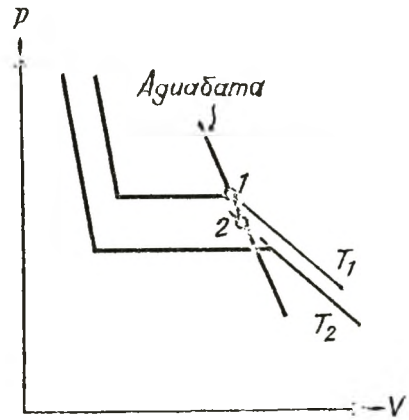
Метастабильді күйлерді жүзеге асыруға қажетті жағдайларды қарастырайық. Әуелі аса қаныққан будан бастайық.

Егер буға ешқандай бөтен кірістірмелер араласпаса, оның сұйыққа конденсациялануы мүмкін емес. Тамшы пайда болуы үшін будың көптеген молекулалары бір мезгілде сұйықтағы молекулалардың бір-бірінен қашықтықтары қандай болса, сондай қашықтыққа топталып, жақындасулары керек, ал бұлай болу мүмкін емес. Конденсацияның пайда болуы үшін конденсация центрлері дейтіндердің пайда болғаны қажет; сонда мұндай центрлер өздеріне ұшып келген молекулаларды қағып алады да, оларды конденсацияланған фазаға айналдырады. Конденсация центрлері ролін тозаңдар, сұйық тамшылары және әсіресе зарядталған бөлшектер (иондар) атқара алады.

Сөйтіп, егер бу бөтен кірістірмелер мен иондардан ұқыпты әбден тазартылған болса, онда ол қаныққан будың алынған температурадағы қысымынан  $p_{\text{қан.б}}$  асып түсетін қысымдарға төзе алады. Будың осындай күйі метастабильдік болады: аса қаныққан будың бұл күйінің бұзылуына жалғыз-ақ конденсация центрінің пайда болуы жеткілікті, сол кезде зат екі фазалық күйге көшетін болады.

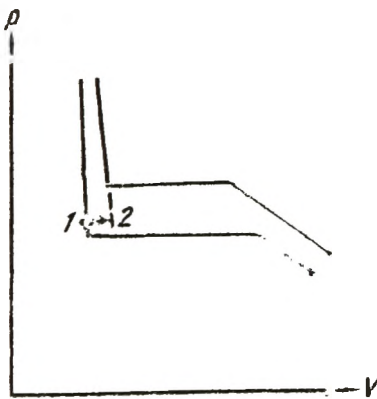
Ал іс жүзінде аса қаныққан буды аса қанықпаған бу-

дан кенет ұлғайту арқылы шығарып алуға болады. Кенет ұлғайту сыртқы ортамен жылу алмасусыз өтеді де, будың суымен қоса жүріп отырады. Будың күйін кескіндейтін нүкте адиабата қисығының бойымен орын ауыстырады. Жоғарғы 103-параграфта айтылғандай, адиабата қисығы изотермаға қарағанда шұғыл келеді, соған байланысты бу  $T_1$  температураға сәйкес келетін 1 стабилді күйден (278-сурет), одан төменірек  $T_2$  температураға сәйкес келетін метастабилді 2 күйге көше алады. Зарядталған бөлшектер (мысалы,  $\alpha$ -бөлшектері) ізін бақылауға арналған приборларда—Вильсон камерасында осы процесс пайдаланылады. Вильсон камерасындағы су буларымен немесе спирт буларымен қаныққан ауа кенет ұлғайтылатын болады. Соның салдарынан ауа суынады да, бу аса қаныққан буға айналады.



278-сурет.

Камераға ұшып кірген бөлшек өзінің жолындағы молекулаларды ионизацияға ұшыратады. Аса қаныққан бу осы пайда болған иондарда конденсацияланады да көрінерлік із қалдыра отырып, ұсақ тамшыларға айналады.



279-сурет.

Асыра қыздырылған сұйықтың пайда болу жағдайын қарастырайық. Қауырт булану процесі (яғни қайнау), конденсация процесіне ұқсас, мысалы, сұйықта ерітілген тозаңдар немесе газ көпіршіктері сияқты бөгде қоспаларда өтеді. Егер сұйықты қатты қоспалар мен газ көпіршіктерінен ұқыпты әбден тазартсақ, онда сұйықты қыздыру арқылы, берілген температурадағы қаныққан бу қысымынан  $p_{қан}$  кем қысымға сәйкес келетін

күйге, сұйық қайнамай тұрып-ақ жеткізуге болады. Бұл сұйықтың асыра қыздырылған сұйық күйі болады.



Сұйықтың дағдылы күйден асыра қыздырылған күйге ауысуы 279-суретте көрсетілген (стрелкамен көрсетілген 1—2 ауысуды қараңыз) Асыра қыздырылған сұйық күй метастабильді күйге жатады. Асыра қыздырылған сұйыққа сәл ғана тозаң араласып кетсе болғаны, сұйық қайнай бастайды да, зат стабилді екі фазалық күйге көшетін болады (277-сурет,  $C \rightarrow D$  ауысуды қараңыз).

Мысалы, сынап сияқты созылған сұйықты былай алуға болады. Бір шеті денекерлеп бітелген ұзын шыны түтікті сынапқа тұтас батырып, содан кейін денекерлеген шетін жоғары аударып түтікті ептеп жоғары көтеретін болсақ, онда мұндай түтіктегі сынап бағанасының биіктігі 760 мм-ден едәуір жоғары болып шығады. Демек, сынапты түтікте ұстап тұратын күш атмосфералық қысым күші емес, молекулалардың арасында пайда болатын ілініс күші. Түтіктің ішіндегі сынап созылған күйде, яғни теріс қысымда тұрады.

## § 121. Нақты газдың ішкі энергиясы

Нақты газ молекулаларының арасындағы өз ара әсерлердің нәтижесінде олардың өз ара потенциалдық энергиясы  $E_p$  пайда болады да, бұл энергия газ молекулаларының  $E_k$  козғалыс кинетикалық энергиясымен қатар газдың ішкі энергиясының құрамына кіреді:

$$U = E_k + E_p.$$

Бізге газдың киломоліндегі молекулалардың кинетикалық энергиясы  $E_k = C_V T$  яғни температура функциясы екені белгілі [(102.8) өрнекті қараңыз].

Молекулалардың өз ара потенциалдық энергиясы, олардың бір-бірінен орташа ара қашықтықтарына байланысты. Сондықтан  $E_p$  газ көлемінің функциясы болуға тиіс. Демек, нақты газдың ішкі энергиясы мына екі параметрдің функциясы екен:  $T$  және  $V$ .

Газ ұлғайған кезде молекулалардың арасындағы тартылыс күштерді жеңуге кеткен жұмыс істелуге тиіс. Механикадан ішкі күштерде қарсы істелетін жұмыс системаның потенциалдық энергиясын арттыруға жұмсалатыны белгілі. Сыртқы күштерді жеңуге кеткен жұмыстың  $d'A = pdV$  өрнек арқылы анықталатыны сияқты, газ ки-

ломоліндегі молекулалардың арасында әсер етуші ішкі күштерді жеңу жұмысын да  $d'A = p_i dV_{\text{км}}$  түрінде жазуымызға болады, мұндағы  $p_i$  — Ван-дер-Ваальстық газ<sup>1</sup> жағдайында  $a/V_{\text{км}}^2$  -ға тең ішкі қысым.  $d'A$ -ны молекулалардың өз ара потенциялық энергиясының  $dE_p$  өсіміне теңестіре отырып, мынаны аламыз:

$$dE_p = p_i dV_{\text{км}} = \frac{a}{V_{\text{км}}^2} dV_{\text{км}}.$$

Бұл өрнекті интегралдау потенциялық энергия үшін мынаны береді:

$$E_p = - \frac{a}{V_{\text{км}}} + \text{const.}$$

Интегралдау тұрақтысының мәнін  $U$  ішкі энергияға арналған өрнек шекті жағдайда, яғни көлем шексіздікке дейін ұлғайған жағдайда идеал газдың ішкі энергиясына арналған өрнекке айналатындай етіп алуымыз керек (көлемді ұлғайтқан кезде нақты газдардың бәрі өздерінің қасиеттері жөнінен идеал газға жуықтайтынын еске салайық). Осы пікірлерге сүйеніп, интегралдау тұрақтысын нольге тең деп алу керек. Сонда нақты газдың ішкі энергиясы үшін мынадай өрнек шығады:

$$U_{\text{км}} = C_V T - \frac{a}{V_{\text{км}}}, \quad (121.1)$$

бұдан біз ішкі энергияның температураны арттырған жағдайда да, көлемді арттырған жағдайда да өсетінін көреміз.

Егер газ қоршаған ортамен жылу алмаспай-ақ және сыртқы жұмыс жасамай-ақ ұлғаятын, не сығылатын болса, онда оның ішкі энергиясы термодинамиканың бірінші бастамасына сәйкес тұрақты болып қалуға тиіс. Мұндай жағдайда энергиясы (121.1) формуласы бойынша анықталатын газ үшін мына шарт сақталуға тиіс:

$$dU_{\text{км}} = C_V dT + \frac{a}{V_{\text{км}}^2} dV_{\text{км}} = 0,$$

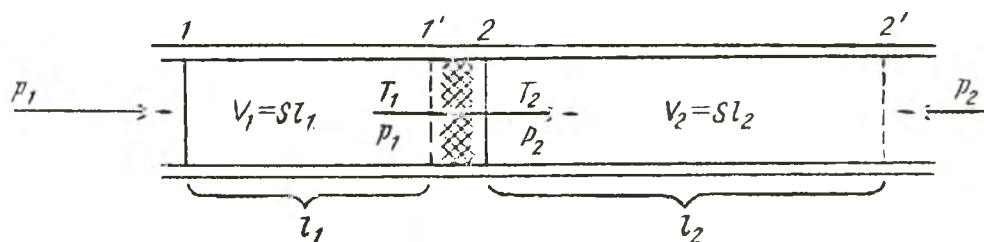
бұдан  $dT$  мен  $dV_{\text{км}}$  таңбалары қарама-қарсы екені шығады.

Демек, бұл сияқты жағдайларда газ ұлғайған кезде әрқашан сууга тиіс, ал сығылса — қызуга тиіс.

<sup>1</sup> Яғни Ван-дер-Ваальс теңдеуіне бағынатын газ.

## § 122. Джоуль — Томсон эффектісі

Газды кеуек затпен тығындалған және жылу изоляциясы бар түтік арқылы өткізе отырып, Джоуль мен Томсон газдың тығын арқылы өте отырып ұлғайғанында, оның температурасы біраз өзгертетінін тапқан. Алғашқы қысым мен температураға байланысты газ температура өзгерісінің  $\Delta T$  таңбасы оң да, теріс те болуы мүмкін, ал жеке жағдайда  $\Delta T$  нольге тең боп шығуы да мүмкін екен. Осы құбылыс Джоуль-Томсон эффектісі деп аталып кетті. Егер газдың температурасы кемитін болса ( $\Delta T < 0$ ), эффект оң деп саналады, егер газ қызатын болса ( $\Delta T > 0$ ), эффект теріс деп есептеледі.



280-сурет.

Тәжірибе схемасы 280-суретте көрсетілген. Қабырғалары жылуды соншалықты нашар өткізетін түтіктің бойында стационарлы (уақытқа байланысты өзгермейтін) газ ағыны туғызылады. Түтіктің ішінде ұсақ қуыстары бар кеуек тығын (мақтадан жасалған) тұрған және осы тығыннан өткен кезде газдың қысымы алғашқы көп  $p_1$  мәнінен кейінгі аз  $p_2$  мәнге дейін өзгеріске ұшырап, нәтижесінде газ өте күшті ұлғаятын болған. Температуралар айырымы  $\Delta T = T_2 - T_1$  өлшенген.

Газдың 1 және 2 қималармен шектелген көлемін ойша бөліп алайық. Түтік бойымен газдың қозғалысына орай бұл қималар орын ауыстыратын болады. Біраз уақыт өткеннен кейін олар сәйкес 1' және 2' қалпында болсын. Өзіміз қарастырып отырған газ үлесі тығыннан өткеннен кейін оның алдыңғы жағындағыдан үлкен көлем алатындықтан 2-қима 1-қимамен салыстырғанда едәуір орын ауыстыратын болады. Бөліп алынған газ үлесіне арнап термодинамиканың бірінші бастамасының теңдеуін жазайық. Газдың ұлғаюы сыртқы ортамен жылу алмасусыз өтеді (адиабатты). Сондықтан газдың іш-

кі энергиясының өзгерісі оған жұмсалған жұмысқа тең болуға тиіс:

$$U_2 - U_1 = A' \quad (122.1)$$

Газдың алынған үлесіне жұмсалған жұмысты газдың шекаралық үлесі атқарады. Бөліп алынған газ үлесіне сол жақтан қозғалыс жағына қарай бағытталған  $p_1 S$  күші ( $S$  — түтіктің қимасы) әсер етеді. Оң жақтан қозғалысқа қарсы бағытталған  $p_2 S$  күші әсер етеді.

Ақыр аяғында қарастырылған газ үлесіне жұмсала-тын жұмыс мынаған тең боп шығады:

$$A' = p_1 S l_1 - p_2 S l_2.$$

Мұндағы  $S l_1$ -ді газдың ұлғайғанға дейін алған  $v_1$  көлемі екенін, ал  $S l_2$  — оның ұлғайғаннан кейінгі көлемі екенін ескеріп, мынаны жазуға болады:

$$A' = p_1 V_1 - p_2 V_2.$$

Бұл өрнекті (122.1)-ге қойып, төмендегі қатысты аламыз:

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (122.2)$$

Сөйтіп, Джоуль-Томсон тәжірибесі жағдайында сақталатын шама газдың ішкі энергиясы емес, күй функциясы боп келетін  $U + pV$  шама екен.

Газдың киломолине арнап есептеу жасайық. Ұлғайғаннан кейін газдың көлемі үлкен болатындықтан, жеткілікті дәлдікпен оны идеал газ деп санауға болады. Сондықтан  $p_2 V_2$ -ні  $RT_2$ -ге тең деп, ал  $U_2 = C_V T_2$  деп алуымызға болады. Жоғарғы (118.1) өрнегіне сәйкес мынадай болады:

$$p_1 V_1 = \left[ \frac{RT_1}{V_1 - b} = \frac{a}{V_1^2} \right] V_1$$

$U_1$  үшін (121.1) өрнекті алу керек. Осы өрнектердің бәрін (122.2) өрнекке қоя отырып, мынаны аламыз:

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} + \frac{RT_1 V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 + RT_2.$$

Үшінші қосылғышты мына түрде жазуымызға болады:

$$\frac{RT_1 V_1}{V_1 - b} = \frac{RT_1 (V_1 - b + b)}{V_1 - b} = RT_1 + \frac{RT_1 b}{V_1 - b}.$$

---

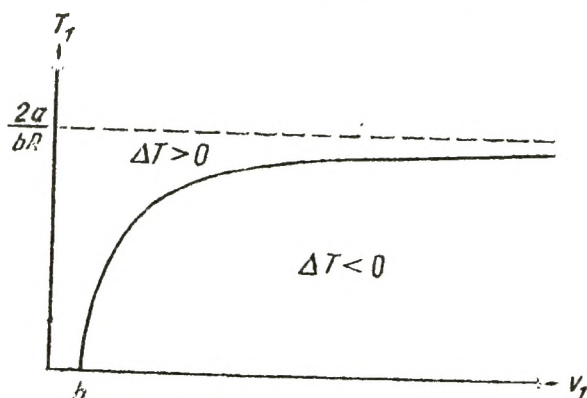
<sup>1</sup> Термодинамикада бұл функция жылу ұстағыштық деп немесе энтальпия деп аталады.

Осыны ескере отырып, мынаны табамыз:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_V + R} \left( \frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (122.3)$$

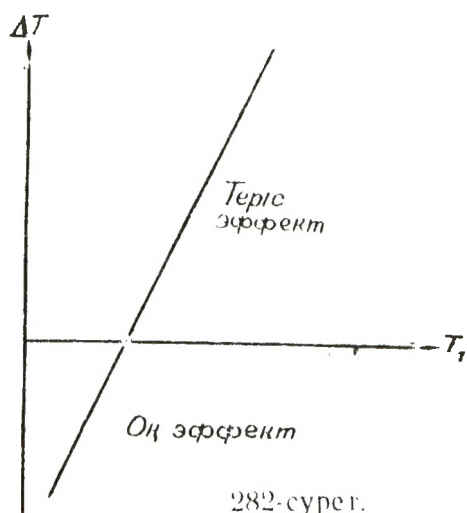
Мұндағы  $\Delta T$ -ның таңбасы жақшада тұрған өрнектің таңбасымен анықталады. Нольдік эффект ( $\Delta T = 0$ ) пайда болуы үшін мына шарт орындалуға тиіс:

$$\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} = 0. \quad (122.4)$$



281-сурет.

( $V, T$ ) жазықтығында (122.4) теңдеуге 281-суретте кескінделген қисық сәйкес келеді. Бұл қисықтың бойында жатқан нүктелер,  $\Delta T = 0$  болғандағы  $T_1$  және  $V_1$  параметрлердің мәндерін анықтайды. Сол қисықтан жоғары жатқан нүктелер  $\Delta T > 0$  болғандағы, яғни эффектінің теріс (қисықтан жоғары қарай ауысқанда жақшада тұрған бірінші қосылғыш ұлғайды да, жақшаның мәні нольден артық боп шығады) болғандағы  $T_1$  мен  $V_1$  мәндерін анықтайды. Қисықтан төмен жатқан нүктелер эффектінің оң эффект болғандағы ( $\Delta T < 0$ )  $T_1$  мен  $V_1$  мәндерін анықтайды.



282-сурет.

(122.4) теңдеумен сипатталатын осы қисық инверсия қисығы деп аталады.

Сөйтіп, эффектінің таңбасы мен мәні газдың ал-

ғашқы температурасы мен алғашқы көлеміне (алғашқы қысымына) байланысты болады. Егер  $T_1 > \frac{2a}{bR}$  болса, эффект әрқашан теріс болады. Егер  $T_1 < \frac{2a}{bR}$  болса, эффект бастапқы жеткілікті үлкен көлемде (яғни бастапқы қысым жеткілікті аз болған) ғана оң боп шығады.

Берілген бастапқы көлемде (қысымда)  $\Delta T$  шамасы бастапқы  $T_1$  температураға байланысты сызықты өзгереді (282-сурет) Бастапқы температура неғұрлым төмен болса, газ Джоуль-Томсон эффектісі салдарынан, соғұрлым күштірек сунды.

Джоуль-Томсон эффектісі бүтіндей газдың идеалдықтан бүтіндей ауытқитынын ескерте кеткен жөн. Идеал газ үшін  $pV = RT$  болғандықтан, (122.2) шарты

$$C_v T_1 + RT_1 = C_v T_2 + RT_2$$

өрісіне айналады да,  $T_1 = T_2$  болып шығады.

### § 123. Газдарды сұйылту

Газды сұйылту үшін оны әуелі  $T_{кр}$  кризистік температурадан төменгі температураға дейін суыту қажет. Төменгі 11-таблицаның екінші бағанасында кейбір газдар

11 - т а б л и ц а

Заттар	Кризистік температура, °С	Атмосфералық қысымдағы қайнау температурасы, °С
Оттегі	—119	—183
Азот	—147	—196
Сутегі	—240	—253
Гелий	—268	—269

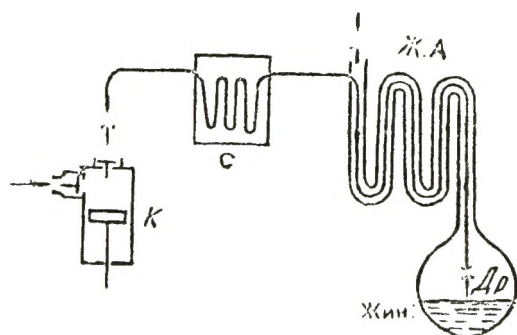
ға<sup>1</sup> арналған кризистік температураның мәндері берілген. Таблицадан оттегі, азот, сутегі және гелий сияқты газдарды сұйылту үшін олардың температурасын аса күшті төмендету керек екені байқалады. Газдарды сұйылтудың өнеркәсіптік тәсілдерінің бірінде (Линде тә-

<sup>1</sup> Таблицаның екі бағанасында да температураның жуықталған мәндері келтірілген.

сілінде) газдарды суыту үшін Джоуль-Томсон эффектісін пайдаланады.

283-суретте Линде тәсілінің принципальды схемасы келтірілген. *K* компрессормен сығылған газ суытқыш *C* арқылы өткізіледі де, сол жерде инверсия нүктесінен төмен жатқан нүктеге дейін суытылатын болады. Бұл, газдың бұдан былайғы ұлғайтылғанында Джоуль-Томсон эффектісі нәтижесінде қызып кетпей, суу үшін қажет. Осыдан кейін газ жылу алмастырғыштың (Ж. А.) ішкі түтіктері арқылы ағып өтіп, дроссель *Др* (Джоуль — Томсон тәжірибесіндегі мақта тығын қандай роль атқарса, сондай роль атқаратын) арқылы өткеннен кейін едәуір ұлғаяды, сосын суынады.

Жылу алмастырғыш, бірінің ішіне бірі сұғылған, диаметрлері әр түрлі екі ұзын түтікшеден (жылу алмастырғыштың мөлшерін

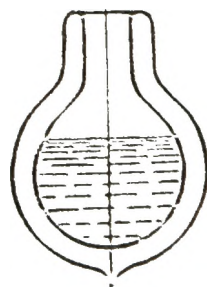


283-сурет.

шағын ету мақсатында түтікшелер спираль тәрізді етіп иілген) тұрады. Ішкі түтікшенің қабырғалары жылуды жақсы өткізетіндей етіп алынады. Сыртқы түтікше жылу изоляциялағыш затпен қапталады. Егер түтікшелер арқылы карама-

қарсы бағытта кіре берістегі температуралары әр түрлі газдар ағынын туғызса, онда ішкі түтікшенің қабырғалары арқылы жылу алмасудың нәтижесінде газдардың температуралары теңесетін болады: кіре берісте температурасы жоғары болған газ жылу алмастырғыш арқылы өткен сайын суына береді де, ал қарсы газ ағыны қыза түседі.

Газдың ұлғаюы кезінде температураның төмендеуі қондырғыны жүргізіп жібергеннен кейін газдың сұйылуын туғызуға жеткіліксіз. Алғашқыда біршама суытылған газ, жылу алмастырғыштың сыртқы түтікшесі арқылы жіберіледі де, дроссельге қарай ішкі түтікшенің бойымен өткен газ тағы біраз суытылатын болады. Сондықтан газдың дрос-



284-сурет.

сельге баратын әрбір келесі үлесінің температурасы алғашқыға қарағанда төменірек боп шығады. Сонымен қатар газдың алғашқы температурасы неғұрлым төмен болса, Джоуль — Томсон эффектісі арқасында, оның келесі температурасы барған сайын көбірек төмендей береді. Демек, газдың әрбір келесі үлесінің ұлғайғанға дейінгі температурасы алғашқымен салыстырғанда төменірек болады және де ұлғайған кезде оған да гөрі суыпатын болады. Сөйтіп, Ж жинағыштағы газдың температурасы біртіндеп төмендей беруі қамтамасыз етіледі де, ақыр аяғында, температура газдың бір үлесі ұлғайғаннан кейін сұйыққа конденсациялана алатын боп төмендейді.

Газдарды сұйылтудың екінші өнеркәсіптік тәсілі (Клод тәсілі) газдың жұмыс өндiрген кездегі сууына негізделген. Сығылған газ поршені бар машинаға (детандерге) жіберіледі де, сол жерде ұлғая отырып, өзінің ішкі энергиясының есебінен поршеньді қозғау жұмысын атқарады. Соның нәтижесінде газдың температурасы төмендеп кетеді. Бұл тәсілді совет физигі П. Л. Капица, поршеньді детандердің орнына, газды суыту үшін турбодетандер дейтінді, яғни алдын ала сығылған газдың күшімен айналатын турбинаны қолдану арқылы жетілдірген болатын.

Қайнау температурасы төмен сұйық газдар Дьюар ыдыстары дейтін ерекше конструкциялы ыдыстарда сақталады. Олар, арасындағы ауа әбден сорылып алынған, қос қабырғалы болады (284-сурет). Вакуум жағдайында газдың жылу өткізгіштігі оның қысымы азайған сайын кеми береді (115-параграфты қараңыз). Сондықтан ыдыс қабырғаларының арасындағы ауасыз қуыс күшті жылулық изоляция туғызады. Дьюар ыдыстары шыныдан да, металдан да жасалады және олардың сыйымдылығы бірнеше миллиметрден бірнеше мың литрге дейін болып келеді.

Сұйытылған газдың температурасы оның қысымына қарай анықталады. 11-таблицада олардың атмосфералық қысымға сәйкес қайнау температуралары келтірілген. Сұйытылған газдың қайнауына сәйкес келетін қысымды төмендете отырып (ол үшін оның пайда боп жатқан буын үздіксіз сорып ала беру керек) оның температурасын төмендете беруге болады. Осы тәсілмен сұйық газдың температурасын ол қашан қатты күйге көшкенге дейін төмендете аламыз.



## XIV Т А Р А У ТЕРМОДИНАМИКА НЕГІЗДЕРІ

### § 124. Кіріспе

Термодинамика алғашқыда жылудың жұмысқа айналуы жөніндегі ғылым ретінде пайда болды. Алайда, термодинамика негізінде жатқан заңдардың жалпы сипаты сонша, қазіргі кезде термодинамикалық тәсілдер зор табыспен көптеген физикалық және химиялық процестерді зерттеуге және зат пен сәуле шығару қасиеттерін тексеруге қолданылады. Жоғарыдағы 91-параграфта ескертілгендей, термодинамика заттың қасиеттерін және айналу процестерін тексерген кезде құбылыстардың микроскопиялық картинасын қарастырып жатпайды. Құбылыстарды ол тәжірибелерден қорытылып шығарылған бірнеше негізгі заңдарға (бастамаларға) сүйене отырып қарастырады. Осы себепті де термодинамикада табылған қорытындылардың дәлдігі, оның негізінде жатқан заңдардың дәлдігіне сәйкес келеді. Ал соңғыларды алатын болсақ, олар толып жатқан тәжірибелердің жалпыламасы боп табылады.

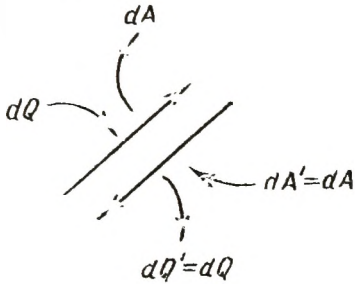
Термодинамика негіздеріне оның алғашқы екі бастамасы жатады. Бірінші бастама энергияның бір түрден басқа түрлеріне айналғанында байқалатын сандық қатыстарды тағайындайды. Екінші бастама осы энергия айналымдары қай жағдайларда жүзеге асатынын анықтайды, яғни процестердің қай бағытта өтуі мүмкін екенін анықтайды.

Бірінші бастаманың ережесі 95-параграфта берілген [(95.2) формуланы қараңыз]. Екінші бастаманың ережесі 126-параграфта келтіріледі.

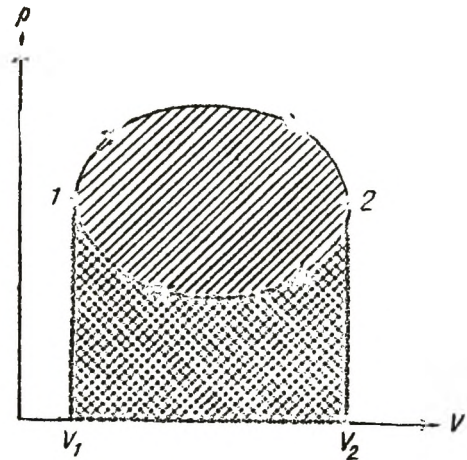
Термодинамикада тепе-тең күй ұғымы мен қайтымды процесс ұғымы үлкен роль атқарады. Тепе-тең күй ұғымының мәнісін 93-параграфта анықтағанбыз.

Қайтымды процесс деп, кері бағытта өткізуге болатын процесті тура бағытта өткізгенде система қандай күйлерден өтсе, кері бағыттағы сондай күйлер тізбегінен өтетін процесті айтады. 93-параграфта айтылғаннан, қайтымды процесске тек тепе-тең процесс жататыны шығады.

Қайтымды процестің қасиеті мынадай болуға тиіс: егер система тура бағыттағы процестің бір элементар учаскесінде  $d'Q$  жылу алып,  $d'A$  жұмыс өндірсен (285-сурет), онда кері бағыттағы процестің сондай учаскесінде система



285-сурет.



286-сурет.

$d'Q' = d'Q$  жылу береді де, оған  $d'A' = d'A$  жұмыс орындалады. Сол себептен қайтымды процесс әуелі бір бағытта, сонан соң кері бағытта өткеннен кейін және система алғашқы күйіне қайтқаннан кейін системаны қоршаған денелерде ешқандай өзгеріс қалмауға тиіс.

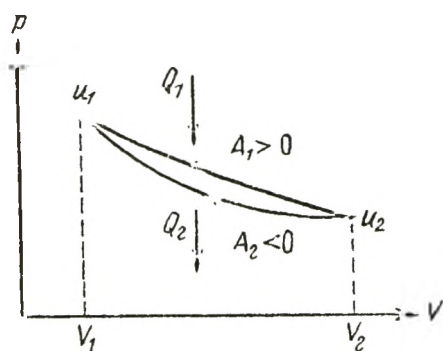
Дөңгелек процесс (яғни цикл) деп, система бірсыпыра өзгерістерге ұшырағаннан кейін алғашқы күйіне қайтып келетін процесті айтады. Графикте мұндай цикл тұйық қисық сызықпен кескінделеді (286-сурет). Дөңгелек процесс кезінде орындалатын жұмыс сан жағынан қисықпен қоршалған ауданға тең болады. Шынында да, ілгерідегі 96-параграфта көрсетілгендей, 1—2 учаскесіндегі жұмыс оң және сан жағынан алғанда, оң жаққа көлбей штрихталған ауданға тең (сағат тілі бағытында орындалатын цикл қарастырылып отыр). 2—1 учаскедегі жұмыс теріс және сан жағынан солға қарай

көлбей штрихталған ауданға тең. Демек, тұтас цикл ішіндегі жұмыс сан жағынан қисықпен қоршалған ауданға тең болады да, тура бағыттағы циклде (яғни сағат тілі бағытында орындалатын циклде) оң, ал оған кері бағытта теріс болады.

Циклді орындағаннан кейін система алғашқы күйіне қайта келеді. Сондықтан күйдің кез келген функциясының, атап айтқанда, ішкі энергияның мәндері циклдің басында және соңында бірдей болады.

## § 125. Жылу машинасының пайдалы әсер коэффициенті

Қай двигатель болсын әлденеше дүркін бір дөңгелек процесс (цикл) жасайтын системаға жатады. Циклдің барысында жұмыстық зат (мысалы, газ) әуелі  $V_2$  көлемге дейін ұлғаятын болсын, ал содан кейін алғашқы  $V_1$



287-сурет.

көлеміне дейін қайта сығылатын болсын (287-сурет). Цикл ішінде жұмыс оң шама болу үшін ( $A > 0$ ), қысым (сонымен қатар әрі температура) ұлғаю процесі кезінде сығылғандағыдан үлкен болуға тиіс. Ол үшін жұмыстық затқа ұлғаю кезінде жылу беру керек ал сығылу кезінде одан жылу алу керек.

Термодинамиканың бірінші бастамасының теңдеуін циклдің екі бөлігіне бірдей жазатын болайық. Ұлғайған кезде ішкі энергия  $U_1$  мәнінен  $U_2$  мәнге дейін өзгереді де, сонымен бірге система  $Q_1$  жылу алады және  $A_1$  жұмыс орындалады. Бірінші бастама бойынша

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \quad (125.1)$$

Сығылған кезде система  $A_2$  жұмыс атқарады және  $Q_2$  жылу береді; бұл —  $Q_2'$  жылу алғанға бара-бар. Демек,

$$-Q_2' = U_1 - U_2 + A_2. \quad (125.2)$$

(125.1) және (125.2) теңдеулерді қоса отырып, мынаны аламыз:

$$Q_1 - Q_2 = A_1 + A_2.$$

Қосынды  $A_1 + A_2$  деп системаның цикл ішінде атқаратын толық жұмысы  $A$  екенін ескерсек, мынаны жаза аламыз:

$$A = Q_1 - Q'_2. \quad (125.3)$$

Сырттан алынған жылудың есебінен периодты жұмыс істеп өндіретін двигатель жылу машинасы деп аталады.

Термодинамиканың бірінші бастамасы кейде былай тұжырымдалады: бірінші текті перпетуум мобиле (мәңгі двигатель), яғни периодты жұмыс істеп сырттан алатын энергиядан гөрі көп мөлшерде жұмыс өндіретін двигатель жасау мүмкін емес.

(125.3) теңдеуден сырттан алынатын  $Q_1$  жылу тұтасымен пайдалы жұмыс шығарып алуға жұмсалмайтыны байқалады. Двигатель цикл бойынша істеу үшін, жылудың  $Q_2$ -ге тең бір бөлігі қоршаған ортаға қайтарып берілуі керек, демек, тиісті орынға (яғни пайдалы жұмыс өндіру үшін) пайдаланылмайды екен. Жылулық машина сырттан алған  $Q_1$  жылуды неғұрлым пайдалы  $A$  жұмысқа асырса, соғұрлым ол машина тиімді екені өзінен-өзі айқын. Сондықтан жылу машинасын, оның пайдалы әсер коэффициенті (қысқаша п. э. к.)  $\eta$  дейтінмен сипаттау келісілген, бұл бір цикл бойында өндірілетін  $A$  жұмыстың сол цикл бойында машинаның алатын  $Q_1$  жылуына қатынасымен анықталады:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (125.4)$$

(125.3) бойынша  $A = Q_1 - Q'_2$  болғандықтан, п. э. коэффициентіне арналған өрнекті былай жазуымызға болады:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}. \quad (125.5)$$

П. э. коэффициентінің анықтамасына қарағанда оның бірден артық болуы мүмкін емес.

287-суреттегі циклді кері аударсақ, суытқыш машинаның циклі шығады. Мұндай машина цикл бойы температурасы  $T_2$  төмен денеден  $Q_2$  жылу мөлшерін алады да, температурасы  $T_1$  анағұрлым жоғарырақ денеге  $Q_1$  жылу мөлшерін шығарып береді. Тұтас цикл ішінде машинада  $A$  жұмыс орындалуға тиіс. Суытқыш машинаның тиімділігі оның суытқыштық коэффициентімен сипатталады және ол коэффициент суытылатын денеден алынған  $Q_2$

жылудың машинаны жүргізуге жұмсалған  $A$  жұмысқа қатынасы арқылы анықталады:

$$\text{Суытқыш коэффициент} = \frac{Q'_2}{A} = \frac{Q'_2}{Q_1 - Q'_2}.$$

## § 126. Термодинамиканың екінші бастамасы

Термодинамиканың екінші бастамасы, бірінші бастама сияқты бірнеше тәсілдермен тұжырымдалуы мүмкін. Ең айқынырақ түрде тұжырымдап айтқанда екінші бастама: *жылудың өзінен-өзі температурасы төмен салқын денеден температурасы жоғарғы қызған денеге ауысуы мүмкін емес дейді. Ал бұдан дәлірек айтқанда, жалғыз-ақ нәтижесі жылудың салқын денеден ыстық денеге ауысуы болып келетін процестерді жүзеге асыру мүмкін емес дейді.*

Бұдан, екінші бастама тегінде жылудың салқын денеден қызған денеге көшуіне тыйым салады деген түсінік болмаса керек. Алдыңғы параграфтың соңында біз мұндай ауысуды қамтамасыз ететін процесті қарастырған болатынбыз. Алайда бұл ауысу процестің жалғыз-ақ нәтижесі емес-ті. Ауысу системаны жүргізіп,  $A$  жұмыстың орындалуына байланысты қоршаған ортадағы өзгерістермен қатар жүргізілген болатын-ды.

Екінші бастаманы тағы да былай тұжырымдауға болады: *жалғыз-ақ нәтижесі бір денеден нақты жылу мөлшерін алып, ол жылуды толығынан жұмысқа айналдыру болып келетін процестерді жүзеге асыру мүмкін емес.*

Бір қарағанда екінші тұжырымдауға, мысалы, идеал газдың изотермиялық ұлғаю процесі қайшы келетін сияқты. Шынында да, идеал газбен қандай да бір денеден алынған жылу толығымен жұмысқа айналады. Алайда жылуды алу мен оны жұмысқа айналдыру, процестің жалғыз-ақ соңғы нәтижесі емес, өйткені процестің нәтижесінде сонымен қатар газ көлемінің өзгерісі байқалады.

Жылулық машинада жылудың жұмысқа айналуы міндетті түрде қосымша процеспен --- қандай да бір  $Q_2$  жылу мөлшерін (алдыңғы параграфты қараңыз) суығырақ денеге ауыстыру процесімен қатар өтеді, соның салдарынан анағұрлым қызған денеден алынатын  $Q_1$  жылу мөлшерін толығынан жұмысқа айналдыру мүмкін емес.

Екінші тұжырымдауда айтылған пікір логика бойынша бірінші тұжырымдағы пікірден туатынына көз жеткізу оңай. Шынында да, жылуды толығымен жұмысқа, мысалы, үйкеліс арқылы айналдыруға болады. Сондықтан бір денеден алынған жылуды, екінші тұжырымдау бойынша тыйым салынған процестің көмегімен, толығынан жұмысқа айналдыра отырып, содан кейін бұл жұмысты үйкелістің көмегімен температурасы жоғары денеге берілетін жылуға айналдыра отырып, біз бірінші тұжырымдауда орындалуы мүмкін смес процесті жүзеге асырған болар едік.

Термодинамиканың екінші бастамасы тыйым салатын процестерді пайдалана отырып, мысалы, мұхит сияқты іс жүзінде энергиясы сарқылмайтын денеден алынған жылудың есебінен жұмыс атқаратын двигатель жасауға болар еді. Іс жүзінде мұндай двигатель мәңгі двигателге пара-пар болар еді. Сондықтан кейде екінші бастаманы былай да тұжырымдайды: екінші текті перпетуум мобиле жасау мүмкін емес, яғни периодты істеп, бір резервуардан жылу алатын және ол жылуды толығынан жұмысқа айналдыратын двигатель жасау мүмкін емес.

## § 127. Карно циклі

Қандай да бір дене температуралары  $T_1$  және  $T_2$  жылу сыйымдылықтары шексіз үлкен екі жылулық резервуармен (ыдыспен) жылу алмаса алатын болсын делік. Бұл жанағы резервуарлардың шектеулі жылу мөлшерін алуы не қайтарып беруі олардың температураларын өзгертпейді деген сөз. Дененің осындай жағдайда қандай қайтымды цикл жасай алатынын анықтайық.

Қарастырылатын цикл, сөз жоқ, барысында дене резервуарлармен жылу алмасатын процестерден тұруы да мүмкін және қоршаған ортамен жылу алмасуға қатысы жоқ процестерден, яғни адиабаттық процестерден тұруы да мүмкін.

Резервуарлармен жылу алмасуға қатысты процесс, тек сол процестің барысында дененің температурасы сәйкес резервуардың температурасымен бірдей болған жағдайда ғана қайтымды болуы мүмкін. Шынында да, егер дене, мысалы, температурасы  $T_1$  резервуардан температурасы сол  $T_1$ -ден кем бола тұрып жылу алатын болса,

онда тап сол процесс кері бағытта өткенде, дене резервуардан алған жылуды тек, оның температурасы қалай болғанда да,  $T_1$ -ден кем болмаған жағдайда ғана қайта қайтарып бере алады. Демек, процестің тура және кері бағыттардағы барысында дененің температурасы әр түрлі болады, дене екі жағдайда да күйлердің (әр түрлі температураларымен сипатталатын) түрліше қатарлары арқылы өтеді де, қарастырылып отырған процесс қайтымсыз боп шығады.

Сөйтіп, жылу алмасумен қатар өтетін процесс, тек дене резервуардан жылу ала отырып және оны кері процесте резервуарға қайтарып бере отырып, ұдайы резервуардың температурасына тең температурасын өзгертпеген жағдайда ғана қайтымды болуы мүмкін. Ал дұрысын айтсақ, жылу алған кезде дененің температурасы резервуардың температурасынан шексіз аз шамада төмен болуға тиіс (әйтпессе жылу керісінше резервуардан денеге ағып кетеді) ал жылуды қайтарған кезде дененің температурасы резервуардың температурасынан шексіз аз мөлшерде жоғары болуға тиіс.

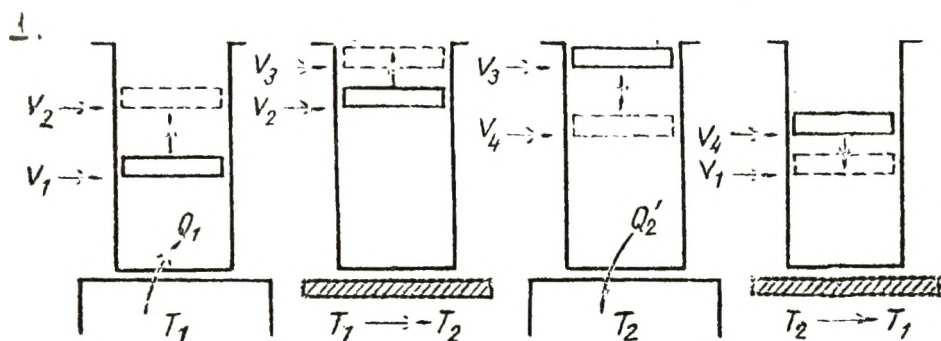
Демек, температурасы тұрақты болып қалатын резервуармен жылу алмасуға байланысты өтетін жалғыз-ақ қайтымды процесс резервуардың температурасында өтетін изотермиялық процесс.

Сонымен, біз мынадай қорытындыға келдік: сыйымдылығы шексіз үлкен екі жылулық резервуармен жылу алмаса алатын дененің (яғни системаның) атқаратын қайтымды циклі тек екі изотермадан (резервуарлар температураларымен тең) және екі адиабатадан тұруы мүмкін. Осындай циклді алғаш қарастырған француз инженері Сади Карно болатын және Карно циклі деліне аталады. Анықтауымыз бойынша Карно циклі қайтымды цикл екенін ескерте кетелік.

Жұмыстық зат ретінде, мысалы, газды алғанда, Карно циклін қалай жүзеге асыруға болатынын қарастырамыз. Газды, тыныздап жымдастырылған поршені бар, цилиндрге толтырайық. Цилиндр қабырғалары мен поршеньді жылу өткізбейтін материалдан жасайық та, ал цилиндрдің түбін, керісінше, жылуды жақсы өткізетін заттан жасайық. Цилиндр мен поршеньнің жылу сыйымдылығын ескермеуге болатындай аз деп алайық.

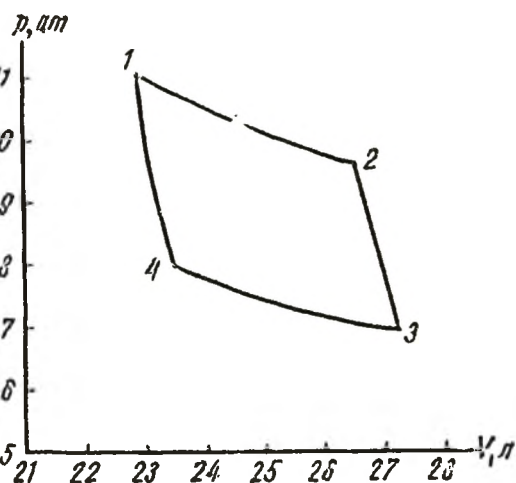
Бастапқыда поршень газдың  $V_1$  көлемі мен  $T_1$  температурасына сәйкес келетін орында тұрсын делік. Ци-

цилиндрді температурасы  $T_1$  резервуарға орнатайық та, газдың жайлап  $V_2$  көлемге дейін ұлғаюына мүмкіншілік.



288-сурет.

берейік. Сонда газ резервуардан  $Q_1$  жылу алатын болады (288-сурет). Содан кейін цилиндрді резервуардан түсіріп, түбін жылу изоляциялағыш қақпақпен жабайық та, газдың температурасы  $T_2$  мәнге дейін төмендегенше адиабаталы ұлғаюға мүмкіндік берейік. Соның нәтижесінде газдың көлемі  $V_3$ -ке тең болып шығады. Енді жылу изоляциялағыш қақпақты ашып, цилиндрді температурасы  $T_2$  резервуардың үстіне қояйық та, газды изотермиялық жағдайда  $V_4$  көлемге дейін, одан кейінгі адиабатты сығылғанында температурасы  $T_1$ , ал көлемінің мәні  $V_1$  болатындай етіп сығатын болайық (әйтпесе цикл тұйықталмайды). Ақырында цилиндрді резервуардан түсіріп, түбін жылу изоляциялағыш қақпақпен жабамыз да, газды адиабатты сыға отырып, оны алғашқы күйге (температурасы  $T_1$  және көлемі  $V$  күйге) келтіреміз.



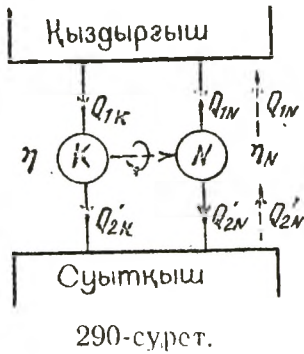
289-сурет.

Егер газ идеал газ болса, онда  $(p, V)$  диаграммадағы цикл 289-суретте (293-суретті де қараңдар) көрсетілгендей болып шығады.



## § 128. Қайтымды және қайтымсыз машиналардың пайдалы әсер коэффициенті

Термодинамиканың екінші бастамасына сүйене отырып, қыздырғышы мен суытқыштары бірдей қайтымды машиналардың бәрінің п. ә. коэффициенттерінің мәні бірдей болатынын дәлелдеуге болады.



Дәлелдеуді кері ұйғару арқылы жүргізейік. Кез келген қандай да болсын  $K$  және  $N$  екі қайтымды жылу машинасын алайық та (290-сурет). машиналардың біреуінің, мысалы,  $K$ -нің, п. ә. коэффициенті екіншісінікінен үлкен деп ұйғарайық.

Ілгеріде бұл ұйғарымымыз термодинамиканың екінші бастамасына қайшы келетініне, демек, соған байланысты оны теріске шығаруымыз керек екеніне көзіміз жететін болады.

Пайымдауымызды жеңілдету үшін машинаның екеуі де циклдің ішінде қыздырғыштан бірдей жылу мөлшерін<sup>1</sup> алады деп ұйғарайық; ол жылуды қысқартып,  $Q_1$  арқылы белгілейік:

$$Q_{1K} = Q_{1N} - Q_1.$$

Ұйғаруымыз бойынша  $\eta_K > \eta_N$ , яғни

$$\frac{Q_1 - Q'_{2K}}{Q_1} > \frac{Q_1 - Q'_{2N}}{Q_1}$$

мұндағы  $Q'_{2K}$  мен  $Q'_{2N}$  циклі ішінде  $K$  және  $N$  машиналардың суытқышқа беретін жылу мөлшерлері.

Жоғарыдағы ұйғарымымыз бойынша сөз жоқ,  $K$  машина цикл ішінде  $N$  машинадан көбірек жұмыс атқаруы керек, сонымен қоса

$$A_K - A_N = (Q_1 - Q'_{2K}) - (Q_1 - Q'_{2N}) = Q'_{2N} - Q'_{2K} \quad (128.1)$$

$N$  машинаны суытқыш машина режимінде істейтіндей етіп, кері бағытта жүргізіп жіберуге мәжбүр етейік. Бұл жағдайда машина қайтымды болғандықтан, цикл ішінде тура бағытта қандай жылу мөлшерін алған болса, суыт-

<sup>1</sup> Бұл жағдай міндетті емес. Өйткені  $Q_{1K} \neq Q_{1N}$  болған жағдайда,  $mQ_{1K} = nQ_{1N}$  болатындай етіп,  $K$  машинаның  $m$  циклін  $N$  машинаның  $n$  циклімен салыстыруымыз керек.

қыштан сондай  $Q_{2N}$  жылу мөлшерін алады да, қыздырғышқа  $Q_1$  жылу мөлшерін беретін болады. Сонымен бірге, цикл ішінде машинаны жүргізіп,  $A_N$  жұмыс өндіру керек. Бұл жұмысты орындау үшін  $K$  машинаны пайдалануға болады, ол үшін  $K$  машина  $N$  машинаны жүргізетіндей етіп, екі машинаны біріне-бірі тіркестіруіміз керек. Осылай тіркестірілген екі машина біртұтас қайтымды жылу машинасына айналады.

Құранды машинаның бір цикл ішіндегі балансын қарастырайық. Қыздырғыштан  $K$  машина  $Q_1$  жылу алады, оған сондай жылу мөлшерін  $N$  машина қайтарып беретін болады. Демек, құранды машина циклді орындау нәтижесінде қыздырғыштан жылу алмайды да, оған жылу бермейді де. Суытқыштан цикл ішінде  $Q = Q_{2N} - Q_{2K}$  жылу алынатын болады.

$K$  машина атқаратын жұмыстың бір  $A_K$  үлесі  $N$  машинаны жүргізуге пайдаланылатын болады. Жұмыстың  $A = A_K - A_N$ -ге қалған үлесін өзіміз қалауымызша пайдалана аламыз. (128.1) қатыс бойынша бұл жұмыс құранды машинаның суытқыштан алатын  $Q$  жылуына тең.

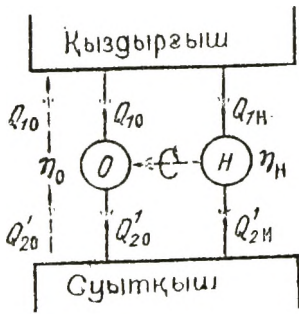
Демек, екі машинаны жоғарыда айтылған жолмен құрастыра отырып, бізге жалғыз-ақ нәтижесі бір денеден (суытқыштан) жылудың бір  $Q$  мөлшерін алып, сол жылуды тұтасымен жұмысқа айналдыруға мүмкіншілік беретін бір процесті жүзеге асыруға болар еді, алайда бұл термодинамиканың екінші бастамасы бойынша мүмкін емес. Сонымен,  $\eta_K < \eta_N$  болады деген ұйғарымымыз дұрыс емес.

Сол сияқты  $\eta_K > \eta_N$  дейтін ұйғарымды да термодинамиканың екінші бастамасына қайшы келеді. Бұған көз жеткізу үшін  $K$  машинаны кері бағытта жұмыс істете отырып, жоғарыдағы пайымдауымызды тағы қайталап шығу керек. Сөйтіп,  $K$  және  $N$  екі машинаның п. э. коэффициенті бірдей болуға тиіс.  $K$  және  $N$  машиналардың срекшеліктері жөнінде, олардың қайтымды машиналар екендігінен басқа, біз ешқандай ұйғарым жасаған жоқпыз. Ендеше, соңғы шыққан нәтижені, олардың конструкциясына және жұмыстық затына байланыссыз қайтымды машиналардың барлығына қолдануымызға болады.

Сонымен, қыздырғыштары мен суытқыштары бір қайтымды машиналардың барлығының п. э. коэффициенті бірдей болуға тиіс дейтін қорытындыға келдік. Демек,

қайтымды машинаның п. ә. коэффициенті тек қана суытқыш пен қыздырғыштың температурасына байланысты бола алады.

Енді қайтымды  $O$  машина мен қайтымсыз  $H$  машинаның п. ә. коэффициентін салыстырайық (291-сурет). Қайтымсыз машинаның п. ә. коэффициенті қайтымды машинаның п. ә. коэффициентінен үлкен деп ұйғарайық. Машинаның екеуінің де цикл ішінде қыздырғыштан алатын жылу мөлшерлері бірдей болсын  $Q_1$  ( $Q_{10} = Q_{1H} = Q_1$ ). Қайтымды машинаны кері бағытта жүргізіп жіберіп, сонымен қатар қайтымсыз машина қайтымды машинаны жүргізіп тұратындай етіп және жоғарыдағы екі қайтымды машина жағдайындағыдай пайымдай отырып,  $\eta_H > \eta_0$  ұйғарымның термодинамиканың екінші бастамасына қайшы келетінін көрсетуге болады.



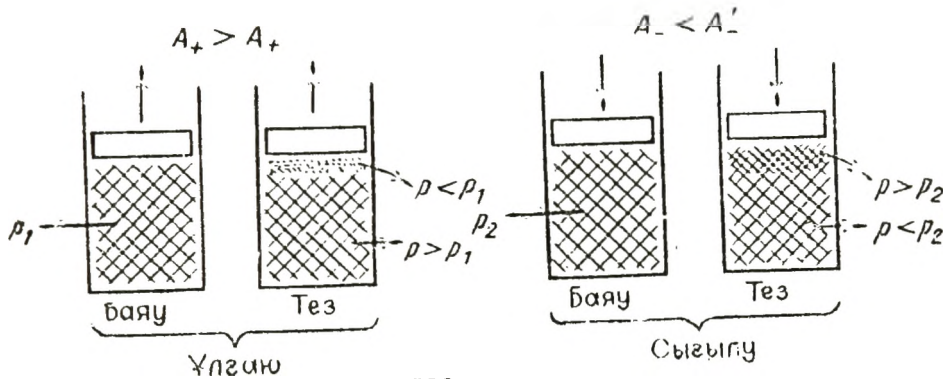
291-сурет.

Осы сияқты жолмен қайтымсыз машинаның  $\eta$  қайтымды машинаның п. ә. коэффициентінен кіші болуы мүмкін емес екенін дәлелдеуге мүмкіншілік жоқ, себебі пайымдау жасай отырып, бізге қайтымсыз машинаны кері бағытта жүргізу қажет болар еді. Мұны жүзеге асырганның өзінде де, қайтымсыз машинаның кері бағыттағы орындайтын жұмысы мен оның қыздырғыш және суытқышпен алмасатын жылу мөлшері, тура бағыттағы сондай жылу мен жұмыстан тек таңбасы жөнінен айырмашылығы болады деуімізге ешбір негіз жоқ.

Сөйтіп, бұл пайымдауымыз  $\eta_H > \eta_0$  ұйғарымымызды теріске шығаруға мәжбүр етеді, алайда  $\eta_H < \eta_0$  мүмкінділігін жоя алмайды. Сонымен бірге бірсыпыра физикалық пікірлер, қайтымсыз машинаның п. ә. коэффициентінің сол жағдайларда істейтін қайтымды машинаның пайдалы әсер коэффициентінен әрқашан кем болатынын нұсқайды. Мұндай пікірлердің кейбіреулерімен біз ілгеріде танысатын боламыз.

Газдың ұлғаюы мен сығылуының қайтымды және қайтымсыз циклдерін салыстырайық. Цикл қайтымды болуы үшін, ол өте жайлап өткізілуі керек, соның салдарынан газдың қысымы оның бүкіл көлемінде теңесіп үлгеретін болады. Цикл ішіндегі толық жұмыс газдың

ұлғайған кезіндегі оң  $A_+$  жұмысы мен сығылған кезіндегі теріс  $A_-$  жұмыстың қосындысынан тұрады. Қорытынды жұмыс  $A = A_+ - A_-$  тең болады (газ ұлғайған кезде жылу алып сығылған кезде жылу береді деп ұйғарылып отыр).



292-сурет.

Егер цикл қайтымсыз жүргізілсе, яғни жеткілікті тез жүргізілсе, онда қысым газдың бүкіл көлемінде теңесіп үлгермейді де, ұлғайған кезде газдың қысымы, поршеньнің астында қайтымды цикл кезіндегі поршеньнің тап сондай қалпындағы қысымнан кем, ал сығылған кезде, керісінше, біршама артық болады (292-сурет). Соның нәтижесінде оң қосылғыш  $A_+$  бұрынғы  $A_+$  -дан кем ал теріс қосылғыш  $A_-$  бұрынғы  $A_-$  -дан артық болады да, толық жұмыс  $A' = A_+ - A_-$  қайтымды циклдегіден аз болады. Соған сәйкес қайтымсыз циклдің п. э. коэффициенті қайтымды циклдің п. э. коэффициентінен кем болады.

Үйкеліс әрқашан жұмыстың жылуға айналуымен байланысты, яғни ол нағыз қайтымсыз процеске жатады. Сондықтан қайтымды машинада үйкеліс болмауға тиіс. Бір қайтымды машина цикл ішінде  $Q_1$  жылу алатын болсын да, жұмыс  $A$  өндіретін болсын. Цилиндр мен поршень арасында үйкеліс бар деп алып, машинаның қайтымдылығын бұзайық. Үйкелістің арқасында жұмыстың  $A$  бір үлесі жылуға айналады да, не суытқышқа беріледі, не қоршаған ортаға сейіліп кетеді. Соның нәтижесінде машина қыздырғыштан бұрынғыша  $Q_1$  жылу мөлшерін ала отырып, аз жұмыс  $A$  атқаратын болады, демек, оның коэффициенті де қайтымсыздық пайда болғаннан кейін кем болып шығады.

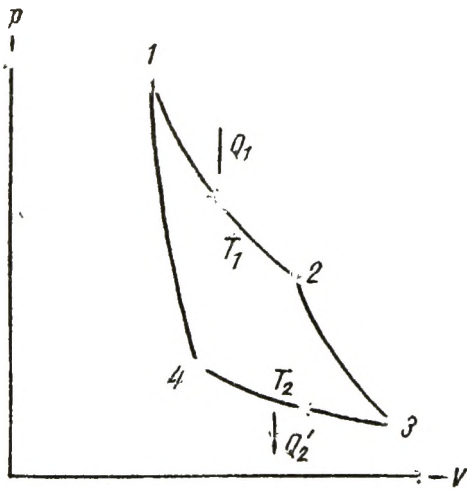
Сонымен, біз мына пікірлерді дәлелдедік.

1) Ұқсас жағдайларда істейтін (яғни қоздырғыштары мен суытқыштары бірдей болып келетін) қайтымды машиналардың бәрінің п. э. коэффициенті бірдей болады;

2) Қайтымсыз машинаның п. э. к., сондай жағдайларда істейтін қайтымды машинаның п. э. коэффициентінен әрқашан кіші болады.

## § 129. Идеал газға арналған Карно циклінің п. э. коэффициенті

Алдыңғы параграфта қайтымды машинаның п. э. коэффициенті оның құрылысы мен жұмыстық заттың қасиеттеріне байланысты еместігі және ол тек қыздырғыш



293-сурет.

пен суытқыштың температураларымен анықталатындығы тағайындалған болатын. Алайда п. э. коэффициенті қыздырғыштың  $T_1$  температурасы мен суытқыш  $T_2$  температурасына қалай байланысты екендігі айқындалған жоқты. Бұл қатысты табу үшін жұмыстық заттың қасиеттері барынша қарапайым боп келетін машинаны қарастырған қолайлы.

Идеал газдың қасиеті, міне осындай. Қыздырғыш пен суытқыштың жылу сыйымдылықтары жеткілікті үлкен болса, қайтымды циклге тек қана Карно циклі (127-параграфты қараңыз) жататынын білеміз.

Сонымен, идеал газға қатысты Карно циклін қарастырайық. Егер бізге осындай циклдің п. э. коэффициентін  $T_1$  және  $T_2$  температуралардың функциясы ретінде табу мүмкін болса, онда барлық қайтымды машиналардың п. э. коэффициенті үшін өрнекті табамыз.

Анықтама бойынша жылу машинасының п. э. коэффициенті мынаған тең:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (129.1)$$

мұндағы  $Q_1$  — циклдің ішінде қыздырғыштан алынатын жылу,  $Q_2$  — цикл ішінде суытқышқа берілетін жылу.

Изотермиялық процесте идеал газдың ішкі энергиясы тұрақты болады. Сондықтан газдың алған жылу мөлшері  $Q_1$  газдан 1 күйден 2 күйге ауысқандағы орындайтын  $A_{12}$  жұмысына тең болады (293-сурет). Бұл жұмыс (105.9) бойынша мынаған тең:

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (129.2)$$

мұндағы  $m$  машинадағы идеал газдың массасы.

Суытқышқа берілетін жылу мөлшері  $Q_2$  оны 3 күйден 4 күйге көшіргенде газды сығуға жұмсалатын  $A_{34}$  жұмысқа тең. Бұл жұмыс былай анықталады:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (129.3)$$

Цикл тұйықталған боду үшін 4 және 1 күйлер бір адиабатада жатуға тиіс. Осыдан мына шарт шығады:

$$T_1 V_1^{\nu-1} = T_2 V_4^{\nu-1} \quad (129.4)$$

[адиабата теңдеуін (103.3) қараңдар].

Осы сияқты, 2 және 3 күйлер бір адиабатада жата- тындықтан мына шарт орындалады:

$$T_1 V_2^{\nu-1} = T_2 V_3^{\nu-1} \quad (129.5)$$

(129.5)-ті (129.4)-ке бөле отырып, циклдің тұйықтал- гандығын көрсететін мына шартты табамыз:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (129.6)$$

Енді (129.2) және (129.3) өрнектерді п. ә. коэффициентке арналған (129.1) өрнекке қоямыз:

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Ақырында, (129.6)-ны ескере отырып, мынаны аламыз:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (129.7)$$

Сонымен, идеал газға арналған Карно циклінің п. э. коэффициенті шынында да тек қыздырғыш пен суытқыш температураларына байланысты екен.

Бұрын ескертілгендей, (129.7) өрнек қалаған қайтымды машинаның п. э. коэффициентінің мәнін береді.

### § 130. Температуралардың термодинамикалық шкаласы

Жоғарыдағы дәлелденген (§ 128) қайтымды машиналардың п. э. коэффициенті жұмыстық заттың қасиеттеріне тәуелді еместігі жөніндегі теорема термометрлік денеге тәуелсіз температуралық шкаланы тағайындауға мүмкіншілік береді. Аталған теоремаға сәйкес,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1}$$

шамада демек, Карно цикліне арналған  $Q_2/Q_1$  қатынаста, қыздырғыш пен суытқыш температураларына байланысты болады. Бұл температуралардың шамасын әзірше өзімізге белгісіз шкала бойынша  $\vartheta_1$  және  $\vartheta_2$  арқылы белгілей отырып, мынаны жазуымызға болады:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (130.1)$$

мұндағы  $f(\vartheta_1, \vartheta_2)$  қыздырғыш пен суытқыштың температураларына қатысты универсаль функция (яғни барлық Карно циклдері үшін бірдей функция).

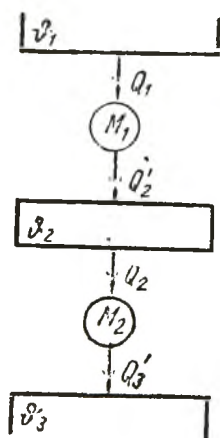
(130.1) қатыс денелердің температурасын Карно циклдері кезіндегі алынатын және берілетін жылу мөлшерлері арқылы анықтауға мүмкіншілік береді.

(130.1) функцияның қасиеті мынадай екенін дәлелдейік:

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}, \quad (130.2)$$

мұндағы  $\theta(\vartheta)$  тағы да температураның универсаль функциясы боп табылады.

Біреуінің суытқышы әрі екіншісі үшін қыздырғыш ролін атқаратын екі қайтымды машинаны (294-сурет) қарастырайық. Екінші машина температурасы  $\vartheta_2$  резер-



294-сурет.

вуардан, оған бірінші машина қанша жылу мөлшерін берсе, сонша жылу мөлшерін алады деп, яғни  $Q_2 = Q_2'$  деп ұйғарайық. Сонда (130.1) қатысқа сәйкес, машиналардың әрқайсысы үшін мынаны жазуға болады:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (130.3)$$

$$\frac{Q_3'}{Q_2} = f(\vartheta_2, \vartheta_3). \quad (130.4)$$

Машиналардың екеуін бірдей және температурасы  $\vartheta_2$  резервуарды біртұтас қайтымды машина деп қарастыра отырып<sup>1</sup> және ол машина температурасы  $\vartheta_1$  қыздырғыштан  $Q_1$  жылу алып, температурасы  $\vartheta_2$  суытқышқа  $Q_3'$  жылу береді деп есептеп, мынаны жаза аламыз:

$$\frac{Q_3'}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_3). \quad (130.5)$$

Бұл (130.5)-ті жоғарғы (130.3)-ке бөлсек, мынау шығады:

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)}.$$

Ақырында, бұл шыққан өрнекті (130.4)-пен салыстыра отырып және  $Q_2' = Q_2$  екенін ескеріп, мына қатысты шығарып аламыз:

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)} \quad (130.6)$$

Бұл қатыс екі дененің  $\vartheta_2$  және  $\vartheta_3$  температураларын байланыстырады, сонымен қатар оған үшінші дененің температурасы  $\vartheta_1$  қатысып отыр. Осы денені түпкілікті қалап ала отырып, яғни  $\vartheta_1$ -ді тұрақты ете отырып, біз (130.6) формуланың алымы мен бөлімінде тұрған  $f(\vartheta_1, \vartheta)$  функцияны бір айнымалының функциясына келтіреміз. Бұл функцияны  $\theta(\vartheta)$  арқылы белгілей отырып, (130.6) формуланы мына түрде жаза аламыз:

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{\theta(\vartheta_3)}{\theta(\vartheta_2)}$$

---

<sup>1</sup> Бұл  $Q_2 = Q_2'$  болғанда дұрыс.



немесе индекстерді алмастыра отырып, (130.2) өрнекпен дәл келетін, мынаны аламыз:

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}. \quad (130.7)$$

Функция  $\theta(\vartheta)$  тек температураға байланысты. Сондықтан оның мәндерін тиісті дененің температурасын сипаттауға пайдалануымызға болады, яғни дененің температурасы  $\vartheta$ -ға тең деп алуымызға болады, мұндағы  $\theta = \theta(\vartheta)$ . Сонда (130.1) өрнек мына түрге келеді:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}. \quad (130.8)$$

Бұл (130.8) қатыс температуралардың термодинамикалық шкаласы деп аталатынын негізі ретінде алынған. Бұл шкаланың артықшылығы сол, ол температураны өлшеуге қолданылатын дененің таңдап алынуына (Карно циклінің жұмыстық затына) тәуелді емес.

Соңғы (130.8) өрнекке сәйкес екі дененің температураларын салыстыру үшін ол денелерді қыздырғыш пен суытқыш ретінде пайдалана отырып, Карно циклін жүзеге асыру керек. Сонда денеге — «суытқышқа» — берілген жылу мөлшерінің, денеден «қыздырғыштан» алынған жылу мөлшеріне қатынасы, қарастырып отырған денелер температураларының қатынасын беретін болады.

$\theta$ -нің сан мәнін бір мәнді анықтау үшін температура бірлігі жөнінде, яғни градус жөнінде келісуіміз керек. Абсолют градус ретінде атмосфералық қысым жағдайында қайнаған судың температурасы мен еріп жатқан мұздың температурасының айырымының жүзден бір үлесі алынады. Сөйтіп, абсолют термодинамикалық шкаланың градусы идеал газ шкаласының градусына тең.

Температуралардың термодинамикалық шкаласы идеал газ шкаласымен бірдей екенін аңғару қиын емес. Шынында да, (129.7)-ге сәйкес:

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

бұдан мынау шығады:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (130.9)$$

(130.8) және (130.9) қатыстарды салыстыра отырып, мынаны аламыз:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Демек,  $\theta$  мен  $T$  өз ара пропорционал екен де, екі шкалада градус бірдей болғандықтан:  $\theta = T$

### § 131. Жылудың келтірілген мөлшері. Клаузиус теңсіздігі

Кез келген жылу машинасы бір циклді әлденеше рет қайталайтын бір денелер системасы болып табылады. 128-параграфта барлық қайтымды машиналардың п. ә. коэффициенті бірдей болатыны, ал қайтымсыз машинаның п. ә. коэффициенті қайтымдікінен әрқашан аз болатыны көрсетілді. Бұл айтылғанды аналитикалық түрде былай жазуымызға болады:

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (131.1)$$

Сол жақта кез келген машинаға жарайтын п. ә. коэффициентінің анықтамасы тұр, ал оң жақта 129-параграфта табылған қайтымды машинаның п. ә. коэффициентінің өрнегі тұр. Теңдік белгісі қайтымды машинаға, ал теңсіздік белгісі қайтымсыз машинаға сәйкес келеді.

(131.1) қатыс, сөз жоқ, бұл цикл неше дүркін қайталайтынына қарамастан, яғни алынған системаның жылу машина ретінде қолданылатынына немесе қолданылмайтынына қарамастан, әрі қайтымды цикл жасайтын (теңдік белгісі) немесе қайтымсыз цикл жасайтын кез келген денелер системасына жарайды. Бұдан былайғы жерде (131.1) сияқты қатыстарды қарастырғанда біз бір денелер системасы орындайтын циклмен істес боламыз.

(131.1) қатыстан мынау шығады:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}$$

Оң шамаға  $\frac{Q_1}{T_2}$  қатынасты көбейте отырып, мынаны аламыз:

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

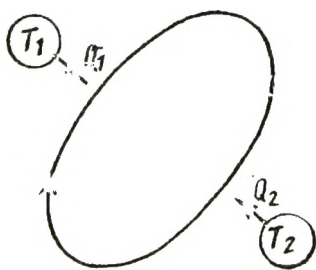
Ақырында, бұл қатыстың сол жағы мен оң жағынан  $\frac{Q_2}{T_2}$  қатынасын ала отырып, мына өрнекке келеміз:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (131.2)$$

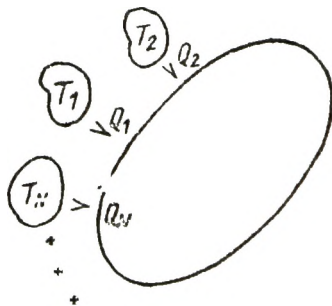
Соңғы (131.2) өрнекке системаның алатын жылуы ( $Q_1$ ) және оның беретін жылуы ( $Q_2$ ) қатысады. Бұдан былайғы өзіміз қарастырғалы отырған жалпылаулар мақсатында, (131.2) өрнекті оған тек системаның басқа денелерден алатын жылу мөлшерлері  $Q_i$  кіретіндей етіп түрлендіргеніміз қолайлы; сонда бұл жылуларды біз алгебралық шамалар деп қарастыратын боламыз: егер алынатын  $Q$  оң болса, жылу кез келген сыртқы денеден системаға беріледі, егер де  $Q$  теріс болса, жылу системадан сыртқы денеге беріледі. Сонымен, температурасы  $T_2$  денеге берілетін  $Q_2^1$  жылудың орнына, сол денеден алынатын және  $Q_2$ -ге тең  $-Q_2$  жылуды кірістіреміз. Сонда (131.2) өрнегі ең соңында мына түрге айналады:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (131.3)$$

Бұл қатыс Клаузиус теңсіздігі деп аталады. Системаның әйтеуір бір денеден алатын жылу мөлшерінің сол дененің температурасына қатынасын Клаузиус келтірілген жылу мөлшері деп атаған



295-сурет.



296-сурет.

Клаузиус терминін пайдалана отырып, (131.3)-ті былай оқуға болады: егер бір система цикл жасап, соның барысында температуралары тұрақты болатын екі жылу ре-

зервуарларымен жылу алмасатын болса (295-сурет), онда келтірілген жылу мөлшерлерінің қосындысы, цикл қайтымды болған жағдайда, нольге тең болады да, цикл қайтымсыз болған жағдайда, нольден кіші болады.)

Егер система циклдің барысында екі дене емес,  $N$  денемен (296-сурет) жылу алмасатын болса және сонда температурасы  $T_i$  денеден  $Q_i$  жылу мөлшерін (ол жылу оң да, теріс те болуы мүмкін) алатын болса, онда (131.3)-ке сәйкес мына шарт орындалуға тиіс деп ұйғарғанымыз орынды:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (131.4)$$

Қайталамау үшін, бұдан былайғы жерде қай жағдайда болсын әйтеуір бір өрнекте « $\leq$ » не « $\geq$ » таңбалары пайдаланса, теңлік таңбасы қайтымды процестерге қатысты деп, ал теңсіздік таңбасы қайтымсыз процестерге қатысты деп есептеуді келісіп қоянық. Бұл айтылғанды (131.4) өрнекке де қолданатын боламыз.

Осы кезге дейін қарастырып отырған системамен жылу алмасушы денелердің бәрінің жылу сыйымдылығының зор екендігі сонша, жылу алмасу процесі ол денелердің  $T_i$  температурасына әсер етпейді деп келдік. Егер бұл шарт орындалмаса, онда системаға  $Q_i$  жылу берген кезде сәйкес дененің температурасы  $T_i$  үздіксіз өзгертін болады. Осындай жағдайға арнап (131.4)-ке ұқсас өрнек жазу үшін, әрбір  $Q_i$  жылу алмасу процесін бірсыпыра элементар процестердің қатарына бөлуіміз керек. Бәлкі үшін олардың әрқайсысының барысында элементар жылу мөлшерінің  $\Delta'Q_i$  берілуі тұрақты температура  $\Delta(Q_i)$ -лердің әрқайсысы үшін) жағдайында өтеді деп есептеуіміз керек. Сонда (131.4)-тің орнына біз мынаны жазуымыз керек:

$$\sum_{\Sigma} \frac{\Delta'Q_i}{T_i} \leq 0, \quad (131.5)$$

мұндағы индекс  $i$  енді система жылу алмасатын дененің номерін емес, система атқаратын цикл бөлінген элементар процестердің біреуінің номері,  $\Delta'Q_i$  системаның  $i$ -ші элементар процесінің барысында тысқары денелердің бірінен алатын жылуы;  $T_i$ — сол сыртқы дененің системаға  $\Delta'Q_i$  жылу берген кездегі температурасын  $\Sigma$

таңбасы астындағы  $\oint$  белгісі қосындыны цикл бойынша алу керек екенін көрсетеді.

(131.5) өрнегі циклдің барысында системаның сырттан алатын келтірілген элементар жылу мөлшерлерінің қосындысы циклдің қайтымды жағдайында нольге тең болатынын, ал қайтымсыз жағдайда нольден кіші болатынын көрсетеді.

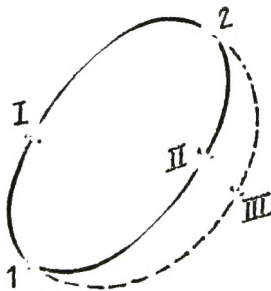
Дұрысын айтқанда, (131.5) былай жазылуға тиіс:

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leq 0, \quad (131.6)$$

мұндағы интеграл тұтас цикл бойынша алынып отыр<sup>1</sup>

### § 132. Энтропия

Келтірілген жылу мөлшерлерінің қосындысын тек цикл үшін ғана емес, сонымен қатар қалаған дөңгелек емес процесс үшін де құрастыруымызға болады. Онда бір күйден екінші күйге қайтымды ауысулар үшін бұл қосындының тамаша қасиеті бар екенін қазір анықтайтын боламыз.



297-сурет.

Бір қайтымды цикл алайық та, соның бойында 1 және 2 екі қалаған күйді бөліп алайық (297-сурет). Бұл күйлер циклді суретте I және II цифрларымен белгіленген екі тармаққа бөледі.

Өткен параграфта көрсеткеніміздей, келтірілген жылу мөлшерлерінің бүтін цикл бойынша (цикл қайтымды!) алынған қосындысы нольге тең:

$$\sum_{\text{O}} \frac{\Delta'Q}{T} = 0. \quad (132.1)$$

Бұл (131.1) қосындыға кіретін қосылғыштардың бәрін, олардың бір тобы I тармаққа жататындай етіп, ал екінші тобы II тармаққа жататындай етіп, екі топқа бө-

<sup>1</sup> Бізді (131.3)-тен (131.6)-ға келтірген пайымдауды ешқандай мәселенің дәл дәлелденуі деп қарастыруға болмайды. Алайда, (131.3) өрнектен (131.6) өрнекті жеткілікті дәлдікпен шығарып алуымызға болады.

луге болады. Сонда (132.1) өрнекті былай жазуымызға болады:

$$\sum_{1 \rightarrow 2}^{(I)} \frac{\Delta'Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1}^{(II)} \frac{\Delta'Q}{T} = 0. \quad (132.2)$$

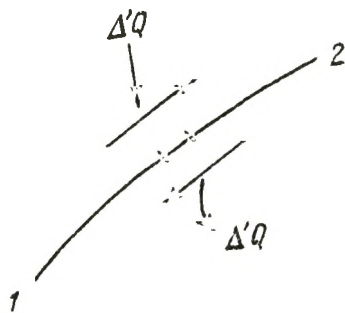
Бірінші қосынды I тармақ бойымен 1 күйден 2 күйге ауысуға сәйкес келеді, екінші қосынды II тармақ бойымен 2 күйден 1 күйге ауысқанға сәйкес келеді.

Әйтеуір бір қайтымды ауысудың 1 күйінен 2 күйіне сәйкес келетін мына қосындыны қарастырайық (298-сурет):

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}. \quad (132.3)$$

(қайтымды)

Егер ауысудың бағытын өзгертсек, онда процесс қайтымды болғандықтан, (132.3) қосынды таңбасын өзгертуге тиіс. Шынында да, егер, мысалы, 298-суретте көрсетілген элементар учаскеге процестің бағыты  $1 \rightarrow 2$  болғанда система температурасы  $T$  денеден  $\Delta'Q$  жылу мөлшерін алса, онда процестің бағыты  $2 \rightarrow 1$  болғанда, сол учаскеге система температурасы  $T$  сол денеге сондай  $\Delta'Q$  жылу мөлшерін беруге тиіс, яғни система —  $\Delta'Q$  жылу алуға тиіс. Сөйтіп, ауысу бағытын өзгерткен кезде (132.3)-ке кіретін қосылғыштардың бәрі таңбаларын кері өзгертеді, осыдан



298-сурет.

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T} = - \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta'Q}{T}. \quad (132.4)$$

(қайтымды)      (қайтымды)

(132.4) қасиетіне сүйене отырып, (132.2)-ні былай көшіріп жазамыз:

$$\sum_{1 \rightarrow 2}^{(I)} \frac{\Delta'Q}{T} - \sum_{1 \rightarrow 2}^{(II)} \frac{\Delta'Q}{T} = 0,$$

осыдан мынау шығады:

$$\sum_{1 \rightarrow 2}^{(I)} \frac{\Delta' Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2}^{(II)} \frac{\Delta' Q}{T} \quad (132.5)$$

Бастапқы қайтымды циклді қалауымызша алғандығымыздан (132.5) қатыс *I* және *2* күйлерді қамтитын кез келген қайтымды цикл жағдайында орындалуға тиіс. Атап айтқанда, *I* және *II* тармақтан тұратын циклдің орнына, *I* тармақтан және 297-суретте пунктирмен көрсетілген *III* тармақтан тұратын циклді қарастыруымызға болады да, жоғарыдағыдай талдау жүргізе отырып, *III* тармақ үшін (132.3) қосындысының *I* тармақ жағдайындағыдай мәнінің болатынына көзіміз жетеді.

Сөйтіп, біз мынадай өте маңызды қорытындыға келдік: системаның бір (бастапқы) күйден екінші (соңғы) күйге қайтымды ауысқанында алатын келтірілген жылу мөлшерлерінің қосындысы ауысу жүзеге асатын жолға байланысты емес, демек бастапқы күй мен соңғы күйге ғана байланысты болады екен.

Осындай қасиет, өзімізге белгілі, ішкі энергия өсімшелерінің қосындысында да бар болатын. Энергияның күй функциясы екендігі салдарынан, системаның *I* күйден *2* күйге кез келген ауысуындағы ішкі энергия өзгерістерінің қосындысы энергияның сол күйлерге сәйкес мәндерінің айырымына тең болуға тиіс:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta U = U_2 - U_1. \quad (132.6)$$

Жоғарыда айтылған, сөз жоқ, кез келген күй функциясына, яғни система күйімен бір мәнді анықталатын шамалардың бәріне жарауға тиіс.

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta f (\text{күй}) = f(2) - f(1) \quad (132.7)$$

Егер шама система күйінің функциясына жатпайтын болса, онда оның элементар мөлшерінің қосындысы, системаның бір күйден екінші күйге көшу жолына байланысты боп шығады. Осындай шамалардың қатарына, мысалы, жұмыс жатады. Бізге жұмыстың сан жағынан процесті кескіндейтін (215-суретті қараңыз)

$$A = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta' A$$

қисықпен шектелген ауданға тең екені белгілі және ауысу жүзеге асатын жолға байланысты екені түсінікті.

Осындай жағдай тағы да системаның алатын жылу мөлшері үшін де орындалады. Термодинамиканың бірінші бастамасы бойынша

$$\downarrow Q = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta'Q = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta U + \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta'A \quad (132.8)$$

(132.8) теңдіктің оң жағында тұрған қосындылардың біріншісі ауысу жолына байланысты емес те, ал екіншісі байланысты. Демек,  $\sum \Delta'Q$  ауысу жүзеге асатын жолға тәуелді болады. 1 күйден 2 күйге қайтымды ауысу жүзеге асқанда

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}$$

(қайтымды)

жолға тәуелсіз болуы мынаны қорытуға мүмкіншілік береді: қайтымды процесте  $\Delta'Q/T^i$  кейбір күй функциясының өсімшесін білдіреді. Осы функция энтропия деп аталған. Оны әдетте  $S$  арқылы белгілейді. Сөйтіп,

$$\left( \frac{\Delta'Q}{T} \right)_{\text{(қайтымды)}} = \Delta S. \quad (132.9)$$

Бұл (132.9) бойынша, энтропияның өсімшесі системаның сырттан қайтымды алған жылу мөлшерінің, сол жылуды алған кездегі температура қатынасына тең болады<sup>1</sup>

Энтропия — күй функциясы болғандықтан, энергия өзгерістерінің қосындысы энтропияның бастапқы және соңғы күйлерге әйкес келетін мәндерінің айырымына тең болуға тиіс [ (132.6) -мен салыстырыңыз ]:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S = S_2 - S_1. \quad (132.10)$$

(қайтымды)

Дәлірек алғанда, (132.10) қосынды интегралмен алмастырылуға тиіс:

$$\int_1^2 \frac{d'Q}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1. \quad (132.11)$$

(қайтымды)

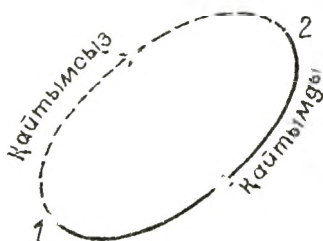
Энтропия — адитивті шама. Мұның мәнісі: система энтропиясы оның жеке бөліктерінің энтропияларының қосындысына тең.

<sup>1</sup> Қайтымды процесте жылу алмасатын денелердің температуралары бірдей болатынын ұмытпау керек.



### § 133. Энтропияның қасиеттері

Қайтымды процесс кезінде келтірілген жылу мөлшерінің қосындысы (132.10) энтропияның өзгерісіне тең. Келтірілген жылу мөлшерінің қосындысы мен қайтымсыз процесс жағдайындағы энтропия өсімшесінің қандай қатыста болатынын анықтайық. Ол үшін қайтымды және қайтымсыз тармақтардан тұратын циклді қарастырайық (299-сурет). Цикл тұтасымен алғанда қайтымсыз болғандықтан, тұтас цикл бойынша алынған келтірілген жылу мөлшерлерінің қосындысы нольден кіші болуға тиіс:



299-сурет.

$$\oint \frac{\Delta'Q}{T} < 0.$$

Бұл қосындыны түрліше тармақтарға қатысты екі бөлікке жіктейік:

$$\underbrace{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}}_{\text{(қайтымсыз)}} + \underbrace{\int_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta'Q}{T}}_{\text{(қайтымды)}} < 0. \quad (133.1)$$

Бұл қосындылардың екіншісі (132.10) бойынша энтропияның 1 және 2 күйлердегі мәндерінің айырымына тең. Сондықтан (133.1) қатысты былай жаза аламыз:

$$\underbrace{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}}_{\text{(қайтымсыз)}} + (S_1 - S_2) < 0,$$

бұдан мынау шығады:

$$S_2 - S_1 > \underbrace{\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}}_{\text{(қайтымсыз)}} \quad (133.2)$$

(132.10) және (133.2) өрнектерді біріктіре отырып, мынаны аламыз:

$$S_2 - S_1 \geq \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}, \quad (133.3)$$

мұндағы теңдік белгісі 1 күйден 2 күйге кез келген қайтымды ауысуға сәйкес келеді де, ал теңсіздік белгісі —  $1 \rightarrow 2$  кез келген қайтымсыз ауысуға сәйкес келеді. (133.3) өрнегіндегі температура  $T$  системадағы  $\Delta'Q$  жылу алатын дененің температурасын көрсетеді. Қайтымды

процесте бұл температура система температурасымен бірдей бол шығады.

(133.3) қатыс әрбір элементар процесс үшін орындалуға тиіс болғандықтан:

$$\Delta S = \frac{\Delta'Q}{T} \quad (133.4)$$

немесе

$$dS = \frac{d'Q}{T} \quad (133.5)$$

Энтропия — күй функциясы болғандықтан,

$$S_2 - S_1 = \sum_{i=1}^n \Delta S$$

өрнегі (132.6) және (132.7) өрнектер сияқты, тиісті ауысудың қайтымды не қайтымсыз екендігіне қатыссыз әрқашан күйін сақтайды. Ал

$$S_2 - S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta'Q}{T}$$

формуласы ауысу тек қайтымды болған жағдайда ғана дұрыс бол шығады.

Егер система изоляцияланған болса, яғни қоршаған ортамен жылу алмаспайтын болса, онда (133.3) өрнектегі барлық  $\Delta'Q$  нольге тең бол шығады да, соның салдарынан

$$S_2 - S_1 \geq 0 \quad (133.6)$$

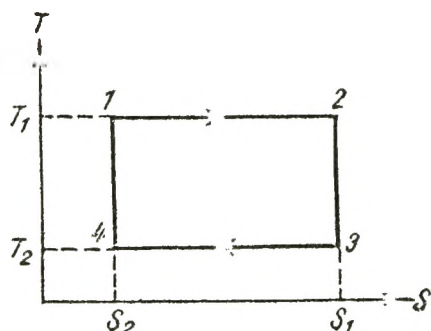
немесе оған сәйкес

$$\Delta S \geq 0. \quad (133.7)$$

Сонымен, *изоляцияланған системаның энтропиясы тек арта алады* (егер системада қайтымсыз процесс өтетін болса), *не тек тұрақты бол қала алады* (егер системада қайтымды процесс өтетін болса). Изоляцияланған системаның энтропиясы ешқашан да кемі алмайды.

Қоршаған ортамен жылу алмасусыз өтетін процесс, өзімізге белгілі, адиабаттық процесс деп аталады. Демек, қайтымды адиабаттық процесске тән нәрсе сол, ол тұрақты энтропияда өтеді, сондықтан қайтымды адиабатаны *изэнтропия* деуімізге болады. Жаңа терминді пайдалана отырып, Карно циклі екі изотермадан және екі изэнтропадан тұрады деуімізге болады. ( $T-S$ ) диаграммасында Карно циклі, сөз жоқ, тікбұрыш сияқты

боп келеді (300-сурет) Тікбұрыштың ауданы сан жағынан системаның цикл ішінде алған жылу мөлшеріне тең. Шынында да, (133.4) бойынша системаның қайтымды



300-сурет.

процесс кезінде алған элементар жылу мөлшері мынаған тең:

$$\Delta'Q = T\Delta S. \quad (133.8)$$

Демек, системаның қайтымды изотермиялық процесс кезінде алған жылу мөлшерін, былай көрсетуімізге болады:

$$Q = T(S_2 - S_1), \quad (133.9)$$

мұндағы  $S_1$  — энтропияның процестің басындағы, ал  $S_2$  — аяғындағы мәні.

(133.9)-ды қолдана отырып, системаның цикл жасайтын, изотермиялық процестерінің барысында алатын жылу мөлшерлерін мына түрде жазуға болады:

$$Q_{12} = T_1(S_1 - S_2), \quad Q_{34} = T_2(S_2 - S_1).$$

Тұтас цикл кезінде алынатын толық жылу мөлшері мынаған тең:

$$Q = Q_{12} + Q_{34} = T_1(S_1 - S_2) + T_2(S_2 - S_1) = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2).$$

Соңғы өрнектің циклдің ауданына тең екенін түсіну қиын емес.

Энтропияның азая алмайтындығын көрсететін (133.7) қатыс тек изоляцияланған системаға қатысты. Егер система қоршаған ортамен жылу алмасатын болса, оның энтропиясы қалауынша өзгеріске түсе алады. Атап айтқанда, егер система тысқарғы денелерге жылу беретін болса (системаның алатын жылуы теріс сан), онда системаның энтропиясы азаяды.

Егер изоляцияланбаған система цикл жасайтын болса, онда оның энтропиясы, күйдің функциясы бола отырып, циклдің аяғында алғашқы мәніне қайта келеді. Алайда, циклдің барысында энтропия, жалпы алғанда, оның цикл бойындағы қосынды өзгерісі нольге тең болатындықтан, бір учаскелерде ұлғая отырып, ал басқа учаскелерде кеми отырып өзгеріске ұшырайды.

Энтропияның қайтымды изотермиялық процестегі өз-

герісін табайық. Жоғарғы (133.3)-ке сәйкес, энтропияның өзгерісі мынаған тең:

$$S_2 - S_1 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta'Q}{T}$$

Тұрақты температураны қосындының сыртына шығара отырып, мынаны аламыз:

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_{1 \rightarrow 2} \Delta'Q = \frac{Q_{12}}{T}, \quad (133.10)$$

мұндағы  $Q_{12}$ — системаның 1 күйден 2 күйге қайтымды изотермиялық ауысқан кезде алған жылуы. Егер жылудың бұл мөлшері теріс сан болса, онда  $S_2 < S_1$ .

Энтропияның қайтымсыз процестегі өзгерісін табу үшін, системаны сол алғашқы күйіне қайтып әкелетін қалаған бір қайтымды процесті қарастыру керек те, сол процесс үшін келтірілген жылу мөлшерлерінің қосындысын есептеп шығару керек. Мұны мынадай мысал арқылы түсіндірейік. Температуралары әр түрлі  $T_1$  және  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) екі денеден тұратын изоляцияланған системаны аламыз. Денелер арасында, олардың температураларын теңестіретін жылу алмасу жүреді. Бұл процесс сөз жоқ, қайтымсыз және система энтропиясының ұлғаюымен байланысты болуға тиіс.

Мәселені жеңілдету үшін денелердің жылу сыйымдылығын бірдей және  $C$ -ға тең деп алайық. Сонда екі дененің ең соңғы тепе-тең температурасы мынаған тең болады:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (133.11)$$

Система энтропиясының өзгерісін есептеп шығару үшін, системаны, ондағы екі денені бірдей  $T_0$  температураға әкелетін, қайтымды процесті қарастырайық. Бұл процесс кезінде системадағы бірінші дене кез келген сыртқы денеге өзінің температурасын  $T_0$ -ге дейін төмендететіндей жылу мөлшерін қайтымды береді де, екінші дене сыртқы денеден өзінің температурасын  $T$  мәнге көтеретіндей етіп, қайтымды жылу мөлшерін алады. Қайтымды болу үшін бұл процестердің скеуі де, системаға кіретін денелердің әрқайсысының және оларға сәйкес сыртқы дененің температуралары уақыттың әрбір мезетінде бірдей болатындай боп өтулері керек.

Бірінші дененің суыну процесі оның энтропиясының өзгеруіне байланысты өтеді:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

Екінші дененің қызу процесі оның энтропиясының өзгеруіне байланысты өтеді:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_2}^{T_0} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_2}.$$

$T_1 > T_0 > T_2$  болғандықтан,  $\Delta S_1$  теріс, ал  $\Delta S_2$  оң екенін ескеруіміз керек.

Система энтропиясының өзгерісі оған кіретін жеке денелер энтропияларының өзгерістерінен тұрады:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_0}{T_1} + C \ln \frac{T_0}{T_2} = C \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2}. \quad (133.12)$$

Бұл (133.12) өрнекке  $T_0$ -дің (133.1)-дегі мәнін қоя отырып, система энтропиясының өзгерісіне арналған ақтық өрнекті мына түрде аламыз:

$$\Delta S = C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}.$$

Бұл өрнектің шынында нольден үлкен екенін көрсетейік. Ол үшін логарифм таңбасының астында тұрған өрнекті былай түрлендірейік:

$$\begin{aligned} \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} &= \frac{T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2}{4T_1 T_2} = \frac{T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2 + 4T_1 T_2}{4T_1 T_2} \\ &= 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1 \end{aligned}$$

Бұл өрнек бірден үлкен болғандықтан, оның логарифмі оң болады да, демек,  $\Delta S > 0$ .

Денелер системасының қайтымды изотермиялық процесіте атқаратын жұмысын есептеп шығарайық. (95.4) теңдеу бойынша

$$d'A = d'Q - dU$$

Формула (133.5) бойынша, қайтымды процесі кезінде  $d'Q = TdS$ . Мұны жұмыстың  $d'A$  өрнегіне қоя отырып, мынаны аламыз:

$$d'A = TdS - dU$$

Мұндағы  $dT=0$  болғандықтан (процесс изотермиялық)  $TdS$  шамасын  $d(TS)$  арқылы алмастыруымызға болады. Сонда жұмыстың өрнегі мына түрге келеді:

$$d'A = d(TS) - dU = -d(U - TS). \quad (133.13)$$

Сөйтіп, системаның сыртқы денелерде қайтымды изотермиялық процесс кезінде атқаратын жұмысы, мына шаманың кемуіне тең екен:

$$F = U - TS. \quad (133.14)$$

Мұның өзінен система күйінің функциясы екеніне көз жеткізу оңай. Бұл бос энергия деп аталатын шама. Бұл система ішкі энергиясының қайтымды изотермиялық процестер кезінде сыртқы жұмысқа айналатын үлесі боп табылады. Ішкі энергия мен бос энергияның айырмасына тең шама  $TS$ , кейде байлаулы энергия деп аталады.

(133.13) қатысты интегралдай отырып, мынаны аламыз:

$$(A_{12})_{\text{изотерм}} = F_1 - F_2. \quad (133.15)$$

Адиабаттық процестер ( $Q=0$ ) жағдайында системаның атқаратын жұмысы система ішкі энергиясының кемуіне тең болатынын еске түсірейік:

$$(A_{12})_{\text{адиабата}} = U_1 - U_2. \quad (133.16)$$

Изотермиялық процестер жағдайында ішкі энергияның ролі бос энергияға ауысады.

(133.16) қатыс қайтымды процестер жағдайында да, қайтымсыз процестер жағдайында да дұрыс боп қала береді. Ал (133.15) қатысты алсақ, ол тек қайтымды процестер жағдайында дұрыс. Қайтымсыз процестер кезінде  $d'Q < TdS$  [(133.5)-ті қараңыз]. Бұл теңсіздікті мына  $d'A = d'Q - dU$  тендеуге қоя отырып, қайтымсыз изотермиялық процестер кезінде

$$(A_{12})_{\text{изотерм}} < F_1 - F_2$$

екенін шығарып алу оңай.

Демек, бос энергияның кемуі системаның изотермиялық процесс кезінде атқара алатын жұмысының ең үлкен мәнін анықтайды екен.

## § 134. Нернст теоремасы

Жоғарыдағы (132.11) өрнегі энтропияның өз мәнін емес, оның екі түрлі күйге сәйкес мәндерінің айырымын анықтайды. Нернст энтропияның қалаған күйдегі өз мәнін анықтауға мүмкіншілік беретін теореманы дәлелдеді.

Нернст теоремасы (кейде ол термодинамиканың үшінші бастамасы деп аталады) былай дейді: абсолют температура нольге ұмтылған кезде қалаған дененің энтропиясы да нольге ұмтылады:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (134.1)$$

Нернст теоремасы бойынша қалаған дененің энтропиясы абсолют нольде нольге тең. Осының негізінде температурасы  $T$  күйдегі энтропияны былай анықтауға болады:

$$S = \int_0^T \frac{d'Q}{T}. \quad (134.2)$$

Егер, мысалы, дененің тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылығы температура функциясы ретінде белгілі болса, онда энтропияны мына формула бойынша есептеп шығаруға болады:

$$S = \int_0^T \frac{C_p(T) dT}{T}. \quad (134.3)$$

## § 135. Энтропия және ықтималдық

Больцманның тағайындауы бойынша, энтропияның қарапайым статистикалық түсініктемесі бар. Адыңғы параграфта, тұйықталған, яғни өзі еркіне жіберілген система энтропиясының кемі алмайтыны көрсетілген болатын. Екінші жағынан, өз еркіне жіберілген системаның ықтималдығы кем күйден ықтималдығы артық күйге көшетіні айқын. Ең ықтималды күйге түскеннен кейін, система сол күйде шектеусіз ұзақ уақыт қала береді. Егер бір емес, бірқатар күйдің ықтималдығы бірдей және ең үлкен болса, онда тұйықталған система мұндай күйлердің біреуінен басқаларына көше алады. Сөйтін, изоляцияланған системаның энтропиясы мен ықтимал-

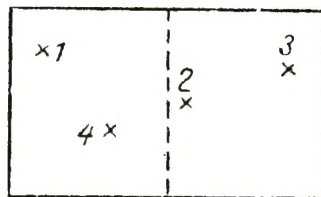
дығының қасиеті бірдей: олар не арта алады, не өзгеріссіз қала береді.

Келтірілген пайымдаудан системаның энтропиясы мен ықтималдығының арасында нақтылы байланыс болуға тиіс деген қорытынды шығады. Больцман бұл қатыстың түрі мынадай екенін көрсетті:

$$S = k \ln W \quad (135.1)$$

мұндағы  $k$  — Больцман тұрақтысы, ал  $W$  — система күйінің термодинамикалық ықтималдығы дейтін шама, оны, сол күйді жүзеге асыруға болатын түрліше тәсілдердің саны<sup>1</sup> деп түсінуге тиісіз.

Бұл  $W$  шаманың мәнісін түсіну үшін мына мысалды қарастырайық. Ыдыста төрт молекула бар делік. Ыдысты ойна екі тең бөлікке — сол және оң бөлікке бөлейік (301-сурет). Молекулалар қозғалатындықтан, олардың ыдыстың екі бөлігіне тарап орналасуы өзгеріп отырады. Бір-бірінен ыдыстың оң және сол жақ бөліктерінде молекулалардың таралуына қарай айырмасы бар күйлерді қарастырайық. Молекулаларды нөмірлен әр күйді жүзеге асыруға болатын тәсілдердің санын есептейік. Есептеудің нәтижесі 12-таблицада келтірілген. Молекулалардың ыдыс жартыларының арасында 16 мүмкіншілігінен алтамы оң жақтағы және сол жақтағы молекулалардың бірдей санына сәйкес келеді, сегізін — ыдыс жартысының біреуінде бір молекула, екіншісінде үш молекула болатын күйлерге сәйкес келеді, ал молекулалардың бәрі ыдыстың бір жақ жартысында жиналатын күйді тек екі-ақ тәсілмен жүзеге асыруға болады.



301-сурет.

Әрбір молекула тең ықтималдықпен ыдыстың сол жақ жартысында да, оң жақ жартысында да пайда бола алады. Сондықтан молекулалардың 16 түрлі таралуының

<sup>1</sup> Термодинамикалық ықтималдық дейтін, әдетте, жақ ықтималдық деп аталатын математикалық ықтималдықтан басқа. Бірнеше оқиғаның математикалық ықтималдығы сол оқиғата тиімді жағдайлардың санының тең мүмкін жағдайлар санына қатынасына тең. Демек, ол бөлікке санымен көрсетіледі де, бірден артады. Термодинамикалық ықтималдық, керісінше, бүтін және қайтсе де ір санымен көрсетіледі.



Күйлер		Күйлері жүзеге асыру тәсілдері		Берілген күйді жүзеге асыру тәсілдерінің саны
сол жақтағы молекулалар саны	Оң жақтағы молекулалар саны	Сол жақтағы молекулалар №№	Оң жақтағы молекулалар №№	
0	4	—	1,2,3,4	1
1	3	1 2 3 4	2,3,4 1,3,4 1,2,4 1,2,3	4
2	2	1,2 1,3 1,4 2,3 2,4 3,4	3,4 2,4 2,3 1,4 1,3 1,2	6
3	1	1,2,3 1,2,4 1,3,4 2,3,4	4 3 2 1	4
4	0	1,2,3,4	—	1
		Барлық	тәсілдер	$2^4=16$

әрқайсысы бірдей жиілікпен жүзеге асады. Демек, берілген күйді жүзеге асырудың саны, сол күйдің ықтималдығын анықтайды.

Бұдан, біз төрт молекула жағдайында молекулалардың барлығы ыдыс жартысының біреуінде жиналуының ықтималдығы ( $1/8$ -ге тең) үлкен болатынын көріп отырмыз. Алайда молекулалар санының артуына байланысты жағдай таза өзгереді. 13 таблицада он молекула жағдайында түрліше күйлерді жүзеге асырудың тәсілдер саны келтірілген. Бұл жағдайда молекулалардың барлығы ыдыс жартысының біреуінде жиналуының ықтималдығы небары  $1/512$  ғана болады. Жағдайлар санының басым

көпшілігінде (1024 жағдайдың 672-де) ыдыстың екі бөлігінде де молекулалардың саны бірдей (5—5) немесе саны бірдей болуға жақын (6—4 немесе 4—6).

$N$  молекуланың ыдыстың екі бөлігінің арасында бөліну тәсілдерінің толық саны  $2^N$ -ге тең екенін көрсетуге болады (мұның дұрыстығына  $N=4$  және  $N=10$  жағдайда көзіміз жетті) Сондықтан, егер молекулалар саны  $N$ , мысалы,  $10^{20}$ -ға тең болса, онда молекулалардың барлығы ыдыстың бір жартысында жиналу ықтималдығы шексіз аз болады (ол дәрежесі  $10^{20}$  екіге бөлінген екіге тең болады)

13 - та б л и ц а

Молекулалар саны		W
сол жақтағы	оң жақтағы	
0	10	1
1	9	10
2	8	45
3	7	120
4	6	210
5	5	252
6	4	210
7	3	120
8	2	45
9	1	10
10	0	1
Барлығы		$2^{10} = 1024$

Алғашқыда газ ыдыстың оң жақ бос жартысынан қақпақпен бөлінген сол жақ жартысында тұрған болсын. Егер қақпақты суырып алсақ, газ өзінен-өзі бүкіл ыдысқа таралатын болады. Бұл процесс қайтымсыз болады, өйткені жылулық қозғалыстың нәтижесінде молекулалардың барлығының ыдыс жартыларының біреуінде жиналу ықтималдығы; іс жүзінде, жоғарыда байқағанымыздай, нольге тең. Демек, газ сыртқы әсерсіз, өзінен-өзі тағы да ыдыстың сол жақ бөлігінде жинала алмайды.

Сонымен, газдың бүкіл ыдысқа таралу процесінің қайтымсыздығы, оған кері процестің ықтималдығының аз болуынан екен. Бұл қорытындыны басқа процестерге де қолдануымызға болады. Әрбір қайтымсыз процесс дегеніміз, оған кері процестің ықтималдығы кем дегенде аз болатын процесс болып табылады.

### § 136. Идеал газдың энтропиясы

Идеал газ энтропиясына арналған өрнекті табайық. Энтропия аддитивті болғандықтан, оның мәнін газдың

$S_{\text{км}}$  киломоли үшін табу жеткілікті. Газдың кез келген  $m$  массасы үшін энтропия мынаған тең:  $S = \frac{m}{\mu} S_{\text{км}}$ .

Термодинамиканың бірінші бастамасына арналған (96.4) теңдеуге идеал газға қатысты  $dU$  мәнін қойсақ, мынадай өрнек шығады:

$$d'Q_{\text{км}} = C_V dT + p dV_{\text{км}}.$$

Мұндағы  $d'Q$ -ды  $T$ -ға бөлсек,  $dS_{\text{км}}$  шығады [(133.5)-ті қараңыз, процесс қайтымды деп саналып отыр]:

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV_{\text{км}}. \quad (136.1)$$

Идеал газ күйінің теңдеуіне сәйкес  $p/T = R/V_{\text{км}}$ . Демек, (136.1)-ді былай жазуға болады:

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV_{\text{км}}}{V_{\text{км}}}.$$

$dS_{\text{км}}$  -ден анықталмаған интеграл ала отырып, мынаны табамыз:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln V_{\text{км}} + S_{\text{окм}}, \quad (136.2)$$

мұндағы  $S_{\text{окм}}$  — интегралдау тұрақтысы. (136.2) формуласы идеал газ киломоли энтропиясының өрнегін  $T$  және  $V$  айнымалылар арқылы береді. Газ күйінің теңдеуіне сүйене отырып,  $S_{\text{км}}$  өрнегін басқа айнымалылар арқылы да табуға болады. (136.2)-ге  $V_{\text{км}} = RT/p$  қоя отырып, мынаны аламыз:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_{\text{окм}}.$$

Мұндағы  $R \ln R + S_{\text{окм}}$ -ді  $S_{\text{окм}}$  арқылы белгілей отырып және идеал газ жағдайында  $C_V + R = C_p$  ескеріп, мынаны жазуға болады:

$$S_{\text{км}} = C_p \ln T - R \ln p + S'_{\text{окм}}. \quad (136.3)$$

Ақырында, (136.2) теңдеудегі  $T$ -ні  $pV_{\text{км}}/R$  арқылы алмастыра отырып, мынаны алуға болады:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln p + C_p \ln V_{\text{км}} + S_{\text{окм}}, \quad (136.4)$$

мұндағы

$$S''_{\text{окм}} = S_0 - C_V \ln R.$$

Әр түрлі екі газды араластырғандағы энтропияның өзгерісін есептеп шығарайық. Әрқайсысының мөлшері бір киломоль түрліше екі газ өз ара тең және қақпақпен

бөлінген  $V$  көлемдерде (302-сурет) бірдей  $p$  қысымдар мен бірдей  $T$  температураларда тұрған болсын. Егер қақпақты алып тастасақ, газдар өз ара диффузияға ұшырайды, содан олардың әрқайсысы  $2V$  көлемді алатын болады. Пайда болған қоспада екі газдың да парциал қысымдары  $2/p$ -ге тең болады.

Газдардың араласу процесі, сөз жоқ, қайтымсыз болуға және ол системаның энтропиясының артуымен байланысты болуға тиіс. (136.3) өрнекті пайдалана отырып, екі газдың энтропияларының суммасына тең, система энтропиясының бастапқы мәнін мына түрде жаза аламыз:

$\mu_1$	$\mu_2$
$p_1 = p$	$p_2 = p$
$V_1 = V$	$V_2 = V$

302-сурет.

$$S_{\text{бас}} = \left( C_{p1} \ln T - R \ln p + S'_{01} \right) + \left( C_{p2} \ln T - R \ln p + S'_{02} \right) \quad (136.5)$$

Араластырғаннан кейінгі энтропияны қоспаның екі компоненттері энтропияларының қосындысы ретінде есептеп шығаруға болады:

$$S_{\text{кон}} = \left( C_{p1} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S_{01} \right) + \left( C_{p2} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{02} \right)$$

Энтропияның өсімшесі мынаған тең:

$$\Delta S = S_{\text{соны}} - S_{\text{бас}} = 2R \ln p - 2R \ln \frac{p}{2} = 2R \ln 2. \quad (136.6)$$

Сөйтіп, газдарды араластырған кезде энтропия шындығында да артады.

Энтропия өзгерісінің түрліше газдардың кез келген пары үшін бірдей болатындық жағдайы (ол  $2R \ln 2$ -ге тең), шыққан (136.6) нәтижені теңбе-тең компоненттер жағдайына да, яғни қақпақтың екі жағында да алдын ала берілген сол бір газ тұратын жағдайына да қолдануға болатын сияқты. Түрліше компоненттерден теңбе-тең компоненттерге көшу Гиббс парадоксының пайда болуына әкеп соғады: қақпақтың алынып тасталуы диффузияны да қандайда бір қайтымсыз процестерді де туғызбайды, бірақ соған қарамастан энтропияның (136.6) ға тең ұлғаюына әкеп соғады. Алайда (136.6)-ны теңбе-тең компоненттер жағдайына қолдануымыз заңды емес. (136.6) формула түрліше компоненттер үшін шыға-

рып алынған болатын, ал әрбір компоненттерде парциал қысым бар деуге болады. Ал теңбе-тең компоненттер жағдайын алсақ, қақпақты шығарып тастағаннан кейін газдардың қоспасы емес, алғашқыдағы газдың өзі шығады, сонымен қатар қысымы бұрынғыдай, бірақ мөлшері екі моль болады. Оның энтропиясы  $S_{\text{соңғы}}$  формула (136.3) бойынша мынаған тең [газ мөлшері екі моль болғандықтан өрнекті (136.3) екі еселеу керек]:

$$S_{\text{соңғы}} = 2[C_p \ln T - R \ln p + S_{\text{окм}}],$$

мұның  $S_{\text{бас}}$ -ға арналған (136.5) өрнекке тең екенін түсіну қиын емес, ол үшін соңғысы  $C_{p1} = C_{p2} = C_p$  және  $S'_{01} = S'_{02} = S'_{\text{окм}}$  деп ұйғарамыз.

## XV ТАРАУ КРИСТАЛДЫҚ КҮЙ

### § 137. Кристалдық күйдің ерекше белгілері

Табиғаттағы қатты денелердің басым көпшілігі кристалдық құрылысты боп келеді. Атап айтқанда, мысалы, минералдардың барлығы дерлік және металдардың бәрі қатты күйде кристалдарға жатады.

Кристалдық күйдің, оны сұйық және газ тәрізді күйлерден айыратын сипаттық белгісі ондағы *анизотропияның*, яғни оның бірсыпыра физикалық қасиеттерінің (механикалық, жылулық, электрлік, оптикалық қасиеттерінің) бағытқа байланысты болып келетіндігінде.

Қасиеттері барлық бағытта бірдей боп келетін денелер, *изотропты* денелер деп аталады. Изотропты денелерге газдар, кейбіреулерін есепке алмағанда, сұйықтардың барлығы және аморф қатты денелер жатады. Соңғылар асыра суытылған сұйық боп саналады (149-параграфты қараңыз).

Кристалдардың анизотропты боп келетін себебі, кристалл құрайтын бөлшектердің (атомдардың немесе молекулалардың) реті мен орналасуына байланысты.

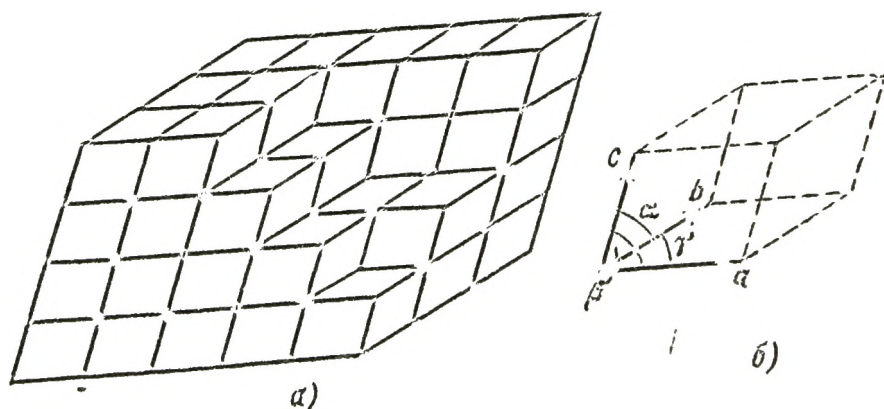
Бөлшектердің ретімен орналасуы кристалдардың сыртқы жақтарының дұрыстығы арқылы байқалады. Кристалдар жазық жақтармен шектеліп келеді де ол жақтар белгілі бір кристалдың әрбір берілген тегі үшін, белгілі бір бұрыш жасай қиылысады. Кристалдардың жапырақталып жарылуы, жымдастық жазықтықтары дейтін белгілі бір жазықтықтар бойынша оңайырақ өтеді.

Кристалдардың геометриялық формасының дұрыстығы және анизотропиясы жиі кездеспейді, себебі кристал

денелер көп жағдайда поликристалдар түрінде, яғни бір-бірімен тұтасып келген және ретсіз орналасқан көптеген ұсақ кристалликтердің конгломераты түрінде кездеседі. Поликристалдарда анизотропия тек жекелеп алынған әрбір кристаллик шегінде байқалады да, ал тұтас дененің өзінде, оның құрамындағы кристалликтердің ретсіз ориентациялануы салдарынан, анизотропия байқалмайды.

Балқыған күйден немесе ерітінді күйден кристалдануға ерекше жағдайлар туғыза отырып, кез келген заттың ірі тұтас кристалын — монокристалын шығарып алуға болады. Кейбір минералдардың монокристалдары табиғатта табиғи күйде кездеседі.

Кристалл атомдарының орналасу реттілігі атомдардың (не молекулалардың) геометриялық дұрыс кеңістік решетка түйіндерінде орналасуымен түсіндіріледі. Бүкіл кристалды кристалдың элементар ұяшығы дейтін структурасы бір элементті түрліше үш бағытта әл-



303-сурет.

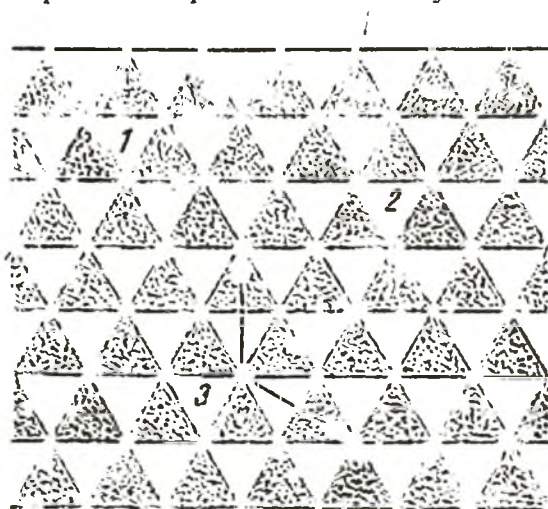
денеше рет қайталай отырып шығарып алуға болады (303, а-сурет). Кристалдық ұяшықтар қабырғаларының ұзындығы  $a$ ,  $b$  және  $c$ , кристалдың ұқсастық периодтары деп аталады.

Кристалдық ұяшық модульдары ұқсастық периодтарына тең, үш вектор  $a$ ,  $b$ ,  $c$  арқылы салынған параллелепипед болып табылады. Бұл параллелепипед  $a$ ,  $b$ ,  $c$  қабырғаларымен қатар, сол қабырғалардың арасындағы  $\alpha$ ,  $\beta$  және  $\gamma$  (303, б-сурет) бұрыштары арқылы сипатталады. Бұл шамалар  $a$ ,  $b$ ,  $c$  және  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  элементар ұяшық-

ты бір мәнді анықтайды да, оның параметрлері деп аталады.

Элементар ұяшықты түрліше тәсілдермен шығарып алуға болады. Бұл 304-суретте жазық структураны мысалға ала отырып көрсетілген. Ақ және қара үш бұрышты плиткалармен алмасып келген қабырғалардың бетін әр түрлі ұяшықтарды (мысалы, 1, 2 және 3 ұяшықтарды қараңыз, стрелкалармен ұяшықтардың қайталау бағыттары көрсетілген) екі

түрлі бағытта әлденеше рет қайталай қаптауға болады. 1 және 2 ұяшықтардың ерекшеліктері сол, оларға структуралық элементтердің минимальды саны кіреді (бір қара және бір ақ плиткадан). Кристалл заттың химиялық құрамын сипаттайтын атомдардың ең аз санынан тұратын (мысалы, мұз кристалы жағдайында бір оттегі атомынан және екі



304-сурет.

сутек атомынан тұратын) кристалдық ұяшық қарапайым ұяшық деп аталады. Алайда әдетте қарапайым ұяшықтың орнына, атомдар саны көбірек, бірақ симметриясы тұтас кристалдың симметриясымен бірдей болатын элементар ұяшықты таңдап алады. Атап айтқанда, 304-суретте көрсетілген жазық структура, өзіне перпендикуляр плиткалардың төбесі арқылы өтетін қалаған осьтің маңайында  $120^\circ$ -қа бұрағанда өзімен-өзі беттесетін болады. Элементар 3 ұяшықтың да қасиеті осындай. Ал, 1 мен 2 ұяшықтың симметриясы бұдан төмен: олар өздерімен өздері тек  $360^\circ$ -қа бұрағанда ғана беттесетін болады.

### § 138. Кристалдардың классификациясы

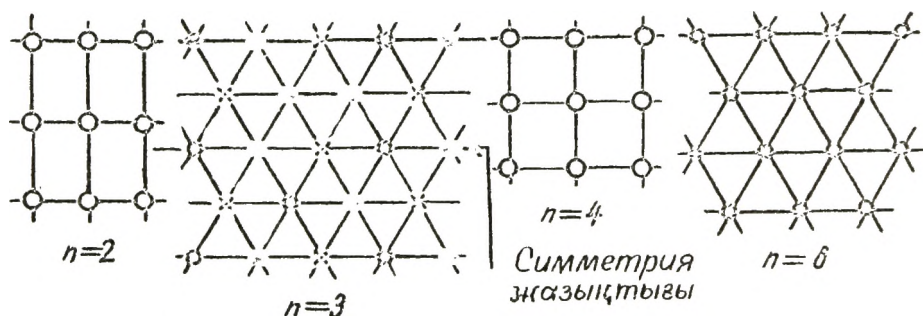
Кристалдық решетканың симметриясы әлденеше түрлі боп келуі мүмкін. Кристалдық решетканың симметриясы деп оның қайсыбір кеңістіктегі орын ауыстыруында өзімен-өзі беттесе алатын решетка қасиетін айтады.

Қандай да решетка болсын ең алдымен трансляция-



лық симметриялы болып келеді, яғни ұқсастық периодына<sup>1</sup> тең аралыққа ауыстырған (трансляцияланған) кезде өзімен-өзі беттесетін болады. Симметрияның басқа түрлерінің ішінен қайсыбір осьтің маңайында бұруға қатысты симметрияны, сондай-ақ белгілі бір жазықтыққа қатысты айнадағыдай шағылу симметриясын атап өтейік.

Егер решетка қайсыбір осьтің маңайында  $2\pi/n$  бұрышқа бұрғанда өзімен-өзі беттесетін болса (демек, осьтің маңайында толық бір бұрғанда решетка өзімен-өзі  $n$  рет беттесетін болса), онда мұндай ось  $n$ -ретті симметрия осі деп аталады. Тривиальді 1-ші дәрежелі осьтен



305-сурет.

басқа тек 2-ші, 3-ші, 4-ші және 6-шы дәрежелі осьтер бола алатынын дәлелдеуге болады. Осындай осьтері бар структуралардың мысалдары схемалық түрде 305-суретте көрсетілген (ақ сақиналар, қара сақиналар және крестермен әр сортты атомдар белгіленген)

Айнадан шағылғанда решетканың өзімен-өзі беттесетін жазықтықтары симметрия жазықтықтары деп аталады. Симметрия жазықтығының мысалы да 305-суретте келтірілген.

Түрліше симметриялар кристалдық решетканың симметрия элементтері деп аталады. Симметрия осі және симметрия жазықтығы дейтіндермен қатар басқа да симметрия элементтері кездеседі, бірақ оларды біз қарастырып жатпаймыз.

Кристалдық решеткада әрқашан бірден бірнеше симметрия түрі кездеседі. Алайда симметрия элементтері қалай болса солай топтаса бермейді екен. Орыстың аса көрнекті ғалымы Е. С. Федоров дәлелдегендей симмет-

<sup>1</sup> Решетка симметриясын қарастырған кезде кристалдың шекті мөлшерлерін ескермейді де, решетканы шексіз деп алады.

рия элементтерінің кеңістік топтар делінетін небары 230 комбинациясы кездесуі мүмкін екен. Бұл 230 кеңістік топтар симметрия белгілеріне қарай 32 класқа бөлінеді. Ақырында, элементар ұяшық формасына қарай кристалдардың бәрі жеті кристаллографиялық системаға (яғни сингонияға) бөлінеді де, олардың әрқайсысына бірнеше симметрия кластары кіреді.

Симметриясының арту ретіне қарай, кристаллографиялық системалар былай орналасады:

1. Триклиндік система. Оның ерекшелігі:  $a \neq b \neq c$ ;  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$  элементар ұяшығы қиғаш бұрышты параллелепипед формалы болады.

2. Моноклиндік система. Екі бұрышы тік, ал үшінші бұрышы (оны  $\beta$  бұрышы деп алайық) тік емес. Демек,  $a \neq b \neq c$ ;  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta \neq 90^\circ$ . Элементар ұяшығы табанында параллелограмм жатқан тік призма формалы (яғни тік параллелепипед) болады.

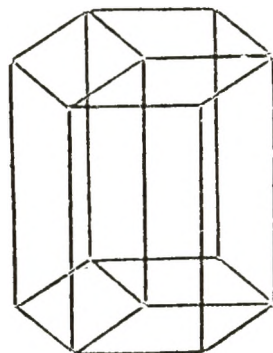
3. Ромбалық система. Бұрыштарының бәрі тік, қабырғаларының бәрі әр түрлі:  $a \neq b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементар ұяшығы тік бұрышты параллелепипед формалы болады.

4. Тетрагональдық система. Бұрыштарының бәрі тік, екі қабырғасы бірдей:  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементар ұяшығы табаны квадрат тік призма формалы болады.

5. Ромбоэдрлік (яғни тригональдық) система. Қабырғаларының бәрі бірдей, сондай-ақ бұрыштары да бірдей, бірақ тік емес:  $a = b = c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$ . Элементар ұяшығы диагоналінің бағытында созылған немесе сығылған куб формалы.

6. Гексагональдық система. Қабырғалары және олардың арасындағы бұрыштар мына шарттарды қанағаттандырады:  $a = b \neq c$ ;  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Егер 306-суретте көрсетілгендей етіп, осындай үш элементар ұяшықты біріктірсек, онда алты жақты дұрыс призма пайда болады.

7. Кубтық система. Қабырғаларының бәрі бірдей, бұрыштарының бәрі тік:  $a = b = c$ ;  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Элементар ұяшығы куб формалы болады.

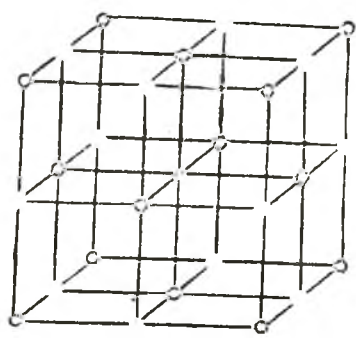


306-сурет.

## § 139. Кристалдық решеткалардың физикалық типтері

Кристалдық решетканың түйіндерінде орналасқан бөлшектердің табиғатына және олардың арасындағы өз ара әсер күштердің сипатына қарай кристалдық решеткалардың төрт типін және соларға сәйкес кристалдардың мына төрт типін айырады: иондық, атомдық, металдық және молекулалық кристалдар.

1. Иондық кристалдар. Кристалдық решетканың түйіндерінде таңбасы әр түрлі иондар орналасады. Олардың арасындағы өз ара әсер күштер негізінен электростатикалық (кулондық) болып келеді. Әр текті зарядтармен зарядталған иондардың арасындағы электростатикалық тартылыс күшке қатысты байланыс ге



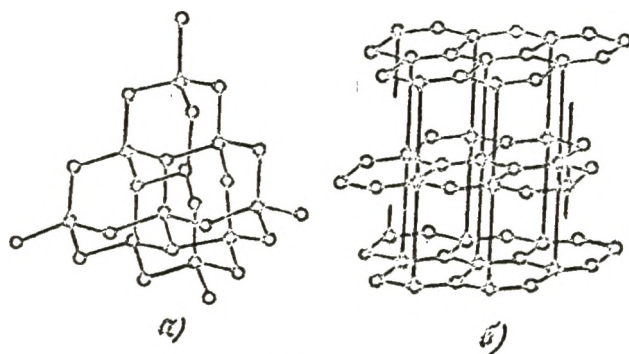
307-сурет.

терополюстік (немесе иондық) деп аталады. 307-суретте көрсетілген ас тұзының ( $\text{NaCl}$ ) решеткасы иондық решетканың нағыз мысалы болады. Бұл решетка кубтық системаға жатады. Ақ сақиналармен оң зарядталған натрий иондары, ал кара дөңгелектермен хлордың теріс иондары белгіленген. Суреттен берілген таңбалы ионның оң жақын көршісі оған қарама-қарсы таңбалы ион екені байқалады. Газ тәрізді күйде  $\text{NaCl}$  жұбымен натрий ионы мен хлор ионы біріккен молекулалардан тұрады. Молекула құрайтын  $\text{Na}$  ионы мен  $\text{Cl}$  ионының тобы кристалл ішінде өздерінің оқшауланған күйінен айырылып қалады. Иондық кристалл молекулалардан емес, иондардан тұрады. Тұтас кристалды бір зор молекула ретінде қарастыруға болады.

2. Атомдық кристалдар. Кристалдық решетка түйіндерінде нейтраль атомдар орналасады. Нейтраль атомдарды кристалда (сонымен қатар молекулада) біріктіріп тұратын байланыс гомеополюстік (немесе коваленттік) деп аталады. Гомеополюстік байланыс жағдайында өз ара әсер күштер де электрлік күш сипатты (бірақ кулон күші емес) болады. Бұл күштің табиғатын тек кванттық механика негізінде түсінуімізге болады.

Гомеополюстік байланыс электрондық жұп арқылы жүзеге асады. Мұның өзін екі атомның арасындағы байланысты қамтамасыз етуге әр атомнан бір электрон қатысады деп білу керек. Осы себептен де геометриялық байланыс бағытталған болады. Гетерополюстік байланыс кезінде әрбір ион оған жеткілікті жақын жатқан иондардың бәріне әсер етеді. Гомеополярлық байланыс кезінде әсер тек алынған атоммен электрондық пары бар атомға ғана бағытталған болады. Гомеополюстік байланыс тек валенттік электрондар арқылы, яғни атоммен байланыстары нашар электрондар арқылы жүзеге асуы мүмкін. Ал әрбір электрон бір атоммен ғана байланысты қамтамасыз ететіндіктен, берілген атомның басқа атомдармен байланыс саны (яғни оның байланыс жасай алатын көршілерінің саны) оның валенттілігіне тең.

Атомдық кристалдардың нақты мысалына алмас пен графит жатады. Бұл заттың екеуінің де табиғаттары бірдей (олар көміртек атомдарынан тұрады), бірақ кристалдық құрылыстары әр түрлі. 308-суретте алмас решеткасы, 308, б-суретте графит решеткасы көрсетілген. Бұл



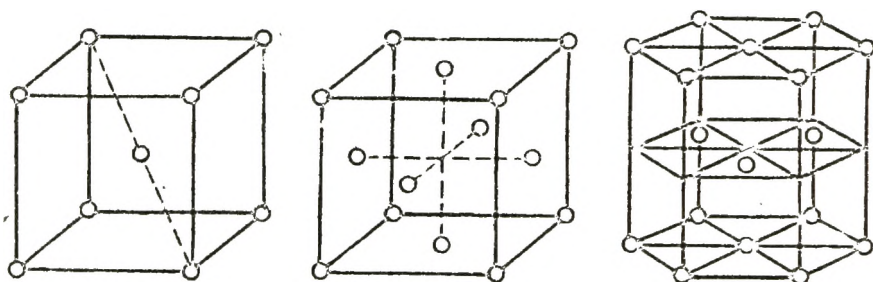
308-сурет.

мысалдан кристалдық структураның заттың қасиетіне қалай әсер ететінін байқаймыз.

Германий (Ge) мен кремний (Si) сияқты жартылай өткізгіштердің де кристалдық решеткалары алмастікі сияқты (алмас типті решетка) болады. Бұл решетканың ерекшелігіне әрбір атомның, одан бірдей қашықтықта орналасқан, дұрыс тетраэдрдің төбелеріндегі төрт көршілес атоммен қоршаулы тұратыны жатады. Төрт валенттік электронның әрқайсысы берілген атомды көршілес атомдардың біреуімен байланыстырып тұратын электрондық жұпқа кіреді.

3. Металдық кристалдар. Кристалдық решетканың барлық түйіндерінде металдың оң иондары орналасады. Олардың арасында газ молекулалары сияқты, иондар түзілген кезде атомдардан бөлініп шыққан электрондар ретсіз қозғалып жүреді. Бұл электрондар оң иондарды біріктіре отырып, «цемент» ролін атқарады, кері жағдайда иондардың арасындағы тебіліс күштерінің әсерінен решетка қирап қалар еді. Сонымен қатар электрондарды, кристалдық решетканың шегінде иондар ұстап тұрады да, одан бөлініп кете алмайды.

Металдардың көпшілігінің решеткасы мына үш түрлі типтің біріне жатады: көлемі центрленген куб решетка (309, а-сурет), жақтары центрленген куб решетка



309-сурет.

(309, в-сурет) және толық гексагональды деп аталатын решетка (309, в-сурет). Соңғы решетка  $\sqrt{8/3}$ -ке тең  $c/a$  қатысымен анықталатын гексагональдық решеткаға жатады. Жақтары центрленген куб решетка мен тығыз гексагональды решетка бірдей шарлардың анағұрлым тығыз салынуына сәйкес келеді.

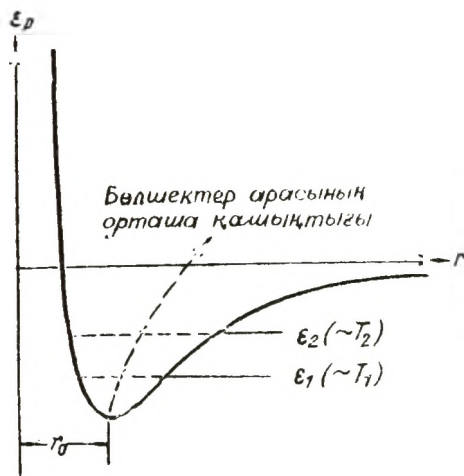
4. Молекулалық решетка. Кристалдық решетканың түйіндерінде белгілі бір түрде бағдарланған молекулалар орналасады. Кристалдағы молекулалардың арасындағы байланыс күштің табиғаты, газдардың идеалдықтан ауытқуына себеп болатын молекулалар арасындағы тартылыс күштер табиғатымен бірдей болады. Сондықтан оны ван-дер-ваальстық күштер деп атайды. Молекулалық решетка құрайтын, мысалы, мына заттар:  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ . Сөйтіп, мұз, сонымен қатар құрғақ мұз (қатты көмір қышқылы) — молекулалық кристалдарға жататын заттар.

## § 140. Кристалдардағы жылулық қозғалыстар

Кристалдық решетканың түйіндері бөлшектердің орташа қалпын анықтайды. Ал бөлшектердің өзі (иондар, атомдар немесе молекулалар) осы орташа қалыптардың маңайында үздіксіз тербеліп тұрады және ол тербелістің интенсивтігі температураға байланысты артады.

Кристалл құрайтын бөлшектердің арасындағы тартылыс күштер жеткілікті аз қашықтықтарда, қашықтықтың азаюына байланысты тез ұлғаятын тебіліс күштеріне айналады. Бұл екі әр текті ион жағдайында да дұрыс, өйткені иондардың электрондық қабықшалары тым жақындаған кезде, олардың арасындағы тебіліс күштер қатты біліне бастайды<sup>1</sup>

Сөйтіп, кристалдағы кез келген бөлшектердің арасындағы өз ара әсердің 310-суретте көрсетілген потенциалдық қисық арқылы анықталуы мүмкін (264-суретпен салыстырыңыз). Бұл қисық минимумға қатысты симметриялы емес. Осы себептен де бөлшектердің тепеңдік қалпының маңайындағы өте әлсіз тербелістер ғана гармониялық тербеліске жақын боп келеді. Тербеліс амплитудалары артқан сайын (бұл температураның жоғарылауына байланысты) тербелістің ангармониялығы (яғни тербелістердің гармониялықтан ауытқуы) ұлғая бастайды. Бұл бөлшектер арасындағы орташа қашықтықтардың, 310-суретте көрсетілгендей, артуына, демек, кристалл көлемінің ұлғаюына әкеп соғады. Кристалдардың жылулық ұлғаюы осылай түсіндіріледі.



310-сурет.

<sup>1</sup> Иондар арасындағы өз ара әсер, екі нүктелік зарядтардың арасындағы өз ара әсерге қарағанда анағұрлым күрделі сипатта болады.

## § 141. Кристалдардың жылу сыйымдылығы

Бөлшектердің кристалдық решетка түйіндерінде орналасуы олардың потенциалдық энергияларының минимумына сәйкес келеді. Бөлшектің тепе-тең күйден кез келген бағытта ауысқан кезінде бөлшекті алғашқы қалпына қайтаруға тырысатын күш пайда болады да, содан бөлшек тербеліске түседі. Кез келген бағыттағы тербелісті өз ара перпендикуляр үш координаттар осі бағытында жіктей аламыз. Сөйтіп, кристалдағы әрбір бөлшектің үш түрлі тербеліс еркіндік дәрежесі болады деп алуға тиіспіз.

Жоғарыдағы 101-параграфта тағайындағанмыздай, бір бөлшектің әрбір тербеліс еркіндік дәрежесіне, орташа алғанда  $kT$ -ның екі жартысына тең — оның бірі кинетикалық энергия түрінде, ал екіншісі потенциалдық энергия түрінде — энергия тиесілі болады. Демек, әр бөлшекке — атомдық решетка жағдайында әр атомға, ал молекулалық решетка жағдайында әрбір молекулаға<sup>1</sup> — орташа алғанда  $3kT$ -ге тең энергия тиесілі болады. Кристалдық күйдегі заттың киломолияның энергиясын бір бөлшектің орташа энергиясын кристалдық решетка түйіндеріндегі бөлшектер санына көбейту арқылы таба аламыз. Соңғы сан тек химиялық қарапайым заттар жағдайында ғана  $N_A$  Авогадро санына сәйкес келеді. Мысалы,  $\text{NaCl}$  сияқты күрделі затты алсақ, бөлшектер саны  $2N_A$ -ға тең, өйткені  $\text{NaCl}$  молияне  $N_A$  натрий атомдары және  $\text{Cl}$  хлор атомдары кіреді.

Атомдық не молекулалық кристалдар құрайтын химиялық қарапайым заттарды қарастырумен шектеле отырып, кристалдық күйдегі заттың килограмм-атомының ішкі энергиясы үшін мына өрнекті жаза аламыз:

$$U_{\text{км}} = N_A 3kT = 3RT$$

Ішкі энергияның температураның бір градусқа артуына сәйкес өзгерісі (102.6) бойынша тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылығына тең. Демек,

$$C_V = 3R \approx 25 \cdot 10^3 \text{ Дж/град} \cdot \text{кг-ат}. \quad (141.1)$$

Қатты денелердің көлемі қыздырған кезде онша елеу-

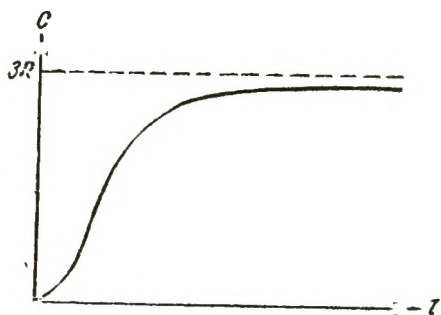
---

<sup>1</sup> Молекулалық кристалдар жағдайында істің жәйі күрделірек. Молекулаларда ілгерілімелі тербелістермен қатар айналмалы тербелістер байқалады. Оның үстіне молекуланың құрамындағы атомдар тербеліске түседі.

лі өзгере қоймайтындықтан, олардың тұрақты қысымдағы жылу сыйымдылығының тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылығынан айырмашылығы онша болмайды, сондықтан  $C_p \approx C_v$  деп алып, тек қатты дененің жылу сыйымдылығын сөз етуімізге болады.

Сонымен кристалдық күйдегі химиялық қарапайым заттардың килограмм-атомдық жылу сыйымдылығы бірдей және  $25 \cdot 10^3$  дж/град·кг-ат-ға тең болады екен. Осы айтылған тұжырым тәжірибе жүзінде тағайындалған Дюлонг және Пти заңының мазмұны боп табылады. Бұл заң бөлме температурасы жағдайында көптеген заттар үшін жуықталған түрде жақсы орындалады. Алайда, мысалы, алмастың жылу сыйымдылығы бөлме температурасында  $5,6 \times 10^3$  дж/град·кг-ат-ға тең.

Сонымен қатар, кристалдар жылу сыйымдылығы (141.1)-ге қарамастан температураға тәуелді болады.



311-сурет.

және бұл тәуелділік 311-суретте көрсетілгендей сипатта болады. Абсолют нольге жақын аймақта денелердің бәрінің жылу сыйымдылығы  $T^3$ -ке пропорционал боп келеді де, тек жеткілікті жоғарғы температураларда, әр дене үшін өз алдына бір нақтылы температурада (141.1) орындала бастайды. Денелердің көпшілігі үшін бұл тұрақтылық бөлме температурасының өзінде-ақ басталады, ал алмас жағдайында жылу сыйымдылығы (141.1)-дегі мәніне тек  $1000^\circ\text{C}$ -қа жуық температураларда жетеді.

Эйнштейн мен Дебай құрған қатты денелердің жылу сыйымдылығының дәл теориясы ең алдымен тербелмелі қозғалыс энергиясының квантталғанын есепке алады (102-параграфты қараңыз). Екіншіден, теория кристалдық решеткадағы бөлшектер тербелісінің тәуелсіз еместігін есепке алады. Тепе-теңдік қалыптан ауысқан бөлшек өзіне жақын тұрған бөлшектерді ілестіріп ала кетеді. Кристалдағы бөлшектердің арасындағы күшті өз ара әсер нәтижесінде кез келген бөлшектің тербелісінен туған импульс басқа бөлшектерге беріледі де, содан кристалда жүгірме толқын пайда болады. Кристалл ше-



каралығында толқын шағылатын болады. Тура және шағылған толқынның қосылғанында тұрғын толқынның пайда болатыны белгілі. Шектелген ортадағы тұрғын толқындар нақтылы шарттарды қанағаттандырулары тиіс (осындай шарттарға, мысалы, ортаның шекарасында толқынның шоқтығы болу қажет екендігі жөніндегі талап жатады) Осындай шарттар тұрғын толқынның толқын ұзындығы немесе тербеліс жиілігі қандай болуы керек екендігіне тиісті шек қояды. Екі шеті бекітілген шектің бойында, мысалы, толқын ұзындығы  $l = n\lambda/2$  шартын қанағаттандыратын тұрғын толқындар пайда болуы мүмкін екені белгілі, мұндағы  $l$  — шектің ұзындығы, ал  $n$  — бүтін сан. Сөйтіп, кристалдардағы жылулық қозғалыстарды тұтас бір топ дискретті жиіліктері бар (спектр арқылы) тұрғын толқындар деп қарастыруға болады екен.

Кристалдар жылу сыйымдылығының кванттық теориясы тәжірибелік мәліметтерге жақсы сәйкес келеді; атап айтқанда, теория жоғарғы температуралар жағдайында (141.1) өрнекті береді.

## XVI ТАРАУ СҮЙЫҚ КҮЙ

### § 142. Сұйықтардың құрылысы

Сұйық күй, газдар мен кристалдардың ортасындағы аралық қалыпты ала тұрып, өзіне осы күйлердің екеуінің де кейбір белгілерін үйлестіреді. Атап айтқанда, сұйықтар кристалл денелер сияқты, белгілі бір көлемнің болуымен сипатталады сонымен қатар газдар сияқты, өзі тұрған ыдыстың формасын алады. Әрі қарай, кристалдық күйде бөлшектердің (атомдардың немесе молекулалардың) ретті орналасу ерекшелігі байқалса, газдарда осы тұрғыдан ретсіздік (хаос) толық үстем болады. Рентгенографиялық зерттеулерге қарағанда сұйықтарда, бөлшектердің орналасу сипатына қатысты, аралық қалыпта болады екен. Сұйық бөлшектерінің орналасуында бергі тәртіп реттілігі дейтін байқалады. Мұның мәнісі мынадай: кез келген бөлшекке қатысты алғанда, оған ең жақын көршілес бөлшектер ретімен орналасып келеді. Алайда, алынған бөлшектен алыстаған сайын басқа бөлшектердің оған қатысты орналасуының тәртібі кеми береді де, ақыр аяғында көп ұзамай-ақ толық жойылып кетеді. Кристалдарда арғы реттілігі байқалады — бөлшектердің қалаған бөлшекке салыстырып алғандағы тәртіпті орналасуы елеулі көлем шегінде байқалады.

Сұйықтарда байқалатын бергі реттіліктің болуынан сұйықтар құрылымын квази-кристалдық (кристалға ұқсас) деп атайды.

Арғы реттілік болмағандықтан, сұйық кристалдар дейтіндерді есенке алмағанда сұйықтарда бөлшектері ретті орналасқан, кристалдардың ерекшелігіне жататын анизотропия байқалмайды.

Ұзартылған молекулалары бар сұйықтарда елеулі көлемдер шегінде молекулалардың бірдей бағдарлануы байқалады және оған байланысты олардың оптикалық және тағы басқа қасиеттерінің анизотропиясы байқалады. Осындай сұйықтар сұйық кристалдар деп аталатын болды. Оларда тек молекулалардың бағдарлануы реттелген, ал молекулалардың өз ара орналасуына келсек, онда кәдімгі сұйықтардағы сияқты, арғы реттілік байқалмайды.

Сұйық күйдің өзінің қасиеттері жөнінен соңша күрделі болып келуі де, сұйықтардың аралық қалыпта болуына байланысты. Сондықтан оның теориясы, кристалдық күйдің теориясымен, әсіресе, газ тәрізді күйдің теориясымен салыстырғанда нашар дамытылған. Күні бүгінге дейін сұйықтардың толық аяқталған және көпшілік мойындаған теориясы жоқ. Сұйық күй теориясының бірсыпыра проблемаларын талдап шешуде елеулі табыстарға жеткен совет оқымыстысы Я. И. Френкель болды.

Френкель бойынша сұйықтардағы жылулық қозғалыстардың сипаты мынадай: әрбір молекула бір шама уақыт бойында белгілі бір тепе-теңдік қалыптың маңайында тербеліс жасай тұрады. Уақыт өткен сайын молекула алғашқы молекулалардан өз мөлшерлерімен шамалас қашықтыққа, жаңа қалыпқа ыргып түсу арқылы, өзінің тепе-теңдік орын өзгертеді. Сөйтіп, молекулалар бірсыпыра уақыт белгілі бір орындардың маңайында қала отырып, сұйық ішінде баяу ғана орын ауыстырады. Я. И. Френкельдің бейнелеп айтуы бойынша, молекулалар көшпелі өмір сүре отырып, бүкіл сұйық көлемінде саяхат жасайды, қысқа мерзімді көшпелілік салыстырмалы ұзақ мерзімді отырықшылықпен ауысып отырады. Бұл отырықшылықтың ұзақтығы әр қилы болады да, бірімен-бірі ретсіз алмасып отырады, бірақ сол тепе-теңдік қалыптың маңайындағы тербелістің орташа ұзақтығы әр сұйық үшін белгілі бір шамада болады екен де, оның өзі температураның жоғарылауына байланысты кенет кеміп отырады. Осыған байланысты температураны жоғарылатқанда молекулалардың қозғалғыштығы

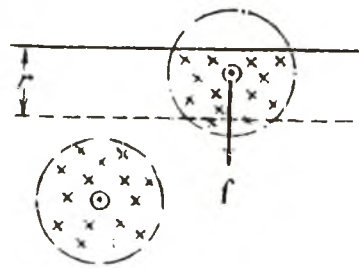
күшті артады, бұл өзінің кезегінде сұйықтың тұтқырлығын азайтуға әкеп соғады.

Көптеген қасиеттері жағынан кристалдардан гөрі сұйықтарға жақын келетін қатты денелер бар. Аморф қатты денелер деп аталатындарда анизотропия байқалмайды. Олардың бөлшектерінің орналасуында сұйық бөлшектеріндегідей тек бергі реттілік байқалады. Аморф қатты денеден сұйыққа ауысу қыздырған кезде үздіксіз жүзеге асады, ал кристалдардың сұйық күйге ауысуы секірмелі түрде жүзеге асады (бұл жөнінде толығырақ 149-параграфта айтылады). Міне, осының бәрі аморф қатты денелерді, олардағы бөлшектердің қозғалғыштығы тұтқырлықтың күшті артуынан шектеліп қалған, асыра суытылған сұйыққа жатқызуға мүмкіншілік береді.

Аморф қатты дененің нақты мысалына шыныны алуға болады. Сонымен қатар аморф денелерге смола, баллауыз және т. б. жатады.

### § 143. Беттік керілу

Сұйық молекулаларының бір-біріне жақын орналасуы сонша, олардың арасындағы күштердің мәні едәуір боп келеді. Өз ара әсер күштері қашықтыққа байланысты тез азаятындықтан (264-суреттегі қисықты қараңыз) кейбір қашықтықтан бастан, молекулалардың арасындағы тартылыс күштерін ескермеуге болады. Бұл  $r$  қашықтық өзімізге бұрыннан (118-параграфты қараңыз) белгілі, молекулалық әсер радиусы деп аталады, ал радиусы  $r$  сфера молекулалық әсер сферасы деп аталады. Молекулалық әсер радиусының шамасы жуықтап молекуланың бірнеше эффективті диаметріндей болады.



312-сурет.

Әрбір молекула центрі берілген молекулаға дәл келетін молекулалық әсер сферасының шегінде жатқан барлық көршілес молекулалар тарапынан тартылысқа ұшырайды. Бұл күштердің барлығының қорытқы күші сұйық бетінен  $r$  қашықтықтан ар-

тық қашықтықтағы молекула үшін орта есеппен алғанда, сөз жоқ, нольге тең (312-сурет) Егер молекула сұйық бетінен  $r$ -ден аз қашықтықта тұрса, онда істің жәйі бөлек. Будың (яғни сұйықпен шектесіп тұрған газдың) тығыздығы сұйық тығыздығынан бірнеше есе аз болғандықтан, сұйық шегінен сыртқа шығып тұрған молекулалық әсер сферасының бөлігі молекулалармен, сфераның қалған бөлігімен салыстырғанда, азырақ толған болады. Соның нәтижесінде, қалыңдығы  $r$  беттік қабаттағы әрбір молекулаға сұйық ішіне бағытталған күш әсер ететін болады. Бұл күштің шамасы қабаттың ішкі шекарасынан сыртқа қарайтын бағытта өседі.

Молекуланың сұйық тереңінен беттік қабатқа ауысуы, беттік қабатта әсер етуші күштерге қарсы жұмыс атқару қажеттігімен байланысты. Бұл жұмыс молекуланың кинетикалық энергиясы қорының есебінен атқарылады да, жоғарыға лақтырылған дененің жердің тарту күшіне қарсы атқаратын жұмысы дененің потенциялық энергиясын ұлғайтуға кететіні сияқты, молекуланың потенциялық энергиясын арттыруға кетеді. Молекула сұйық тереңдігіне кері ауысқанда, молекуланың беттік қабаттағы потенциялық энергиясы, молекуланың кинетикалық энергиясына айналады.

Сонымен, молекуланың беттік қабатта қосымша потенциялық энергиясы болады. Тұтасымен алғанда беттік қабаттың оның құрамды бөлігі ретінде сұйықтың ішкі энергиясына кіретін қосымша потенциялық энергиясы болады.

Тспе-тендік қалып потенциялық энергияның минимумына сәйкес келетіндіктен, сұйықтың беті өзінен-өзі минимальды форманы, яғни шар формасын алатын болады. Әдетте біз «өз еркіне жіберілген» сұйықты емес, жердің тартылыс күші әсер етіп тұрған сұйықты бақылаймыз. Бұл жағдайда сұйық қосынды энергияның—тартылыс күші өрісінің энергиясы мен беттік энергияның минимумына сәйкес келетін форманы алады.

Дененің мөлшерін ұлғайтқан кезде, оның көлемі сызықтық өлшемдердің кубы сияқты, ал беті тек квадраты сияқты артады. Сондықтан дененің көлеміне пропорционал тартылыс өрісінің энергиясы дененің мөлшеріне байланысты беттік энергиядан гөрі тезірек өзгереді. Сұйықтың ұсақ тамшыларында беттік энергия басым роль атқарады, сондықтан мұндай тамшылардың фор-

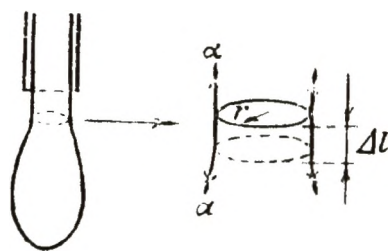
масы сфералық формаға жуық болады. Сұйықтың ірі тамшылары тартылыс күштерінің әсерінен, бұл жағдайда да беттік энергияның артатынына қарамастан, жайылып кетеді. Сұйықтың ірі массалары, беті горизонталь еркін болып, өздері құйылған ыдыстың формасын алады.

Беттік энергиясы болатындықтан, сұйықтарда өз бетін азайтуға тырысатындық байқалады. Сұйық өзін жиырылуға тырысатын керілген серпимді пленкаға құйылып қойған сияқты ұстайды. Шынында сұйықты сыртынан шектеп тұрған ешқандай пленканың жоқ екені есте болу керек. Беттік қабат, тұтас сұйық қандай молекулалардан тұрса, сондай молекулалардан тұрады да, беттік қабаттағы молекулалардың арасындағы өз ара әсер сиңаты сұйық ішіндегідей болады. Іетін мәнісі, тек беттік қабаттағы молекулалардың сұйықтың ішіндегі молекулалармен салыстырғанда көбейіне энергиясы болатындығында.

Сұйық бетінің сұйық контурмен шектелген бір бөлігін ойша бөліп алайық. Осы учаскенің қысқаруға тырысатындығы оның өзімен шекаралас учаскелерге бүкіл контурға тарап бөлінген күштермен әсер ететіндігіне әкен соғады (Ньютоның үшінші заңы бойынша беттік қабаттың сыртқы учаскелері беттің қарастырылып отырған учаскесіне шамасы сондай, бірақ бағыты оған қарама-қарсы күшпен әсер етеді). Бұл күштер беттік керілу күштері деп аталады. Беттік керілу күші сұйық бетіне жаңама бойымен өзі әсер етін тұрған контур учаскесіне перпендикуляр бағытталған.

Контур ұзындығының бір өлшеміне әсер ететін беттік керілу күшін  $\alpha$  арқылы белгілейік. Бұл шаманы беттік керілу коэффициенті дейді. Оны метрге қатысты Ньютон (СН системасында) немесе сантиметрге қатысты дина (СГС системасында) арқылы өлшейді. Сұйықтың беттік керілу коэффициентінің шамасы сұйықтың табиғатына және оның қандай жағдайда тұрғанына, атап айтқанда, температураға байланысты болады.

Қандай да бір процесті қарастырайық. Оның барысында сұйық беті әйтеуір бір сыртқы күштің әсерінен ұл-



313-сурет.

ғаятын болсын. Мұндай жағдай, мысалы, сұйықтың жіңішке түтіктен ағып шыққан кезінде байқалады (313-сурет). Ондай түтіктен сұйық тамшылап ағады. Тікелей үзілердің алдында тамшы, формасын жуықтап цилиндр тәрізді деп алуға болатын, жіңішке мойында ілініп тұрады. Тамшының салмағын мойынның көлденең қимасын шектеген контур бойына әсер ететін беттік керілу күші теңгеріп тұрады. Бұл күштердің қорытқы күшін  $2\pi r\alpha$  түрінде жаза аламыз, мұндағы  $r$  — мойынның радиусы. Мойынның ұзындығы  $\Delta l$ -ге ұлғайғанда, салмақ күші мынадай жұмыс өндіреді:

$$A' = 2\pi r\alpha\Delta l = \alpha\Delta\sigma,$$

мұндағы  $\Delta\sigma = 2\pi r\Delta l$  — тамшы бетінің өсімшесі (беттің ауданын белгілеу үшін  $\sigma$  әрпі алынып отыр, өйткені  $S$  әрпімен бұл параграфта энтропияны белгілейтін боламыз).

Егер беттің ұлғаю процесі адиабатты өтетін болса, онда сұйыққа жұмсалатын жұмыс сұйықтың ішкі энергиясының өсімшесіне тең болар еді:  $\Delta U = A' = \alpha\Delta\sigma$ . Алайда, бұл жағдайда ішкі энергияның өсімшесі беттік энергияның  $\Delta U$  бет өсімшесінен ғана емес, әрі көлемдік энергияның өсімшесінен, яғни сұйықтың ішкі бөліктері энергиясының  $\Delta U_{\text{көл}}$  өсімшесінен құралған болар еді. Бұған себеп, беттің ұлғаюы сұйықтың сууына байланысты өтеді (молекула тереңдіктен сұйықтың беттік қабатына ауысқанда, оның жылдамдығы азаятынын еске түсірейік). Ішкі энергия беттік энергияның есебінен ғана өзгеруі үшін (яғни  $\Delta U = \Delta U_{\text{бет}}$  болу үшін), сұйық бетінің ұлғаю процесін изотермиялық жүргізу керек. Бұл жағдайда  $A' = \alpha\Delta\sigma$  жұмыс атқарылуы есебінен сұйық бетінің ұлғаюы, сұйықты қоршаған ортадан сұйыққа  $Q = T\Delta S = \Delta(TS)$  жылудың келуімен байланысты болады. Энергия аддитивті шама болғандықтан, бұл өрнектегі  $S$ -ті сұйықтың беттік қабатының энтропиясы деп түсінуімізге болады (сұйықтың ішкі бөліктерінің күйі, демек, оның энтропиясы да өзгермейді). Сөйтіп, ішкі энергияның өсімшесі мынаған тең болады:

$$\Delta U = \Delta U_{\text{бет}} = A' + Q = \alpha\Delta\sigma + \Delta(TS)_{\text{бет}}.$$

Соңғы қатысты мына түрде жазуымызға болады:

$$\alpha\Delta\sigma = \Delta(U - TS)_{\text{бет}} = \Delta F_{\text{бет}},$$

мұндағы  $\Delta F_{\text{бет}}$  ауданы  $\Delta \sigma$  беттік қабаттың бос энергиясы<sup>1</sup>

Сонымен, біз беттік керілу коэффициенті  $\alpha$  сұйық бетінің бірлік үлесіне тиісті бос энергияға тең дейтін қортындыға келдік. Сондықтан оны ньютон бөлінген метр есебімен алынған өлшем (немесе сантиметрге қатысты диналар) арқылы ғана емес, әрі квадрат метрге қатысты джоульдер арқылы да, сәйкес сантиметр квадратқа қатысты эрг арқылы да анықтауға болады.

14-таблицада бөлме температурасындағы кейбір сұйықтар үшін  $\alpha$ -ның мәндері келтірілген.

Қоспалар беттік керілу коэффициентінің мәніне күшті әсер етеді. Атап айтқанда, мысалы, суға еріткен сабын, оның беттік керілу коэффициентін 0,045 н/м-ге дейін төмендетеді. Суға ерітілген NaCl оның беттік керілу коэффициентін, керісінше, арттырады.

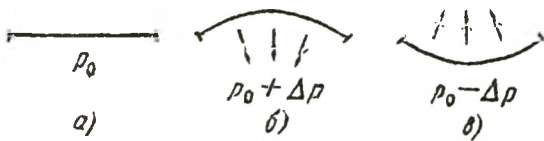
Температураны жоғарылатқан сайын сұйық пен оның қаныққан буының тығыздықтарындағы айырмашылық азая береді. Кризистік температурада  $\alpha$  нольге айналады.

14 - т а б л и ц а

Заттар	$\alpha$ , н/м
Сынап	0,490
Су	0,073
Бензол	0,029
Спирт	0,023
Эфир	0,020

#### § 144. Сұйықтың имек бетінің астындағы қысым

Қайсыбір жазық контурға тірелген сұйық бетін қарастырайық (314, а-сурет). Егер сұйық беті жазық бол-



314-сурет.

маса, онда оның қысқаруға тырысуы сұйық беті жазық болғандағы оған түсетін қысымға қосымша қысымның пайда болуына әкеп соғады. Бет дөңес бол-

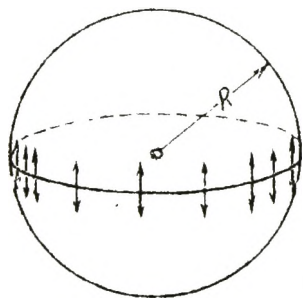
ған жағдайда, бұл қосымша қысым оң (314, б-сурет) ал ойыс бет жағдайында — теріс (314, в-сурет). Соңғы жағдайда беттік қабат қысқаруға тырыса отырып, сұйықты созатын болады.

Қосымша қысымның шамасы, сөз жоқ, беттік керілу

<sup>1</sup> (133.14) формуланы қараңыз.



коэффициенті  $\alpha$  мен беттің қисықтығының ұлғаюына байланысты артуға тиіс. Сұйықтың сфералық бетіне сәйкес қосымша қысымды есептеп шығарайық. Ол үшін сұйықтың сфера тәрізді тамшысын диаметральді жазықтықпен ойша екі жарты шарға бөлейік (315-сурет). Беттік керілудің арқасында жарты шарлардың скеуі де бірібіріне мынаған тең күшпен тартылатын болады:



315-сурет

$$f = l\alpha = 2\pi R\alpha.$$

Бұл күш жарты шарлардың скеуін де  $S = \pi R^2$  беттің бойымен біріне-біріне қысатын болады да, демек, мынадай қосымша қысым тұтылады:

$$\Delta p = \frac{f}{S} = \frac{2\pi R\alpha}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R} \quad (144.1)$$

Сфералық беттің қисықтығы барлық жерде бірдей де, сфера радиусы  $R$ -мен анықталады. Целғұрлым  $R$  аз болса, соғұрлым сфералық беттің қисықтығы артық болатыны айқын. Қалаған беттің қисықтығын орташа қисықтық дейтінімен сипаттауға келіскен, бұл беттің әр нүктесі үшін түрліше болуы мүмкін.

Орташа қисықтық нормаль қиманың қисықтығы арқылы анықталады. Беттің қайсыбір нүктедегі нормаль қимасы деп осы беттің қарастырылып отырған нүктедегі бетке тұрғызылған нормаль арқылы жүргізілген жазықтықпен қиылу сызығын айтады. Сфера үшін қалаған нормаль қима радиусы  $R$  ( $R$  — сфераның радиусы) шеңбер бой келеді. Шама  $H = 1/R$  сфера қисықтығын береді. Жалпы жағдайда, бір нүкте арқылы жүргізілген түрліше нормаль қималардың сол нүктедегі қисықтықтары түрліше болады. Геометрияда кері қисықтық радиустардың жарты қосындысы:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (144.2)$$

өз ара перпендикуляр нормаль қималардың кез келген жұбы үшін бірдей болатыны дәлелденеді. Беттің алынған нүктедегі орташа қисықтығы осы шама болады.

Соңғы (144.2) формуладағы  $R_1$  мен  $R_2$  радиустары — алгебралық шамалар. Егер нормаль қиманың қисықтық

центрі беттің астыңғы жағында болса, онда сәйкес қисықтық радиусы оң сан, егер қисықтық центрі беттің жоғарғы жағында болса, онда қисықтық радиусы теріс сан болады (316-сурет). Сөйтіп, жазық емес беттің орташа қисықтығы нольге тең болуы мүмкін. Ол үшін  $R_1$  және  $R_2$  қисықтық радиустары өз ара шама жағынан тең, ал таңбасы жағынан қарама-қарсы болулары керек.

Сфера үшін  $R_1 = R_2 = R$  және (144.2) формула бойынша  $H = \frac{1}{R}$ . Бұл мәнді (144.1)-ге қоя отырып, сфералық беттің астындағы қосымша қысым үшін мынаны аламыз:

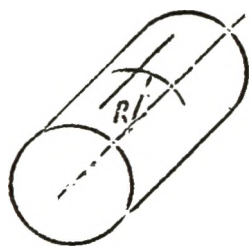
$$\Delta p = 2H\alpha. \quad (144.3)$$

Лапласстың дәлелдегеніндей, (144.3) формула, егер  $H$ -ты қай нүктеде қосымша қысым анықталса, беттің сол нүктедегі орташа қисықтығы деп білсек, кез келген формадағы бет үшін орындалады. (144.3) өрнегіне орташа қисықтыққа арналған (144.2) өрнекті қоя отырып, кез келген беттің астындағы қосымша қысым үшін мына формуланы шығарып аламыз:

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (144.4)$$

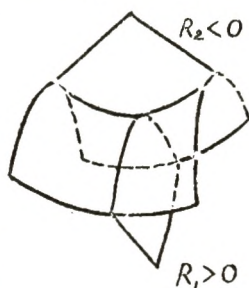
Осыны Лаплас формуласы дейді.

Қосымша қысым (144.4) жіңішке түтікшелердегі (капиллярлардағы) сұйық деңгейінің өзгеруіне себепкер болады, сондықтан ол кейде капиллярлық қысым деп аталады.



317-сурет.

Цилиндр беттің қисықтығы, (144.2) формуласы бойынша,  $1/2R$ -ге тең, яғни радиусы сондай сфералық беттің қисықтығынан 2 есе кіші. Радиусы  $R$  цилиндр беттің астындағы қосымша қысым, (144.4) формула бойынша



316-сурет.

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R}. \quad (144.5)$$

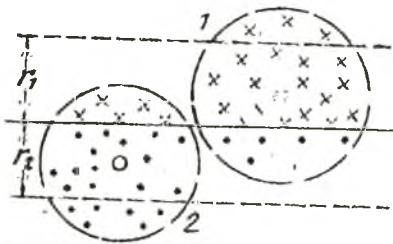
Егер сұйықта газ көпіршігі болса, онда көпіршік беті қысқаруға тырыса отырып, газға қосымша қысым түсіретін болады. (144.1) формулаға келтірген пайымдауымызды қайталай отырып, бұл қысымның шамасы  $2\sigma/R$ -ге тең екенін көрсетуге болады. Қосымша қысым 1 ат болатындай, судағы көпіршіктің радиусын табайық. Судың  $20^\circ\text{C}$ -тағы беттік керілу коэффициенті  $0,073 \text{ н/м}$ -ге тең, ал 1 ат жуықтап  $10^5 \text{ ц/м}^2$ -қа сәйкес келеді. Демек,  $R$  үшін мынадай мән шығады:

$$R = \frac{2\sigma}{\Delta p} = \frac{2 \cdot 0,073}{10^5} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Сөйтіп, көпіршік диаметрі жуықтап 3 мк болғанда,  $\Delta p = 1 \text{ ат}$  екен. Диаметрі 1 мм көпіршік үшін қосымша қысым 2 мм сын. бағанасына артады.

### § 145. Сұйық пен қатты дене шекарасындағы құбылыстар

Жоғарыдағы 143-параграфта беттік қабаттағы молекулаларға байланысты айтылған ерекше жағдайлар, тұтасымен қатты денелерге де қатысты. Демек, қатты денелерде де, сұйықтардағыдай беттік керілу байқалады екен.

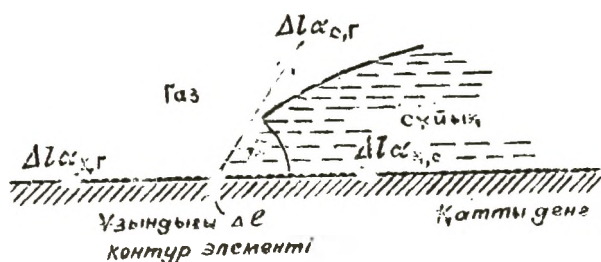


318-сурет.

Түрліше орталарды бөліп тұратын шекаралардағы құбылыстарды қарастырғанда, сұйықтың немесе қатты дененің беттік энергиясы берілген сұйықтың немесе қатты дененің қасиеттеріне ғана емес, әрі онымен шекаралас тұрған зат-

тың да қасиетіне байланысты екенін есте ұстау керек. Дәлірек айтқанда, бір-бірімен шекаралас екі заттың қосындылаушы беттік энергиясын  $\alpha_{12}$  қарастыруымыз керек (318-сурет). Онда да, заттардың біреуі газ тәрізді, екінші затпен химиялық реакцияға түспейтін және онда ерімейтін болған жағдайда ғана екінші сұйықтың немесе қатты дененің беттік энергиясы жайында (немесе беттік керілу коэффициентін) сөз етуімізге болады.

Егер бір-бірімен үш зат: қатты, сұйық және газ тәрізді зат шекаралас жатса (319-сурет), онда бір тұтас система, қосынды потенциялық энергияның (беттік, тартылыс күш өрісі және т. с. с.) минимумына сәйкес келетін конфигурацияға не болады. Атап айтқанда, үш заттың барлығының шекаралас контуры қатты дене бетінде контур элементінің ығыса алатын бағытына (яғни қатты дене бетіне жүргізілген жанама бағытына) контурдың әрбір элементіне түсірілген барлық беттік керілу күштерінің проекциялары нольге айналатындай болып орна-



319-сурет.

ласады. 319-суреттен ұзындығы  $\Delta l$  контур элементінің тепе-тең шарты былай жазылады:

$$\Delta\alpha_{к,г} = \Delta\alpha_{к,с} + \Delta\alpha_{с,г} \cos \vartheta, \quad (145.1)$$

мұндағы  $\alpha_{к,г}$ ,  $\alpha_{к,с}$  және  $\alpha_{с,г}$  — мына шекаралардағы қатты дене — газ, қатты дене — сұйық және сұйық — газ, беттік керілу коэффициенттері.

Сұйықтың ішінде қатты дене беті мен сұйық бетіне жүргізілген жанамалардың арасындағы  $\vartheta$  бұрыш, жиектік бұрыш деп аталады. (145.1) қатысына сәйкес:

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha_{к,г} - \alpha_{к,с}}{\alpha_{с,г}}. \quad (145.2)$$

Жиектік бұрышты (145.2) өрнек арқылы

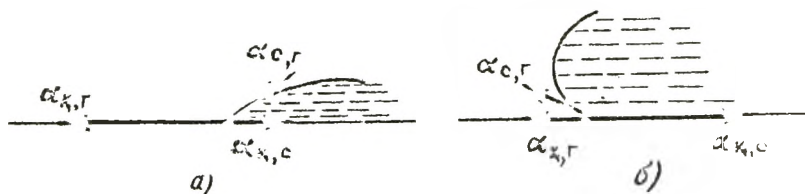
$$\frac{|\alpha_{к,г} - \alpha_{к,с}|}{\alpha_{с,г}} \leq 1 \quad (145.3)$$

шарты орындалғанда ғана анықтауға болады.

Егер (145.3) шарт орындалмайтын болса, яғни

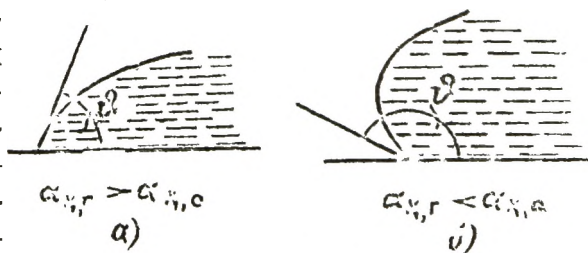
$|\alpha_{к,г} - \alpha_{к,с}| > \alpha_{с,г}$  болса, онда  $\theta$ -ның ешқандай мәнінде теге-теңдік орнауы мүмкін емес. Бұл мына екі жағдайда жүзеге асады:

1)  $\alpha_{к,г} > \alpha_{к,с} + \alpha_{с,г}$  Бұрыш  $\theta$  қаншалық аз болғанымен де,  $\alpha_{к,г}$  күш қалған екі күштен артық (320, а-сурет). Бұл жағдайда сұйық қатты дене бетімен шексіз жайылып кетеді — толық жұғу пайда болады. Қатты дене — газ бетін қалған екі бетпен: қатты дене — сұйық және сұйық — газ — алмастырғанымыз энергия тұрғысынан тиімді екен. Толық жұққан кезде жиектік бұрыш нольге тең.



320-сурет.

2)  $\alpha_{к,с} > \alpha_{к,г} + \alpha_{с,г}$  Бұрыш  $\theta$  қаншалық  $\pi$ -ге жуық болғанымен,  $\alpha_{к,с}$  күш қалған екі күштен артық (320, б-сурет). Бұл жағдайда сұйықтың қатты денемен шекаралық беті нүктеге айналады да, сұйық қатты дене бетінен ажырайды — мүлде жұқпау жүзеге асады. Қатты дене — сұйық бетін мына екі бетпен: қатты дене — газ және сұйық — газ бетімен алмастырғанымыз энергиялық тұрғыдан тиімді екен. Мүлде жұқпаған кезде жиектік бұрыш  $\pi$ -ге тең.



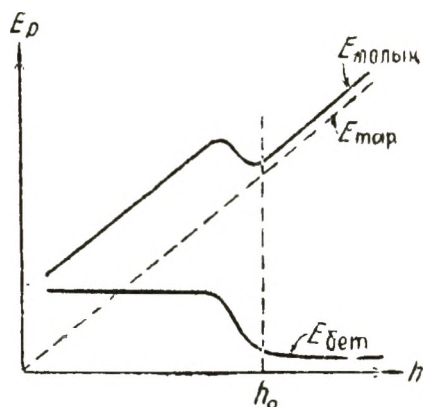
321-сурет.

Жоғарыдағы (145.3) шарты орындалған жағдайда  $\alpha_{к,г}$  және  $\alpha_{к,с}$  арасындағы іліктестікке қарай жиектік бұрыш сүйір болып та, доғал болып та шығуы мүмкін. Егер  $\alpha_{к,г} > \alpha_{к,с}$  болса, онда  $\cos \theta > 0$  және  $\theta$  бұрышы сүйір болады (321, а-сурет). Бұл жағдайда жарым-жартылай жұғу байқалады. Егер  $\alpha_{к,г} < \alpha_{к,с}$  болса, онда  $\cos \theta < 0$  және бұрыш  $\theta$  доғал (321, б-сурет) Бұл жағдайда жарым жартылай жұқпау байқалады.

Жұқпау қызық құбылыстар тудыра алады. Мысалы,

майланған ине мен майланған ұстара жүзі су бетінде қалқып жүре алатыны белгілі. Бұл бір қарағанда ғажайып боп көрінетін құбылысты, ең дұрысы, энергия тұрғысынан түсіндірген қолайлы. Майланған болат бетіне су жұқпайды, болат — су жаңасу бетінің энергиясы, болат — ауа немесе ауа — су беті энергиясына қарағанда, анағұрлым үлкен болады.

Иненің суға толық батып кетуі, беттік энергияның  $S\alpha_{к,г}$  мәннен (болат—ауа),  $S\alpha_{к,с}$  мәнге дейін (болат—су) артуымен байланысты болады, мұндағы  $S$  — иненің беті. Суға батырғандағы беттік энергияның өзгерісі 322-суретте көрсетілген  $E_{бет}$  қисығы арқылы кескінделеді.  $h$  әрпі арқылы иненің ыдыс түбінен биіктігі белгіленген,  $h_0$  — сұйық бетінің ыдыс түбі деңгейінен биіктігі.



322-сурет.

Иненің жердің  $E_{тар}$  тартылыс өрісіндегі потенциялық энергиясының  $h$  биіктікке тәуелділігі координата басы арқылы өтетін түзу сызық боп келеді.  $E_{бет}$  пен  $E_{тар}$  қосындысына тең толық энергияның  $h = h_0$  болғанда минимумы болады, сондықтан да иненің су бетінде қалқып жүруіне мүмкіншілік туады. Егер инені басып, оның толық энергиясы мини-



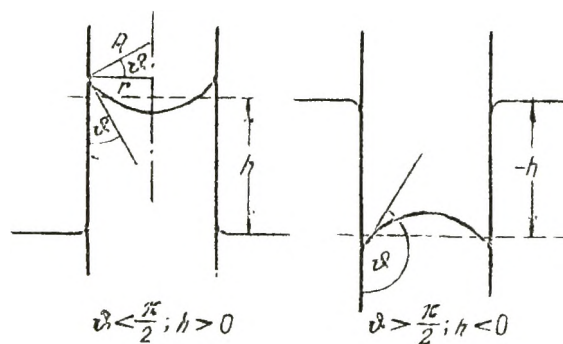
323-сурет

мумнан өтетіндей және азая бастайтындай тереңдікке батырса, онда ине одаң әрі өзі бата бастайды да, ақырында батып кетеді.

«Суды елеуіште ұстау» құбылысы да, осылайша түсіндіріледі. Егер су елеуішке жұқпайтын болса (ол үшін елеуіш жіптерін парафинмен майлау керек) және су қабаты аса қалың болмаса, онда сұйық деңгейінің азғана төмендеуі (323-сурет) шамасы жөнінен тартылыс күштері өрісіндегі энергиядан артық беттік энергияның ұлғаюына байланысты болады. Сондықтан су елеуіште төгілмей тұрады.

## § 146. Капиллярлық құбылыстар

Жіпектік бұрыштың болуы ыдыс қабырғасының маңайында сұйық бетінің пілуіне әкеп соғады. Жіңішке түтікте (капиллярда<sup>1</sup>) немесе екі қабырғаның арасындағы жұқа саңылауда сұйық беті тұтас піледі.



324-сурет.

Егер сұйық қабырғаға жұғатын болса, беттің формасы ойыс, егер жұқпайтын болса — дөңес болады (324-сурет). Сұйықтың осы сияқты пілген беті мениск деп аталады.

Егер капиллярды бір шетінен кең ыдысқа құйылған сұйыққа батыратын болсақ, онда капиллярдағы пілген беттің астындағы

қысымның кең ыдыстағы сұйықтың жазық бетіндегі қысымнан айырмашылығы (144.4) формулада анықтала-тын,  $\Delta p$  шамасында болады. Соның салдарынан жұққанда капиллярдағы сұйық деңгейі жоғары, ал жұқпағанда төмен болады.

Жіңішке түтіктер мен тар саңылауларда сұйық деңгейі биіктігінің өзгеруі капиллярлық деген ат алды. Кең мағынада алғанда капиллярлық құбылыстар деп беттік керілуге байланысты құбылыстардың бәрін айтады. Атап айтқанда, беттік керілуге байланысты (144.4) қысым, бұрын айтылғандай, капиллярлық қысым деп аталады.

Капиллярдағы сұйық деңгейі мен кең ыдыстағы сұйық деңгейінің айырымы  $h$ , гидростатикалық қысым  $\rho gh$  капиллярлық қысымды  $\Delta p$  теңгеріп тұратындай болып қалыптасады:

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R}. \quad (146.1)$$

Бұл формулада  $\sigma$  — сұйық — газ шекарасындағы беттік керілу күші,  $R$  — менскінің қисықтық радиусы.

<sup>1</sup> Латынша capillus шаш деген сөз. Капилляр — «шаш сияқты жіңішке түтік».

Менискінің қисықтық радиусын  $R$  жиектік бұрыш  $\theta$  және капиллярлар радиусы  $r$  арқылы өрнектеуге болады. Шынында да, 324-суреттен  $R = r / \cos \theta$  екені көрініп тұр. Мұны (146.1) өрнегіне қоя отырып және одан шыққан теңдеуді  $h$  арқылы шеше отырып, мына формулаға келеміз:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g r} \quad (146.2)$$

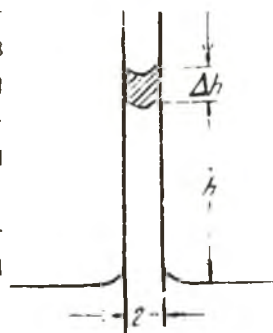
Жұғатын сұйықтың капилляр бойымен көтерілетініне, ал жұқпайтын сұйықтың — төмендейтініне сәйкес, (146.2) формула  $\theta < \pi/2$  болған жағдайда ( $\cos \theta > 0$ ) ол  $h$  және  $\theta > \pi/2$  ( $\cos \theta < 0$ ) болған жағдайда теріс  $h$  береді.

(146.2) өрнекті дәлелдеген кезде, біз мениск формасын сфералық деп ұйғарғанбыз. Бұл  $h$ -қа арналған формуланы мениск формасы жөнінде ешқандай арнайы ұйғарындыны қажет етпейтін энергиялық тұрғыдан да дәлелдей аламыз.

Менискінің тепе-теңдік қалпы сұйық-капилляр системасының  $E_p$  потенциялық энергиясының минимумына сәйкес келеді. Бұл энергия сұйық — қабырға, сұйық — газ және қабырға — газ шекараларындағы беттік энергия мен жердің тартылыс өрісіндегі сұйықтың потенциялық энергиясының қосындысынан тұрады.

Сұйықтың капиллярда көтерілу биіктігінің азғана өзгерісіне сәйкес келетін энергияның  $\Delta E_p$  өсімшесін табайық. Биіктік  $\Delta h$ -қа артқан кезде, сұйықтың капилляр-қабырғасымен жанасу беті  $2\pi r \Delta h$ -қа ұлғаяды, соның салдарынан энергия  $2\pi r \Delta h \alpha_{к.с}$ -ға тең өсімшені алады. Осымен бір уақытта газдың капилляр қабырғасымен жанасу беті азаяды да, энергия шамасы  $2\pi r \Delta h \alpha_{г.с}$ -ға тең мөлшерде өзгереді. Жердің тартылыс өрісіндегі потенциялық энергия  $h$ -қа көбейтілген сұйықтың штрихталған көлемінің (325-сурет) салмағына тең, яғни  $g \rho \pi r^2 h \Delta h$ -қа тең өсімше алады. Сұйық деңгейінің көп ыдыстағы өзгерісін ескермеуге болады. Сөйтіп,

$$\Delta E_p = 2\pi r (\alpha_{к.с} - \alpha_{г.с}) \Delta h + \pi r^2 \rho g h \Delta h.$$



325-сурет.



Осыдан мынау шығады.

$$\frac{dF_p}{dh} = 2\pi r (z_{к,с} - z_{к,г}) + \pi r^2 \rho g h.$$

Бұл туындыны нольге теңей отырып, теңестік шартын шығарып аламыз да, сол арқылы мынаны табамыз:

$$h = \frac{2(z_{к,г} - z_{к,с})}{\rho g r} \quad (146.3)$$

Алайда, (145.2)-ге сәйкес  $\alpha_{к,г} - \alpha_{к,с} = \alpha_{с,г} \cos \theta$ . Бұл мәнді (146.3)-ке қойып және  $\alpha_{с,г}$  -ні тікелей  $\alpha$  арқылы белгілей отырып, (146.2) формуланы шығарып аламыз.

Сұйыққа батырылған параллель пластинкалар арасындағы тар саңылаудағы менискінің формасы қисықтық радиусы  $R(d/2) \cos \theta$  цилиндр тәрізді болады ( $d$  — пластинкалар арасындағы саңылау). Қапшлярлық қысым бұл жағдайда (144.5) бойынша мынаған тең:  $\frac{\tau}{R} = \frac{2\alpha \cos \theta}{d}$

$$\frac{2\alpha \cos \theta}{d} = \rho g h$$

шартынан мынау шығады:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g d}.$$

Егер беттері айнадай жылтыратылған су жұқтырылған екі пластинканы беттестірсек, онда олардың арасында білінерліктей ілінісу күш пайда болады. Бұл құбылыс былай түсіндіріледі. Пластинкалар арасындағы саңылауда сұйық беті күшті иілген (326-сурет). Демек, сұйық ішіндегі қысым атмосфералық қысымнан



326-сурет.

$$\Delta p = \tau \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

шамасында кем болады.

Толық жұққан жағдайда  $R_1 = d/2$ , мұндағы  $d$  — пластиналар арасындағы саңылаудың шамасы. Пластинкаларға параллель жазықтық қимасының  $R_2$  радиусы

$R_1$  деп едәуір үлкеп. Сондықтан,  $\Delta p \approx 2 \frac{1}{R_1} = \frac{2\sigma}{d}$  деп алуымызға болады. Егер әр пластинаның сұйық жұққан бетінің ауданын  $S$  деп алсақ, онда пластиналар біріне-бірі мынаған тең күшпен сығылатын болады:

$$f = \Delta p S = \frac{2\sigma S}{d}. \quad (146.4)$$

Пластиналар арасындағы саңылаудың шамасы пластиналар беттеріндегі кедір-бұдырлар мөлшеріне байланысты болады. Саңылау мөлшері  $1 \text{ мк}$  және пластиналарға жұққан су болса,  $\Delta p$  мәні шамалап  $1 \text{ ат}$  болады, содан, егер пластиналар мөлшері  $10 \times 10 \text{ см}$  болса, онда олардың арасындағы ілініс күш  $100 \text{ кг}$ -ға дейін барады.

Егер пластиналар арасында жұқпайтын сұйық қабаты тұрса, онда пластиналарды бір-бірінен тебілтетін күш пайда болады. Бұл күштің шамасы да (146.4) бойынша анықталады.

XVII ТАРАУ  
ФАЗАЛЫҚ ТЕПЕ-ТЕНДІКТЕР МЕН АУЫСУЛАР

§ 147. Кіріспе

Термодинамикада фаза деп өздерінің қасиеттері жөнінен системаның біртекті бірдей бөліктерінің жиынағын айтады. Фаза ұғымын мынадай мысалдар арқылы түсіндірейік. Жабық ыдыста су және оның үстінде ауа мен су буының қоспасы тұр. Бұл жағдайда біз екі фазадан тұратын системамен істес боламыз: бір фазаны су, ал екіншіні — ауа мен су буының қоспасы құрайды. Егер суға бірнеше кесек мұз тастасак, онда мұздың бұл кесектерінің бәрі үшінші фазаны құрайтын болады. Қандай да бір заттың түрліше кристалдық модификациясы түрліше фаза болып табылады. Атап айтқанда, мысалы, алмас пен графит көміртегінің түрліше қатты фазаларына жатады.

Белгілі бір жағдайларда бір заттың түрліше фазалары бірімен-бірі өз ара жанаса отырып, тепе-теңдікте бола алады. Екі фазаның тепе-теңдігі температураның тек белгілі бір интервалында жүзеге аса алады, онда да температураның әрбір мәніне тепе-теңдік орнайтын  $p$  қысымның белгілі бір мәні сәйкес келеді. Сөйтіп, екі фазаның тепе-теңдік күйлері  $(p, T)$  диаграммада мына сызықпен кескінделеді:

$$p = f(T) \quad (147.1)$$

Атап айтқанда, мысалы, сұйық пен оның қаныққан буының тепе-теңдігі, 119-параграфта байқағанымыздай, үштік нүкте температурасы мен кризистік температураның арасындағы температуралық интервалда байқалуы

мүмкін. Бұл жағдайда қаныққан бу серпімділігінің қисығы (147.1) функцияның графигі болып табылады.

Бір заттың үш фазасы (қатты, сұйық және газ тәрізді фаза, немесе екі қатты және бір сұйық фаза) температура мен қысымның бір жалғыз-ақ мәнінде тепе-теңдікте тұра алады, бұларға  $(p, T)$  диаграммасында үштік нүкте деп аталатын сәйкес келеді. Бұл нүкте жұбымен алынған фазалардың тепе-теңдік қисықтарының қиылысында жатады.

Термодинамикада тәжірибелерге сәйкес тепе-теңдік күйде бір заттың көп болғанда үш-ақ фазасы болатындығы дәлелденді.

Бір фазадан екінші фазаға ауысу әдетте жасырын жылу, яғни жай жылу деп аталатын қайсыбір жылу мөлшерінің жұтылуына немесе бөлініп шығуына байланысты болады. Кристалдық модификациялардың бір түрінен екінші түріне ауысуы кейде жылу мөлшерін жұтуға немесе бөліп шығаруға байланысты болмайды. Мұндай ауысулар, кәдімгі бірінші текті фазалық ауысулардан бөлек, екінші текті фазалық ауысулар деп аталады. Біз тек бірінші текті фазалық ауысуларды қарастыратын боламыз.

## § 148. Булану және конденсация

Кез келген температурада сұйық және қатты денелерде энергиясы басқа молекулалардың сұйық немесе қатты дене бетінен бөлінуі үшін, тартылыс күштерін жеңіп шығуына, газ тәрізді күйге көшуіне жеткілікті, бірсыпыра молекулалар болады. Сұйықтың газ тәрізді күйге ауысуы булану деп аталады, ал қатты дененің газ күйіне ауысуы сублимация деп аталады.

Қатты денелердің бәрі, түгелінсі, қай дәрежеде болғанымен сублимацияға (буға айналу) ұшырайды. Кейбір, мысалы, көмір қышқылы сияқты заттарда сублимация процесі елеулі жылдамдықпен өтеді; ал басқа заттарда бұл процестің кәдімгі температуралардағы баяу өтуі соншалық, іс жүзінде ол сезілмейді.

Булану және сублимация кезінде денеден анағұрлым тез қозғалатын молекулалар шығып кетеді де соның салдарынан қалған молекулалардың орташа энергиясы азайып, дене суиды. Буланған (немесе сублимацияланған) дененің температурасын тұрақты етіп ұстау үшін,

оган сырттан үздіксіз жылу келтіріп тұру қажет. Булану температурасында тұрған заттың бір өлшем массасын түгелінен бұға айналдыру үшін жұмсалатын жылу  $q$  меншікті булану (немесе сублимация) жылуы деп аталады.

Конденсация кезінде булануға жұмсалған жылу кері қайтарылады: конденсация кезінде пайда болған сұйық (немесе қатты дене) қызатын болады.

Сұйықтың булану жылуын есептеп шығарайық. Сұйық мөлшерінің бір шама буланып, газ тәрізді фазаға ауысқан кезде, молекулалар беттік қабатта әсер ететін күштерге қарсы жұмыс өндірулері керек (143-параграфты қараңыз). Бұл күштер қабат қалыңдығы  $r$ -ға тең жолда әсер етеді. Бұл жолдағы күштердің орташа мәнін  $\bar{f}$  арқылы, ал сұйықтың бірлік массасындағы молекулалар санын  $n'$  арқылы белгілеп, беттік қабатта әсер етуші күштерге қарсы жұмысты  $n'\bar{f}r$  түрінде жазуымызға болады. Булану процесіне байланысты заттың көлемі өседі, осының салдарынан да сыртқы күштерге қарсы жұмыстың орындалуы қажеттігі туады. Егер булану тұрақты сыртқы  $p$  қысымда өтетін болса, сыртқы күштерге қарсы орындалатын жұмыс мынаған тең болады:  $p(V_6 - V_с)$ , мұндағы  $V_6$  және  $V_с$  — бу мен сұйықтың меншікті көлемдері. Жоғарыда көрсетілген жұмыстардың екеуі де,  $q$  булану жылуының есебінен орындалады. Сөйтіп,

$$q = n'\bar{f}r + p(V_6 - V_с) \quad (148.1)$$

Бұл (148.1) өрнектен, булану жылуы температураға байланысты азаятыны байқалады. Шынында да, температура артқан сайын қаныққан будың тығыздығы артады да, бұл өзінің кезегінде беттік қабатта тұрған молекулаға әсер ететін күшті кемітеді. Сондай-ақ, қаныққан бу мен сұйықтың меншікті көлемдерінің айырмашылығы кемиді. Демек, температура артқан сайын (148.1) өрнектегі қосылғыштардың екеуі де азаяды. Қризистік температурада булану жылуы нольге айналады.

Сұйық пен оның буының арасында тепе-теңдік пайда болу процесін қарастырайық. Жарым-жартылай сұйық толтырған бітеу ыдысты алып (327-сурет), алғашқыда сұйық үстіндегі кеңістіктен зат түгел сорып алынған деп ұйғарайық. Булану салдарынан сұйық үстіндегі кеңістік молекулаларға тола бастайды. Газ тәрізді фазаға ауыс-

қан молекулалар, хаосты қозғала отырып, сұйық бетімен соқтығысатын болады, содан бұл соқтығыстардың бір бөлегіне байланысты молекулалар сұйық фазаға ауысады. Уақыт бірлігінде сұйық фазаға ауысатын молекулалардың саны, сөз жоқ, сұйық бетіне соқтығысатын молекулалардың санына пропорционал болады, ал бұл өзінің кезегінде  $lv$ -ға пропорционал, яғни  $p$  қысымға байланысты өседі. Демек, буланумен қатар молекулалардың газ тәрізді фазадан сұйық фазаға көшуінің кері процесі жүріп жатады және оның интенсивтігі сұйықтың үстіндегі кеңістікте молекулалар тығыздығы ұлғайған сайын өседі. Қысым (берілген температураға сәйкес) белгілі бір нақтылы мәнге жеткеннен кейін, сұйықтан шығып жатқан молекулалардың саны мен оған кері қайтып жатқан молекулалардың саны бірдей боп шығады. Осы мезеттен бастап, будың тығыздығының өзгеруі тоқталады. Сұйық пен будың арасында өзгермелі тепе-теңдік пайда болады (327-сурет) және ол системаның көлемі немесе температурасы қашан өзгергенге дейін бұзылмайды.



327-сурет.

Өзгермелі тепе-теңдікке сәйкес келетін қысым, қаныққан будың қысымы  $p_{к.б}$  болып табылады. Егер ыдыс көлемін ұлғайтсақ, будың қысымы төмендеп кетеді де, тепе-теңдік бұзылатын болады. Соның нәтижесінде сұйықтың қосымша мөлшері буға айналады да, қысым тағы да  $p_{к.б}$ -ға тең боп шығады. Осыған ұқсас көлемнің азаюы да будың бір шама мөлшерінің сұйыққа айналуына байланысты болады.

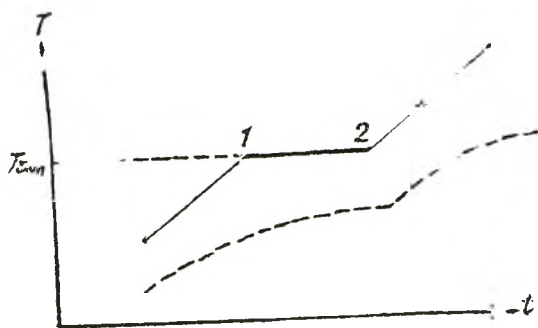
Уақыт бірлігінің ішінде сұйықтан бөлініп шығатын молекулалар саны температураға байланысты күшті артады. Сұйық бетіне соқтығысатын молекулалар санының температураға байланыстылығы кемірек болады ( $\bar{v}$  арқылы  $\sqrt{T}$  ретінде). Сондықтан температураны арттырған кезде фазалар арасындағы тепе-теңдік бұзылады да, біршама уақыт ішінде сұйық  $\rightarrow$  бу бағытындағы молекулалар ағыны бу  $\rightarrow$  сұйық бағытындағы молекулалар ағынынан басым болады. Бұл жағдай, қашан қысымның артуы, өзгермелі тепе-теңдікті қайта қалыптастырғанға дейін созылады. Сөйтіп, сұйық пен будың арасында өзгермелі тепе-теңдік пайда болатын қысым, яғни қанық-

қан будың қысымы, температураға байланысты болады екен. Бұл байланыстылық 274-суретте көрсетілген.

Сұйық пен газдың арасындағы тепе-теңдік жөнінде айтылғанның бәрің қатты дене-газ системасы үшін де қолдануға болады. Әрбір температураға қатты дене мен газдың арасында өзгермелі тепе-теңдік қалыптасатын қысымның нақтылы мәні сәйкес келеді. Көптеген денелер үшін, мысалы, қатты металдар сияқты денелер үшін бұл қысымның кәдімгі температураларда аз болатыны сонша, оны өте сезгіш құралдар арқылы да анықтауға болмайды.

### § 149. Балқу және кристалдану

Кристалдық дененің сұйық күйге көшуі әр зат үшін белгілі бір температурада өтеді де, балқу жылуы дейтін бір шама жылу мөлшерін жұмсауды қажет етеді. Алғашқыда кристалдық күйде тұрған денеге минут сайын



328-сурет.

бірдей жылу мөлшері жұмсалса, онда дене температурасының уақытқа байланысты өзгеруі 328-суретте көрсетілгендей болады. Бастапқы кезде дененің температурасы біртіндеп өседі. Балқу температурасына  $T_{ж}$  жеткеннен кейін (328-суреттегі 1 нүкте), де-

неге жылудың бұрынғыша берілгеніне қарамастан, оның температурасының өзгерісі тоқталады. Осы кезде қатты дененің балқу процесі басталады да, соның барысында заттың жаңа үлестері біртіндеп сұйыққа айнала береді. Балқу процесі аяқталғаннан кейін және зат толығымен сұйық күйге ауысып болғаннан кейін (328-суреттегі 2 нүкте) температура тағы да жоғарылай бастайды.

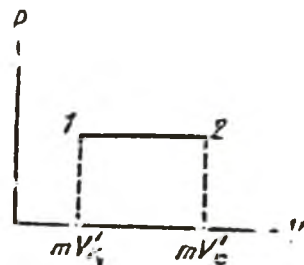
Аморф дененің қыздыру қисықтығының түрі бұдан өзгеше (328-суреттегі пунктирмен сызылған қисықты қараңыз). Бір қалыпты жылу берген жағдайда аморф дененің температурасы үздіксіз өседі. Аморф денелерде нақтылы сұйық күйге көшу температурасы болмайды. Бұл көшу секірмелі емес, үздіксіз жүзеге асады. Тек де-

ненің жұмсауы қай температуралар шегінде жүзеге асатынын көрсетуге болады. Мұның өзі сұйықтар мен аморф денелер тек молекулаларының қозғалғыштық дәрежесімен айырылатынын — аморф денелердің, бұрын ескерткеніміз бойынша, күшті асыра суытқан сұйықтарға жататындығымен түсіндіріледі.

Балқу температурасы қысымға байланысты болады. Сөйтіп, кристалдық күйдің сұйық күйге ауысуы, қысым мен температураның мәндерімен сипатталатын белгілі бір жағдайларда жүзеге асады. Бұл мәндердің жинағына  $(p, T)$  диаграммадағы балқу қисығы деп аталатын қисық сәйкес келеді. Балқу қисығы өте шұғыл болып келеді. Мұздың балқу температурасын, мысалы,  $1^\circ$ -қа өзгерту үшін, қысымды  $132 \text{ ат}$ -ға өзгерту керек.

Балқу қисығының нүктелері кристалдық фаза мен сұйық фазаның бір-бірімен тепе-теңдікте қандай жағдайларда тұра алатынын көрсетеді. Мұндай тепе-теңдік сұйық пен кристалдар массаларының кез келген қатысында, яғни система көлемінің

$mV_k$ -дан  $V_c$ -ға дейінгі шекте жатқан мәндерінде жүзеге аса алады, мұндағы  $m$  — система массасы, ал  $V_k$  мен  $V_c$  — қатты және сұйық фазалардың меншікті көлемдері. Сондықтан балқу қисығының әр нүктесіне  $(p, V)$  диаграммадағы горизонталь түзудің кесіндісі сәйкес келеді (329-сурет). Заттың температурасы осы кесіндінің нүктелерімен кескінделетін күйлерде бірдей болатындықтан, 329-суретте  $1-2$  түзуі заттың екі фазалық күйіне сәйкес келетін изотерманың учаскесін көрсетеді. (272-суреттегі изотерманың горизонталь учаскесімен салыстырыңыздар.)



329-сурет.

Балқуға кері кристалдану процесі мына түрде өтеді. Сұйықты берілген қысымда, қатты фаза мен сұйық фаза тепе-теңдікте бола алатын температураға дейін (яғни балқу басталатын температураға дейін) суытқан кезде, кристалдану ұрығы немесе кристалдану центрі дейтіндердің маңайында кристалликтердің жаппай өсуі басталады. Біртіндеп ірілене отырып, жеке кристалликтер ақыр аяғында өз ара бірігіп, поликристалдық қатты дене құрайтын болады.



Кристалдану центрлерінің ролін, сұйықтың ішінде қалқып жүрген қатты бөлшектер атқара алады. Осындай бөлшектерден әбден тазартылған сұйықты, кристалликтер пайда болмай-ақ, кристалдану температурасынан төменгі температураға дейін суытуға болады. Осындай асыра суытылған сұйықтың күйі метастабильді күйге жатады. Сұйықтың бірден тепе-теңдік температурадағы сұйыққа және кристалға жіктеліп кетуіне оған бір тозанның түсіп кетуі жеткілікті. Алайда, кейбір жағдайларда сұйық молекулаларының қозғалғыштығы асыра суытқан кезде нашар болатындығы сонша, метастабильдік күй өте ұзақ уақыт сақтала алады. Мұндай жағдайларда сұйықтың аққыштығы өте нашар болады да, зат аморф қатты денеге айналады.

Кристалдану кезінде, балқу кезінде қанша жылу жұмсалса, сонша жылу бөлініп шығады.

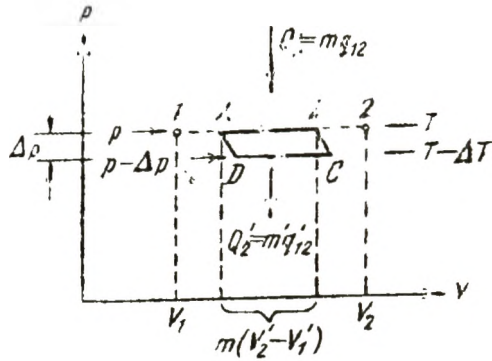
## § 150. Клапейрон — Клаузиус теңдеуі

Өткен параграфтардан біз заттың кез келген екі фазасының тепе-теңдік күйде шамасы температураға тәуелді болатын тек белгілі бір қысым кезінде ғана болатынын көрдік. Бұл тәуелділіктің жалпы түрін термодинамиканың екінші бастамасының көмегімен шығарып алуға болады. Ол үшін берілген заттың өз ара тепе-теңдіктегі екі фазасынан тұратын системаға қатысты Карно циклін қарастырайық.

Екі фазалық система үшін  $(p, V)$  диаграммасындағы Карно циклі 330-суретте көрсетілгендей болады (қыздырғыш пен суытқыш температураларының айырмасы өте аз  $\Delta T$  шамасы деп ұйғарылып отыр). Температурасы  $T$  изотерманың горизонталь учаскесінің шеткі нүктелері 1 және 2 цифрларымен белгіленген. 1 және 2 күйлер бір фазалы күйлер болып табылады. 1—2 кесіндісінің аралық нүктелерінің бәрі бір-бірінен зат массасының бірінші және екінші фаза арасында бөлінуі арқылы айырылатын екі фазалық күйлерді кескіндейді.

Изотермиялық процесс  $A \rightarrow B$  заттың қайсыбір  $m$  массасының фазалық ауысуымен байланысты болады. Сол кезде заттың көлемі  $m(V' - V_1)$ -ға тең өсімше алады, мұндағы  $V_1$  пен  $V'$  — бірінші және екінші фазалардың

меншікті көлемдері. Мұндай ауысу жүзеге аса алатын болу үшін, затқа  $m q_{12}$ -ге тең  $Q_1$  жылу мөлшерін беруге тиісіз, мұндағы  $q_{12}$  —  $T$  температура жағдайында 1 күйден 2 күйге ауысқан кезде жұтылатын меншікті жылу.  $Q_1$  жылу системаның циклінің барысында қыздырғыштан алатын жылуын білдіреді. Суытқышқа жылу  $C \rightarrow D$  изотермиялық процестің барысында беріледі.



330-сурет.

Берілген жылуның мөлшері мынаған тең:  $Q_2 = m' q'_{12}$ , мұндағы  $q'_{12}$  —  $T - \Delta T$  температура жағдайында 1—2 ауысу жылуы, ал  $m'$  —  $C \rightarrow D$  процестің барысында фазалық ауысуға ұшыраған зат мөлшері. Заттың бұл мөлшерінің  $m$ -нен аз ғана айырмашылығы бар, өйткені заттың қайсыбір мөлшері аднабаталық процестің барысында фазалық ауысуға ұшырайды.

Цикл ішінде орындалатын жұмыс  $A$  сан жағынан, цикл ауданына тең. Сондықтан мынаны жаза аламыз:

$$A \approx m(V_2 - V_1) \Delta p. \quad (150.1)$$

Бұл (150.1) теңдеуі жуықтап алынған.  $\Delta p$  нөлге ұмтылған кездегі (ол үшін  $\Delta T$  нольге ұмтылуы керек) шекте (150.1) өрнегі дәл теңдеуге айналады.

Цикльдің п. ө. коэффициенті анықтама бойынша мынаған тең:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \approx \frac{m(V_2 - V_1) \Delta p}{m q_{12}} = \frac{V_2 - V_1}{q_{12}} \Delta p. \quad (150.2)$$

Сонымен қатар (129.7) бойынша мынаны жазуға болады:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}. \quad (150.3)$$

(150.2) және (150.3) өрнектерді бірімен-бірің теңестіре отырып,  $\eta$  үшін мынаны аламыз:

$$\frac{V_2 - V_1}{q_{12}} \Delta p \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Бұдан

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \approx \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')} \quad (150.4)$$

$\Delta T$  нольге ұмтылғандағы шекте (150.4) жуық теңдеу мынадай дәл теңдеуге айналады:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')} \quad (150.5)$$

Соңғы (150.5) қатысы Клапейрон — Клаузиус формуласы (немесе теңдеуі) деп аталады. Клапейрон — Клаузиус теңдеуі температура бойынша тепе-теңдік қысымнан алынған туындыны жылуда ауысумен, теңбе-теңдіктегі фазалардың температурасы және меншікті көлемдерінің айырымымен байланыстырады.

(150.5) бойынша  $\frac{dp}{dT}$  туындының таңбасы, жылудың жұтылуы кезінде болатын фазалық өтумен қоса жүретін көлемнің өзгерісіне — артуына немесе кемуіне тәуелді болады. Сұйық не қатты дене буланған кезде көлем әрқашан артады, сондықтан  $\frac{dp}{dT}$  булану қисығы үшін, сондай-ақ сублимация қисығы үшін тек оң таңбалы болуы мүмкін: температураның артуы тепе-теңдік қысымның артуына әкелі соғады.

Балқыған кезде көлем әрқашан артады, демек,  $\frac{dp}{dT} > 0$ : қысымның ұлғаюы балқу температурасының артуына әкелі соғады. Алайда, кейбір заттарда, мәселен, суда сұйық фазаның көлемі қатты фазаның көлемінен кем болады ( $V_2 < V_1$ )<sup>1</sup>. Бұл жағдайда  $\frac{dp}{dT} < 0$  — қысымның артуы балқу температурасының төмендеуімен қосарлана жүреді. Мұзды күшті қысымға ала отырып, оның балқу температурасын  $0^\circ \text{C}$ -тан арттырмай-ақ, ерітуге болады.

Бір кристалдық модификациядан екіншісіне ауысу температурасы, қысым артқанда қатты фазаның қайсысының меншікті көлемі артық болатынына қарай жоғарлауы да, төмендеуі де мүмкін.

<sup>1</sup> Су қатқан кезде көлемін ұлғайтатыны белгілі. Осы себепті де суда қарағанда мұздың тығыздығы аз болады.

## § 151. Үштік нүкте. Күй диаграммасы

Затты сұйық күйінде алып онымен тепе-теңдікте тұрған қаныққан буды қарастырайық та, көлемін өзгертпей одан біртіндеп жылу алатын болайық. Бұл процесс заттың температурасының төмендеуімен және соған сәйкес қысымының төмендеуімен байланысты болады. Сондықтан

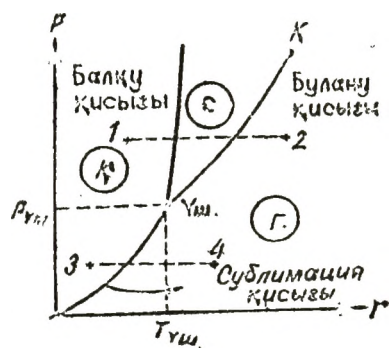
( $p, T$ ) диаграммада зат күйін суреттейтін нүкте төмен қарай булану қисығының бойымен қозғалатын болады (331-сурет). Бұл қысымның тепе-теңдік мәніне жауап беретін заттың кристалдану температурасына жеткенге дейін созылады. Бұл температураны  $T_{\text{үш}}$  арқылы белгілейік. Кристалдану жүріп жатқан уақыт бойы,

температура мен қысым ұдайы тұрақты болып қала береді. Сол кезде сыртқа әкетіліп жатқан жылу, кристалдану кезінде бөлініп жатқан жылу боп табылады.

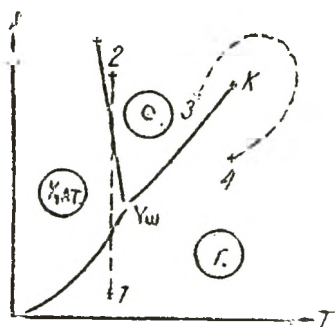
Температура  $T_{\text{үш}}$  және соған сәйкес тепе-теңдік қысым  $p_{\text{үш}}$  — қатты, сұйық және газ тәрізді фаза сияқты заттың үш фазасының үшеуі де тепе-теңдікте тұратын температура мен қысымның жалғыз мәні. Диаграммадағы ( $p, T$ ) соған сәйкес нүкте үштік нүкте деп аталады. Сөйтіп, үштік нүкте заттың үш фазасының үшеуі бірдей тепе-теңдікте тұра алатын шарттарды анықтайды.

Кристалдану процесі аяқталғаннан кейін тепе-теңдік күйде қатты фаза мен газ тәрізді фаза қалады. Егер заттан жылу алуды одан әрі соза берсек, температура тағы төмендей бастайды. Соған сәйкес кристалдық фазамен тепе-теңдікте тұрған будың қысымы да азая бастайды. Зат күйін көрсететін нүкте сублимация қисығының бойымен төмендей бастайды.

Үштік нүкте температурасы,  $p_{\text{үш}}$  қысымда тұрып заттың балқитын температурасы болады. Бұдан басқа қысымдарда заттың балқу температурасы басқаша болады. Заттың балқу қысымы мен балқу температурасының арасындағы байланыс үштік нүктеден басталатын балқу қисығы арқылы кескінделеді. Сөйтіп, үштік нүкте қатты және сұйық, сұйық және газ, ақырында, қатты және газ



331-сурет.



332-сурет.

күйлерінің тепе-теңдік жағдайларын анықтайтын үш қисықтың қиылысқан нүктесі болады екен.

Қатты және сұйық фазаның меншікті көлемдерінің қатысына байланысты, балқу қисығының барысы не 331-суретте көрсетілгендей ( $\frac{dp}{dT} > 0$ ) болады, не 332-суретте көрсетілгендей ( $\frac{dp}{dT} < 0$ ) болады.

Балқу, булану және сублимация қисықтары, координата жазықтығын үш облысқа бөледі. Сублимация және балқу қисықтарының сол жағында қатты фаза облысы, балқу және булану қисықтарының арасында сұйық күйлер облысы, ақыр аяғында, булану мен сублимация қисықтарының оң жағында заттың газ күйлерінің облысы жатыр. Бұл облыстардың бірінен қалауымызша алған нүкте заттың сәйкес бір фазалы күйін көрсетеді (біз ұдайы тек тепе-теңдік күйді, яғни заттың сыртқы жағдайлар тұрақты болғанда, қанша ұзақ болса да тұра алатын күйін сөз етіп отырмыз). Бұл облыстарды шектейтін қисықтардың біреуінде жатқан кез келген нүкте, заттың тиісті екі фазасының тепе-теңдік күйін көрсетеді. Үштік нүкте үш фазаның барлығының тепе-теңдік күйін кескіндейді.

Сөйтіп, диаграммадағы әрбір нүкте заттың белгілі бір тепе-теңдік күйін кескіндейді. Сондықтан да оны күй диаграммасы деп атайды.

Бірнеше кристалдық модификациясы бар зат жағдайында күй диаграммасы бұдан күрделірек боп келеді. 333-суретте түрліше кристалдық модификацияның саны екіге тең болатын жағдайдағы диаграмма кескінделген. Бұл жағдайда үштік нүкте екеу болады. Үш нүктеде сұйық, газ және заттың бірінші кристалдық модификациясындағы күйлер тепе-теңдікте тұрады, ал үшін нүктеде сұйық және екі кристалдық модификация тепе-теңдікте тұрады.

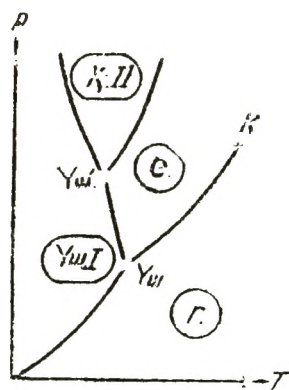
Әрбір нақтылы затқа арналған күй диаграммасы эксперименттік мәліметтер негізінде салынады. Күй диаграммасын біле отырып, заттың түрліше жағдайларда ( $p$  мен  $T$ -нің түрліше мәндерінде) қандай күйде болаты-

ның және түрліше процестерде зат қандай айналыстарға ұшырайтынын алдын ала болжап айтуымызға болады.

Бұл айтылғанды мысалдар арқылы түсіндірелік.

Егер затты *I* нүктеге сәйкес келетін күйде алсақ (331-суретті қараңыз) және оны изобаралық қыздыратын болсақ, онда зат *I—2* пунктір түзумен көрсетілген күйлер тізбегінен: кристалл — сұйық — газ күйлерден өтеді. Егер сол затты *3* нүктемен кескінделген күйде алсақ және тағы да изобаралық қыздыратын болсақ, онда күйлер тізбегі (*3—4* пунктір түзу) өзгеше боп кетеді: кристалдар сұйық фазаға соқпай, бірден газға айналады.

Диаграммадан, сұйық фаза тепеңдік күйде тек үштік нүкте қысымынан жоғары қысымдарда ғана тұра алатыны (333-суреттегі *II* қатты фазаға қатысты да осыны айтуымыз керек) байқалады.  $p_{\text{үш}}$  қысымнан төменгі қысымдарда тек асыра суытылған сұйықтар байқалады.



333-сурет.

Дағдылы заттардың көпшілігінде үштік нүкте атмосфералық қысымнан едәуір төмен жатады, сондықтан бұл заттардың қатты күйден газ тәрізді күйге өтуі екі арадағы сұйық фаза арқылы жүзеге асады. Атап айтқанда, мысалы, судың үштік нүктесіне 4,58 мм. сын. бағана-сындағы қысым және  $0,0075^\circ \text{C}$  температура сәйкес келеді.

Көмір қышқылы үшін үштік нүкте қысымы 5,11 ат-ға тең (үштік нүкте температурасы —  $56,6^\circ \text{C}$ ). Сондықтан көмір қышқылы атмосфера қысымында тек қатты және газ тәрізді күйлерде ғана болады. Қатты көмір қышқылы (құрғақ мұз) тікелей газға айналады. Көмір қышқылының атмосфералық қысымдағы сублимация температурасы —  $78^\circ \text{C}$ -қа тең.

Егер кристалдың меншікті көлемі оның сұйық фазасының меншікті көлемінен артық болса, онда кейбір процестердегі заттың айналуы өте ерекше боп шығуы мүмкін. Осындай затты, мысалы, *I* нүктемен көрсетілген (332-сурет) күйде алайық та, оны изотермалық сығалық. Бұлай сыққанда қысым өседі де, диаграммада процесс вертикаль түзумен көрсетіледі (*I—2* пунктір түзуді

қараңыз). 332-суретте көрсетілгендей, зат қысымды арттырған кезде күйлердің мынадай тізбегінен өтеді: газ — кристалл — сұйық күйі. Бұл сияқты тізбек, сөз жоқ, тек үштік нүкте температурасынан төмен температураларда байқалады.

Қорыта келіп, күй диаграммасының тағы бір ерекшелігін атап өтейік. Булану қисығы кризистік.  $K$  нүктесімен аяқталады. Сондықтан сұйық күйлер облысынан газ тәрізді күйлер облысына кризистік нүктені айналып, булану қисығын қимай-ақ ауысуға мүмкіншілік туады (332-суретте пунктирмен көрсетілген 3—4 ауысуды қараңыз). Мұндай ауысудың ( $p, V$ ) диаграммада қандай болып келетіні 276-суретте көрсетілген. Бұл жағдайда сұйық күйден газ тәрізді күйге ауысу (және керісінше) бір фазалық күйлердің тізбегі арқылы үздіксіз жүзеге асады.

Сұйық және газ күйлердің арасында үздіксіз ауысудың мүмкін болатыны оларды айырмашылық сапалық жағынан гөрі тек сандық сипатты айырмашылықтың болуында екен, атап айтқанда, бұл күйлердің екеуінде де анизотропия болмайды. Кристалдық күйден сұйық немесе газ тәрізді күйге үздіксіз ауысу мүмкін емес, өйткені кристалдық күйдің басты ерекшелігіне, өзімізге белгілі, оның анизотропиясы жатады. Ал, анизотропиясы бар күйден, анизотропиясы жоқ күйге өту тек секірмелі жүзеге асуы мүмкін — анизотропияның жарым-жартылай пайда болуы мүмкін емес, анизотропия не бар, не жоқ болуы мүмкін, үшінші мүмкіншілікке жол жоқ. Осы себепті сублимация қисығы мен балқу қисығы, булану қисығының кризистік нүктеде үзілетіні сияқты, үзіліп қала алмайды. Сублимация қисығы  $p=0$  және  $T=0$  нүктесіне барады да, ал балқу қисығы шексіздікке кетеді.

Тап солай, бір кристалдық модификациядан екіншіге үздіксіз ауысу мүмкін емес. Түрліше кристалдық модификациялар бір-бірінен өздеріне тән симметрия элементтері арқылы өзгеше боп келеді. Қез келген элемент симметриясы не бар, не жоқ болып келетіндіктен, бір қатты фазадан екіншіге ауысу тек секірмелі өтуі мүмкін. Сол себепті, екі қатты фазаның теңбе-теңдік қисықтары, булану қисығы сияқты, шексіздікке кетеді.

## ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

- Абсолют градус 440  
 Абсолют қатты дене 10  
 Абсолют ноль температура 318, 454  
 Авогадро заңы 320  
   -- саны 304, 371, 373  
 Автотербелістер 222  
 Ағын кезіндегі ұқсастық 215  
 Айналым саны 40  
   еркіндік дәрежесі 336, 346  
 Айналу симметриясы 11, 37, 122  
   -- лездік 125, 126  
 Акустикалық спектр 289  
   -- сызықты 289  
   -- тұтас 289  
 Аморфты денелер 461, 475  
 Анизотропия 461  
 Ат күші 85  
 Атомдық салмақ 304  
 Азродинамика 193, 220  
 Барометрлік формула 368  
 Бастанқы шарттар 326  
 Бел 295  
 Бернулли теңдеуі 204  
 Беттік керілу 475  
 Бойль — Мариотт заңы 316, 319  
 Больцманның таралу заңы 368, 371, 372  
   -- тұрақтысы 370  
 Броун қозғалысы 301  
 Бірлік вектор 19  
 Бу 499  
   -- қаныққан 410, 411  
   -- аса қаныққан 414  
 Булану 491  
 Булану жылуы 491  
   сублимация 491  
   булану 493  
   - фазалық 490  
 Бүкіл әлемдік тартылыс заңы 181, 189  
   -- инерция 48  
   -- импульс сақталу 77, 208  
   -- импульс моменті 139  
   -- энергия 98, 99  
 Бірліктер системасы 54  
   абсолюттік 55  
   -- халықаралық 55  
   -- МКГСС 56  
   -- СГС 55  
   -- түйікталған 75  
   -- оқшауланған 449  
   -- санау 9  
   -- гелиоцентрлік 49  
 Вакуум 392  
 Ван-дер-Ваальс тұрақтылары 403, 405, 408  
   -- теңдеуі 405, 408  
 Ватт 85  
 Вектор 13  
   -- аксиальды 39  
   -- энергия ағыны  
   -- тығыздығының 277  
   -- полярлық 39  
 Векторлық диаграмма 238  
 Векторлар коллинеарлығы 14  
   -- компланарлы 14  
 Вектор модулы 13  
   -- ығысу 178  
   -- Юнг 176  
 Вильсон камерасы 415  
 Газдарды сұнылту 421  
   Клод тәсілі 423  
   -- Линде 422  
 Ван-дер-ваальстік газ 416  
   -- идеал 319  
   -- реал 323  
 Галилей түрлендірулері 60  
   -- салыстырмалық принципі 59, 62  
 Гармониялық осциллятор 230  
 Гей-Люссак заңы 315, 316, 318  
 Герц 226  
 Гетерополярлық байланыс 466  
   гомеополярлық 466  
   Қатты 336  
   -- иондық 466  
 коваленттік 466  
   -- серпімді 337  
 Гиббс парадоксы 459  
 Гидродинамика 193, 200  
 Гироскоп 169  
 Гироскоптық компас 170  
   эффeкт 169  
   прецессия 172  
 Гравитациялық тұрақты 181, 184  
 Градиент 100  
 Грамм-атом 304  
 Грамм-молекула 304  
 Гук заңы 50, 176, 178  
 Гюйгенс принципі 177  
 Дальтон заңы 330  
 Деформация 10, 50



- бурау 178
- каадық 174
- пластикалык 174
- соғылу 174
- ығысу 174
- сығу 174
- серімді 50, 174
- Децибел 295
- Джоуль 82, 309
- Джоуль — Томсон эффектiсi 418
- Дина 56
- Динамика 10
- Диспергирлену 301
- Дисперсия 300
- Дифференциялык манометр 208
- Дыбыс интенсивтiгi 295
- Дыбыс 289
  - биіктігі 289, 290
  - катылығы 289, 295, 296
  - тембры 288, 289
- Дыбыс күші деңгейінің каттылығы 294
- Дыбыс күші деңгейінің шкаласы 295
- Дошлер эффектiсi 286
- Дьюар ыдысы 423
- Дюлонг және Пти заңы 471
- Жол 12, 26
- Жұмыс 79, 83, 84, 308, 311
  - адиабаталық процесітегі идеал газдың 353
  - изотермиялық процесітегі 353
  - политронтық процесітегі 353
  - айналыс кезіндегі 150
  - дөңгелек процесітегі 425
  - ұлғаю кезіндегі 311
- Жүгу 484
- Жүкнау 484
- Жылу машинасы 427
- Жылу сыйымдылығы 339
  - температураға байланысты газдың 345
    - идеал газдың 341, 342
    - киломолярдік 340
    - политрон процесіндегі 350, 351
    - тұрақты қысымдағы 340, 341
  - көлемдегі 340, 342
  - катты дененің 471
  - меншікті 340
- жылдамдық векторының өрісі 200, 86
  - күш 84
- Потенциалдық 87, 88
  - ауырлық 89
  - центрлік күш 86, 89
- Жылу өткізгіштік 383
  - газдардың 378
  - төменгі температурадағы 378
- Жылу қабылдағыш 409
- Жылу тегі 302
  - жылу өткізгіштік 383
  - газдардың 378
  - төменгі температурадағы 378
- Зонд 207
- Изобара 318
- Изотерма 317
  - Ван-дер-Ваальсін 409, 409
- екі фазалық системаның 409, 410, 495
  - идеал газдың 316
  - кризистік 407, 412
  - эксперименттік 409, 410
- Изотропия 461
- Изохора 317
- Изэнтропа 449
- Импульс 73, 76
  - система импульсы 51
- Импульс шінi 135
  - күш 131
  - осыке катысты күш 334
  - нүкте 130
- Инерттік 51
- Инерцияның бас осі 165, 168
- Инерция центрі 75, 78, 127, 152, 153, 155
  - тербелу 226
- ауырлық 75
- Инфрadyбыс 288
- Еркін осьтер 164, 165
- Кавендин тәжірибесі 181, 184
- Қайнау 415
- Қалория 310
- Қанналар 486
- Қанналарлық 486
- Қанна турбодетандері 423
- Карно шклы 430, 436, 440, 496
- Кванттық генератор 346
- Кеңістік группа 465
- Кернеу 175
  - нормаль 175
  - тангенстік 175
- Кенлер заңы 188
- Килогерц 226
- Килограмм 55
- Килограмм-атом 304,
  - молекула 304
- Килограмм-күш 56

- Килограммометр 82  
 Килокалория 310  
 киломоль 305  
 Кинематика 11  
 қисық инверсия 420  
   булау 498, 499  
   балқу 495, 500  
   сублимация 498, 500  
 Қисықтың қисықтығы 33  
 — бетің 495  
 Клапейрон-Клаузиус теңдеуі 496, 498  
 Клапейрон теңдеуі 322  
 Клаузиус теңсіздігі 412  
 Когеренттік 282  
 Когеренттік көз 280  
 Конденсация 414, 491  
 Концентрация 388  
 Концентрация центрі 414  
 -- кристалдану 496  
 Кризистік көлем 408  
 — мейшiкті 410  
 Кристалдану 496  
 Кристалдық решетка 462, 463  
 Кристалдық решетканың сим-  
   метриясы 463  
 Кристалдық решетканың пара-  
   метрлері 462,  
 — күй 30  
 Кристалдық ұяшық 463  
 — элементар 462  
 Кристаллографиялық система-  
   лар 465  
 Кристалдар 461  
 — атомдық 466  
 сұйық 473, 474  
 — пондық 466  
 Күш 49, 101  
 — Архимед 198  
   — сыртқы 75, 142  
   — ішкі 75, 143  
 -- мәжбүр 255  
 -- ығыстырушы 198  
 — гироскоптық 170, 171  
 -- инерциялық 109, 110  
 -- Корполистік 112, 114, 115,  
   119, 120  
 -- центрден тепкіш 111, 114,  
   115, 120  
 -- квазисерпімді 223  
 -- консервативтік 87  
 -- кулондық 466  
   консервативтік емес 87  
 -- нормаль 70  
   нормаль қысым 66  
   көтергіш 216, 219, 220  
   орта кедергісі 69  
   таңғенестік 70  
   үйкеліс 65, 88, 378, 381  
   тербелу 161  
   тыныштық 65, 66  
   сырғанау 67  
   ауырлық 62, 64, 154, 155, 185  
   жердің ендігіне байланысты  
   серпімді 184  
   центрге тартқыш 70  
   ван-дер-Ваальстік 468  
   беттік керілу 477  
 центрлік 86  
 Қалыңты атмосфера 196  
   - техникалық 196  
   - физикалық 196  
 Қуат 85  
 Құрғақ мұз 468, 502  
 Құрғақ үйкеліс заңы 67  
 Қысым кедергісі 217, 218  
   маңдайлық 216, 217, 218  
   үйкелісі 217, 218  
   форма 217  
 Ламинарлық ағыс 214  
 — стационарлық 201  
 турбуленттік 214  
 — орныққан 201  
 Ламмерт тәжірибесі 365  
 Лаплас операторы 271  
 — формуласы 481  
 Лиссажу фигурасы 247  
 Лошмидт саны  
 Максвелл-Больцман таралу за-  
   ны 371  
 Максвелл заңы 358, 362, 364  
 Масса 49, 52  
   — атомдық 305  
   — гравитациялық 187  
   — жылдамдыққа тәуелді 74  
   -- жердің массасы 188  
   инерттік 187  
   -- киломольдің массасы 305  
   молекуланың  
   — Күшінің 188  
   -- тартылыс 187  
 Математикалық маятник  
   -- аудармалы 237  
   -- физикалық 235  
 Материялық нүкте 11  
 Мегагерц 226  
 Мейшiк 486  
 Металл кристалдары 468

- молекула 468
- Метастабильдік күй 414, 496
- тепе-тең емес 306
- тепе-тең 307, 424
- Метр 55
- Механика (кванттық) 47
- классикалық 46
- релятивистік 47, 74
- Микропуаз 213
- Молекула 301
- Молекулалық әсер радиусы 404, 475
- Молекуланың эффективтік диаметрі 375, 378, 402
- Молекулалық салмақ 303
- шоқ 364, 365, 366
- Моль 304
- Материялық нүктелер системаларының импульс моменті 139
- қатты дененің 166
- инерцияның 128, 141, 142, 144
- қозғалыс мөлшері 135
- қос күш 131, 132
- оське қатысты күш 128, 132, 133, 142
- Монокристалл 462
- Мәңгі двигатель бірінші текті 429
- екінші текті 427
- Нақты газ 399
- Нернет теоремасы 454
- Нормаль жағдайлар 320
- Нормалаушы көбейткіш 369
- Нүкте көзі 268
- Ньютон 56
- Ньютон заңы
- бірінші 47, 56
- екінші 49, 52, 74
- үшінші 139
- заңдары 46
- практикалық қолданылуы 71
- Обертон 286, 289
- Оң винт ережесі 37
- жылдамдықтарды қосу 61
- Оське қатысты импульс моменті
- нүкте 135
- Өлшеу бірлігі 53
- тұтқырлықтың 213
- қысымның 196
- қуаттың 84
- жұмыстың 82
- күштің 56
- Өшудің логарифмдік декременті 251
- Өздік диффузия 392
- Паскаль заңы 196
- өшетін тербелістердің периоды 250
- кристалдық решетканың бірдейлігі 462
- тербеліс 226
- математикалық маятниктің 235
- физикалық 236
- айналу 39
- Перпетуум мобиле бірінші текті 429
- екінші 427
- Перрен тәжірибесі 373
- Пито түтігі 207
- Поликристалл 407, 496
- Политропа 351
- Процесс 307
- адиабаталық 348
- изобаралық 317, 349
- изотермиялық 36, 349, 352
- изохоралық 317, 349
- дөңгелек 425
- қайтымды 457
- қайтымсыз 424
- политроптық 349, 450
- теңбе-теңдік 308, 425
- Пуаз 213
- Пуассон теңдеуі 349
- Принцип қатаю 194
- суперпозиция 281
- Радиус-вектор 19
- Реактивтік қозғалыс 78
- Реакция 63
- ағып шығатын сорғының 209, 210
- түтік қабырғасына ағатын сұйықтың 209
- Резонанс 258
- параметрлік 261
- Резонанстық қисықтар 259
- Рейнольдс саны 215, 218
- кризистік мәні 215
- Санақ системасы 48
- инерциялық 48, 53, 51
- инерциялық емес 48, 108
- Сезерленд тұрақтысы 376
- формуласы 376
- Секунд 55
- Серпімді ортадағы толқының жылдамдығы 272

- газдардағы дыбыстың 293
- шаңдылаудан шыққан ағыстың 293
- кәсіптің бірінші 190, 192
- кінші 191, 192
- молекулалардың ең ықтимал 359
- орташа 293, 361, 363
- вадраттық 361
- векторлық 190
- бұрыштық 39
- прецессия жылдамдығы 172, 173
- фазалық 268, 272, 274
- шерция центрінің
- Симметрия жазықтығы
- Симметрия кластары 465
- Симметрия осьтері 464
- Сингония 465
- Скаляр 13
- Соғу амплитудасы 242
- Соғу жиілігі 242
- тербелістің 226
- математикалық маятниктің 235
- шеңбердің 227
- негізгі 286, 289
- меншікті 249
- циклдік 227
- Сорғылаудың үздіксіздігі туралы теорема 202
- Статика 11
- Стокс заңы 218
- Сорғы насос 205
- Суытқыш машина 427
- Суперпозиция толқындардың 281
- ультрасиретілген 399
- Таралудың функциясы 257, 258
- Толқындар 262
- жүгірме 266, 471
- өшетін 281, 282
- дыбыс 288
- когерентті 280
- жазық 265
- көлденең 262
- Кума 262
- Тұрғын 282, 285
- сфералық 266, 268
- ультрадыбыстық 298
- ақындық бет 266
- ақындық дифракциясы 282
- ақындық теңдеу 270, 272
- сан 267
- вектор 270
- Толқындық температура 314
- абсолют 317, 328
- кризистік 407, 408, 411, 412, 479, 492
- балқу 494
- Температураның абсолют шкаласы 315, 317
- идеал газдың 321
- Кельвин 317
- термодинамикалық 438, 440
- Цельсия 314, 317
- Температуралық эмпирикалық шкала 315
- Температуралық белгі 314
- Тензор инерциясы 168
- Термодинамика 302, 424
- бірінші бастамасы 308, 309, 424, 427
- екінші 424, 428
- Термометрлік дене 314, 438
- Торичелли формуласы 206
- Траектория 12
- Ток сызықтары 200
- Ток түтігі 201
- Толқын дифракциясы 283
- Толқын интерференциясы 281
- Топустық дыбыс 289
- Тұрғын толқынның түйіні 283
- Толқынның теңдеулері 271
- толқындар 266
- айналмалы қозғалыс динамикасы 141
- күй 316
- жылу өткізгіштік 383
- Тығыздық 144
- ықтималдық 232
- энергия ағыны 277, 289, 295
- толқын энергиясы 276
- серпімді деформация энергиясы 180
- Үдеу кориолистік 114
- сызықтық 29
- нормаль 32, 36, 41, 70
- еркін түсу 62, 186
- нормаль мәні 62, 184, 238
- ауырлық күші 62, 184, 238
- стандарттық 186
- тангенстік 36
- бұрыштық 40
- центрге тепкіш 70
- Үштік нүкте 416, 491, 499
- Фаза 268
- толқындық 268

- тербелістік 226
- бастапқы 226
- термодинамикалық 409, 490
- Фазалық жазықтық 230
- траектория 230, 251
- фазалық ауысу (екінші текті) 491
- бірінші текті 491
- физика молекулалық 302
- статистикалық 302, 378
- Физикалық кинетика 378
- Физикалық шексіз аз көлем 144
- физикалық шамалардың өлшемдігі 57, 58
- фронт толқынының 266
- Центрлер 414
- конденсация 414
- кристалдану 496
- Цикл 425, 426
- Шекаралық қабат 217
- Шектің меншікті жиілігі 286
- Штейнер теоремасы 146
- Штерн тәжірибесі 364
- Шулар 289
- Ықтимал 289, 455
- математикалық 455
- термодинамикалық 455
- Ійін 135
- импульс 135
- қос күш 129
- оське қатысты күш 134
- нүкте 134
- Ішкі үйкеліс коэффициенті 211, 378
- тұтқырлықтың 211
- газдың 377
- диффузия 389, 390, 391
- толқынының 280
- тербелістің 250
- беттік керілудің 477, 479
- толқын жұту 280
- қайтымды машинаның пайдалы әсерінің
- жылу машинасының 427
- Карно циклының 437
- көлденең сығу 176
- Пуассон 176
- кедергі 248
- жылу өткізгіштік 389
- газдың 385
- ультрасиретілген 394
- үйкеліс 68, 70
- серпімділік 175
- суытқыштықтың 428
- электрондық парлар 466
- Эмульсия 300
- Энергияның таралуы 335, 338
- Энергия 90
- молекулалық өз ара әсер 401
- ішкі 307
- ван-дер-ваальс газының 417
- идеал газдың 339, 341
- кристалдың 470
- реал газдың 416
- гармониялық тербелістің 228
- осциллятордың 231
- кинетикалық 90, 91, 92
- жазық қозғалыста 151, 152
- қатты дененің 148
- беттік 476, 482
- толық 95, 96
- потенциалық 90, 93, 94, 101
- еркін 453, 479
- байлаулы 453
- серпімді толқынның 275
- деформацияның 149
- Энтальпия 419
- Энтропия 447, 449, 454
- идеал газ 457
- статистикалық талдауы 454
- Эрг 82
- Эффузиялық әдіс 398
- Эффузия 396
- қарама-қарсы изотермиялық 397
- жылулық 396

*Игорь Владимирович Савельев*

**Курс общей физики, том I**

(на казахском языке) *изд. первое*

Редактор *Р. Идрисова*. Худ. редактор *В. Асқина*.  
Сдано в набор 14/IV-76 г. Подписано к печати 16/II-76 г.  
Тех. редактор *С. Пасюгина*. Корректор *М. Утегенова*

Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип. 3. Объем 15,875 п. л.  
Усл. печ. л. 26,67. Уч. изд. л. 25,403. Тираж 3700 экз. Цена 85 коп.  
г. Алма-Ата, издательство «Мектеп» ул. Карла Маркса, 99 а.

Заказ № 619. Фабрика книги производственного объединения полиграфических предприятий «Кітап» Государственного комитета Совета Министров Казахской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 480016, г. Алма-Ата, пр. Гагарина, 93